4° Math. P.
53 g/12
Brandes

<36635607280017

<36635607280017

Bayer. Staatsbibliothek

Lehrbuch

der

höhern Geometrie,

in

analytischer Darstellung

von

H. W. Brandes

Professor an der Universität in Breslau.

Zweiter Theil.

Mit 5 Kupfertafeln.

Leipzig,
bei Paul Gotthelf Kummer.
1824.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Vorrede.

Schon in der Vorrede zum ersten Theile habe ich bemerkt, daſs ich in diesem zweiten Theile alle diejenigen Lehren der höheren Geometrie darzustellen gedächte, zu deren Entwickelung man der Hülfe der höhern Analysis bedarf. Diesen Plan hoffe ich so vollständig, als es die Grenzen des Buches erlaubten, ausgeführt zu haben, und da wir kein ähnliches Buch besitzen, so darf ich mir wohl schmeicheln, durch diesen zweiten Theil einem Bedürfnisse abzuhelfen.

Ich habe mich bemüht, alle wichtigen Lehren, die hieher gehören, so vollständig abzuhandeln, daſs der Leser dadurch zu eignen Untersuchungen hinreichend vorbereitet werde, und hoffe, daſs man nichts Wesentliches vermissen wird. Diejenigen Aufgaben, die in die Variationsrechnung

gehören, habe ich, als zu meinem Plane nicht gehörig, ausgeschlossen, und nur gelegentlich eine und die andre, die sich bei den untersuchten Curven darbot, mit aufgenommen; — eine vollständige Ausführung aller der Untersuchungen, die mit Hülfe der Variationsrechnung angestellt werden könnten, würde zu viel Raum erfordert haben, und könnte allenfalls den Stoff zu einem eignen Buche geben, wenn ich hoffen dürfte, den Beifall der Lernenden und der Kenner auch in der Bearbeitung eines so schwierigen Gegenstandes erwerben zu können.

Ueber die einzelnen in diesem Theile vorgetragenen Gegenstände sei es mir erlaubt, noch einige Bemerkungen zu machen.

Die Lehre von den doppelten Puncten, den Spitzen u. s. w. habe ich vollständiger vorgetragen, als man sie, so viel mir bekannt ist, irgendwo findet, und ich glaube, dafs dieses nothwendig war, um in der analytischen Entwickelung die mannigfaltigen Fälle, die hier eintreten können, zu übersehn, und um völlig klar die Gründe einzusehn, warum die für andre Puncte der Curve passende Entwickelung der Differenzreihe hier ihre Brauchbarkeit verliert.

Die Untersuchung über den Krümmungshalbmesser und die Evolute wird man vollständig finden, wenn sich auch grade keine Gelegenheit zu neuen Untersuchungen hier dargeboten hat. Der Darstellung der Lehre von den Quadraturen glaube ich durch die Entwickelung der Gaufsischen Methode, Integrale annähernd zu finden, einen wichtigen Vorzug vor dem, was man in andern Büchern findet, gegeben zu haben; ich habe mich bemüht, durch eine für den Anfänger fafsliche Ableitung, die von derjenigen, deren sich der berühmte Erfinder dieser Methode bedient hat, verschieden ist, die Leser zu dem Studium der schönen, aber wegen ihrer Allgemeinheit nicht leichten, Abhandlung von Gaufs vorzubereiten. In den Unter-

suchungen über Rectificationen glaubte ich die merkwürdigen Lehrsätze über die Vergleichung der elliptischen Bogen nicht übergehn zu dürfen, und einen Auszug aus Legendre's schönen Untersuchungen mittheilen zu müssen.

Der Bestimmung von Curven, die durch eine Eigenschaft, welche auf Differentialgleichungen führt, gefunden werden, habe ich etwas mehr Raum widmen müssen, da das Bekanntere hier nicht fehlen durfte, und ich doch auch an schwierigern und neuen Beispielen dem Leser eine Uebung in der Integralrechnung darzubieten wünschte. Es ist hier mein Bestreben gewesen, einige Beispiele so ausführlich zu behandeln, daſs sie dem Anfänger, der ähnliche Untersuchungen anzustellen versuchen will, zur Leitung und vielleicht zum Vorbilde dienen können; es hat mir immer geschienen, daſs eine vollständiger durchgeführte Untersuchung einzelner Gegenstände nicht nur weit belehrender ist, als eine gröſsere Anzahl verschiedener Beispiele, sondern daſs sie auch die Aufmerksamkeit des Lesers weit mehr fesselt, indem er seine Aufmerksamkeit mehr belohnt, seine Wiſsbegierde mehr befriediget findet, als wenn man ihn mit jedem einzelnen Gegenstande nur obenhin bekannt macht.

Auf die schwierige Lehre von den besondern Auflösungen der Differentialgleichungen oder, wie sie hier in geometrischer Beziehung heiſsen muſste, von den Grenzcurven, habe ich den sorgfältigsten Fleiſs gewandt. Obgleich die hier vorzutragenden Hauptsätze schon durch Lagrange's treffliche Untersuchungen bekannt waren, so hoffe ich doch durch die sorgfältige Beantwortung aller hier vorkommender Fragen und durch die vollständige Nachweisung des geometrischen Sinnes jener analytischen Sätze dem Anfänger das Verstehen dieses Gegenstandes erleichtert und darin mehr geleistet zu haben, als ich in irgend einem andern Buche gefunden habe.

Von den Trajectorien ist alles, was zur richtigen Kenntniſs des Gegenstandes nöthig schien, aufgenommen und theils mit bekannten, theils mit neuen Beispielen erläutert.

Die Lehre von den Asymptoten krummer Flächen hätte vielleicht eine noch weitere Ausführung verdient; aber ich besorgte, in eine für ein Lehrbuch zu groſse Weitläuftigkeit zu gerathen. Dagegen habe ich die Untersuchung über die doppelten Puncte krummer Flächen, worüber ich nirgends etwas Genügendes gefunden habe, so weit durchzuführen gesucht, daſs sich übersehn läſst, wie man mit etwas mehr Aufwand von Mühe auch in noch schwierigern Fällen die sich hier darbietenden Fragen beantworten könnte. In der Lehre von der Krümmung der Flächen, den Krümmungslinien auf denselben und dem Krümmungshalbmesser hatte ich an Monge einen so trefflichen Vorgänger, daſs mir wenig andres zu thun übrig blieb, als seine Untersuchungen in einer für meinen Plan passenden Darstellung mitzutheilen. Eben das gilt auch in Beziehung auf einen groſsen Theil des Abschnittes von den doppelt gekrümmten Linien, wo ich indeſs durch eine mehr ins Einzelne gehende Betrachtung der als Beispiele gebrauchten Curven, Gelegenheit fand, mehr Eigenthümliches hinzuzufügen.

Von der Bestimmung des Inhalts und der Oberfläche der durch krumme Flächen begrenzten Körper habe ich zwar alles, was nothwendig ist, mitgetheilt, aber doch hier absichtlich mich kurz gefaſst, um mehr Raum für den höchst wichtigen Gegenstand des nächsten Abschnittes zu behalten. Dieser nämlich, welcher krumme Flächen aus solchen Eigenschaften, die auf partielle Differentialgleichungen führten, bestimmen lehrt, scheint mir darum vorzüglich wichtig, weil sich hier die schwierigsten Gegenstände der Integralrechnung auf eine so klare Weise an Beispielen erläutern lassen. Ich habe über diesen höchst reichhaltigen Gegenstand so viele Beispiele mitgetheilt und habe in der Entwickelung derselben mich

bemüht, so in das Einzelne einzugehn, daſs ich hoffe, man wird diese Anleitung vollständig genug finden, um nicht bloſs das zu verstehn, was in andern Schriften hierüber vorkömmt, sondern auch um eigne Untersuchungen ähnlicher Art anzustellen. Obgleich ich hier an Monge einen in vieler Hinsicht unübertrefflichen Vorgänger hatte, so habe ich dennoch selbst bei den, auch von ihm behandelten, Gegenständen oft eine wesentlich verschiedene Darstellung wählen müssen. Monge nämlich hatte es sich zu einem allerdings höchst wichtigen Ziele seiner Bemühungen gemacht, durch geometrische Betrachtungen die Gleichungen für die Fläche, theils wie sie als Differentialgleichungen, theils wie sie als Integralgleichungen dargestellt werden, zu finden; dagegen war es mein Bestreben, aus der Differentialgleichung durch eine, möglichst rein auf analytischem Wege geführte Betrachtung zu dem Integrale zu gelangen, und in diesem die geometrischen Bestimmungen wieder aufzusuchen, die darin liegen, oder an dieses die zu einer Anwendung des allgemeinen Integrals auf das Einzelne noch erforderlichen geometrischen Data anzuknüpfen. Ich habe mich bemüht, meiner Darstellung einen für Anfänger, (für welche Monge sein Werk nicht bestimmte,) angenehmen Vorzug vor der des Monge dadurch zu geben, daſs ich nicht bloſs bei dem Allgemeinen verweile, sondern an der Anwendung auf Beispiele die Bestimmungen wirklich entwickele, von denen er meistens nur in einer von der Anwendung noch weit entfernten Allgemeinheit redet. Hätte ich nicht, aus Besorgniſs allzu lange hiebei zu verweilen, mir ein Ziel setzen müssen, so würde ich gern diese Untersuchungen noch weiter fortgesetzt haben; ja sie scheinen mir so anziehend und können noch zu so vielen belehrenden Resultaten führen, daſs sie wohl den Gegenstand eines eignen Buches geben könnten, wenn man hoffen dürfte, für Untersuchungen dieser Art theilnehmende Leser zu finden.

Die letzten beiden Abschnitte, wo ich meistens Lagrange und Monge gefolgt bin, handeln von den Grenzflächen und von der durch

Monge entdeckten Bedeutung derjenigen Integralgleichungen, die man früher für ganz inhaltlos oder unmöglich ansah.

Dies ist der Inhalt des Buches. Was die Bearbeitung desselben betrifft, so habe ich es gewiſs an Fleiſs nicht fehlen lassen; ich habe besonders da, wo ich Gegenstände, die ich für neu hielt, darzustellen hatte, mich nicht allein durch öfter wiederholte Durchsicht, sondern auch durch Anwendung der vorgetragenen Sätze auf einzelne Beispiele, von der Richtigkeit der Schlüsse zu überzeugen gesucht, und hoffe daher, daſs man nirgends einen unrichtigen Schluſs oder eine unrichtige Rechnung finden wird; sollte dieses dennoch in irgend einem einzelnen Falle statt finden, so darf ich wohl auf eine nachsichtsvolle Belehrung hoffen.

Breslau, am 18. Februar 1824.

H. W. Brandes.

BAYERISCHE STAATS- BIBLIOTHEK MÜNCHEN

Erste Abtheilung.

Untersuchungen über ebne Curven.

Erster Abschnitt.

Von den Tangenten der Curven, ihren Wendungspuncten, Knoten und Spitzen.

1. **Bemerkung.** Obgleich die Lage der Berührungslinie schon durch die Betrachtungen, die ich früher mitgetheilt habe, völlig bestimmt ist: so komme ich doch noch einmal auf diesen Gegenstand zurück, theils um noch einige Bemerkungen hier nachzutragen, theils um die Erleichterungen zu benutzen, welche die Differentialrechnung darbietet.

Wir nehmen auch hier zuerst an, dafs die Curve durch rechtwinkliche Coordinaten x und z gegeben sei, und der Winkel $= \phi$ heifse, welchen die Berührungslinie mit der Abscissenlinie, worauf die x genommen sind, macht; dann ist $tang\ \phi = \frac{dz}{dx}$, und wir verstehen unter positivem ϕ den Winkel ZUY (in Fig. 1.) dessen einer Schenkel die wachsende Abscisse ist, und der sich an der Seite befindet, wo die positiven z liegen.

2. **Bemerkung.** Wenn wir diese Bestimmung für die Lage des Winkels festsetzen, so kann über die Lage der Berührungslinie kein Zweifel entstehen, indem $tang\ \phi$ positiv wird, wenn mit dem wachsenden x auch ein wachsendes z zusammengehört, wie in Fig. 7. bei 1. 4. 5. 8, wo C der Anfangspunct der nach N hin positiven Abscisse x ist, und die positiven Ordinaten oberhalb CT' liegen, hingegen $tang\ \phi$ negativ wird, wenn z abnimmt, während x wächst; wie bei 2. 3. 6. 7. Es versteht sich hier von selbst, dafs ein abnehmender negativer Werth von x als ein wachsendes x anzusehen ist.

3. **Lehrsatz.** Die Subtangente wird allemal durch $= \frac{z \cdot dx}{dz}$ ausgedrückt; die Subnormallinie durch $= \frac{z\,dz}{dx}$. (Fig. 7.)

Beweis. Da $Z'T'$ die Verlängerung des kleinen Stückes $Z'V'$ der Curve ist, so sind die Dreiecke $T'Z'X'$, $Z'V'U$ ähnlich, wenn $Z'U$ mit CX', UV' mit $X'Z$ parallel ist. Heifst also $CX' = x$, $Z'U = dx$ $X'Z = z$, $UV' = dz$, so ist *Subtang.* $T'X' = z.\ Cotang\ \phi = \frac{z\,dx}{dz}$;

und aus ähnlichen Gründen, weil $Z'N$ senkrecht auf $T'Z'$, *Subnorm.* $X'N = z \; tang \; \varphi = \frac{z\,dz}{dx}$.

4. Bemerkung. Die Lage der Subtangente und der Subnormallinie wird durch die + oder — Zeichen immer richtig angedeutet. Wir nehmen es nämlich als Normalfall an, daſs die Subtangente positiv heiſsen soll, wenn z, dx und dz alle drei positiv sind, wie in Fig. 7. bei 1; sie heiſst also dann positiv, wenn ihre Richtung vom Einschnitte der Berührungslinie an gegen die Ordinate $Z'X'$ zu mit der Richtung der wachsenden Abscisse übereinstimmt. Da wir dx immer als wachsend ansehen können, so ist also die Subtangente immer positiv, wenn z und dz einerlei Zeichen haben, und negativ, wenn sie entgegengesetzte Zeichen haben. Also für ein wachsendes positives x ist 1stens die Subtangente positiv, wenn z positiv ist und mit x zugleich wächst, wie bei 1. in Fig. 7. wo $T'X'$ die Subtangente vorstellt; und die Subtangente $T^{v}X^{v}$ ist 2tens negativ, wenn das positive z abnimmt; für ein wachsendes positives x ist 3tens die Subtangente positiv, wie $T^{viii}X^{viii}$, wenn z negativ ist und bei wachsendem x immer gröſsere negative Werthe erhält, und 4tens die Subtangente $T''X''$ negativ, wenn z negativ, aber dz positiv ist, oder die negativen Werthe von z kleiner werden, indem x wächst. Ebenso giebt ein negatives x, 5tens wenn z positiv ist und wächst wenn die negativen x sich vermindern, das heiſst wenn z, dz, dx positiv sind, eine positive Subtangente, $T'''X'''$, und 6tens wenn z positiv ist, aber sich vermindert, wenn man dx positiv nimmt, eine negative Subtangente $T^{vi}X^{vi}$; und ferner wenn x negativ und z negativ ist, so wird 7tens die Subtangente $T^{vii}X^{vii}$ positiv, wenn das negative z einen gröſseren negativen Werth erlangt, während das negative x einen geringeren Werth erhält, und endlich 8tens die Subtangente $T^{iv}X^{iv}$ ist negativ, wenn das negative z einen positiven Zuwachs $= + dz$ erhält, während auch das negative x einen positiven Zusatz $= + dx$ bekömmt.

5. Ueber die Subnormallinie läſst sich nun genau eben so urtheilen. Sie heiſst (Fig. 8) positiv da, wo z positiv ist und die positiven x und z zugleich wachsen, also da wo N in einen Punct fällt, dem auf der Abscissenlinie ein gröſserer positiver Werth als der Abscisse zugehört, $CN > CX$ ist. Diesem Normalfalle gemäſs muſs man alle 8 Fälle beurtheilen.

Anmerkung. Diese weitläuftige Auseinandersetzung mag vielleicht überflüssig scheinen; ich habe aber geglaubt, die von Hrn. Busse mehrmals erhobenen Zweifel (Formulae linearum Subtangentium ac Subnormalium explicatae a F. Th. Busse. Lipsiae 1798.) nicht ganz unberücksichtigt lassen zu dürfen, und hoffe, daſs man diese Erörterungen zureichend finden wird, nicht um die gewöhnliche Anwendung des + und — zu entschuldigen, sondern sie vollkommen zu rechtfertigen.

6. Aufgabe. Für eine Curve (Fig. 1.) ist die Gleichung $z = \frac{a}{log. \frac{x}{a}}$ gegeben, man sucht ihre Subtangente und Subnormallinie.

Auflösung. Da $dz = \frac{-a\,dx}{x. \left(log. \frac{x}{a}\right)^2} = \frac{-z^2\,dx}{a\,x}$, so ist die Subtangente $UX = -\frac{ax}{z}$ und die Subnormallinie $= -\frac{z^3}{ax}$; beide werden also negativ so lange z positiv ist, und positiv wenn z negativ ist; x nämlich kann nie negativ werden, da in einem Systeme von Logarithmen für positive Zahlen, keine Logarithmen für negative Zahlen vorkommen können.

7. Diese Subtangente läſst sich durch eine leichte Construction bestimmen. Wenn man $XY = CX = x$ und $XD = a = CA$ aufträgt, und nun ZY und damit DU parallel zieht, so ist U der Punct, wo die an Z gezogne Tangente ZU in die Abscissenlinie einschneidet.

8. Daſs unsre Curve für $x = 0$, $z = 0$ giebt, weil $log\,\frac{x}{a}$ dann unendlich ist; daſs in unsrer Curve $z = \infty$ wird für $x = a$, wo $log\,\frac{x}{a} = log\,1 = 0$ ist, erhellt leicht. Die ganze Curve fängt in C, wo $x = 0$ ist, an, und geht von da, so lange $x < a$, auf der negativen Seite der Abscissenlinie fort, wo der Ast CQ die Senkrechte AQ zur Asymptote hat. Wenn $x > a$ ist, so wird z positiv und der Theil ZR der Curve schlieſst sich mit einem Aste an die Asymptote AP mit dem andern an die Asymptote AY an.

9. Aufgabe. Es ist für eine Curve die Gleichung $z = a\,log \left(\frac{a \pm \surd (a^2 - x^2)}{x}\right) - \surd (a^2 - x^2)$, gegeben, man sucht die Gröſse des Theiles der Tangente, der zwischen dem Berührungspuncte Z (Fig. 2.) und der Linie AU, worauf die $AV = z$ aufgetragen worden, enthalten ist.

Auflösung. Es sei $AX = x$, $XZ = AV = z$, so ist $tang\,ZUV = \frac{dx}{dz}$ und $UZ = x.\ Cosec.\ ZUV$.

Da nun $dz = \frac{a.\,d.\left\{\frac{a}{x} + \surd\left(\frac{a^2}{x^2} - 1\right)\right\}}{\frac{a}{x} + \surd\left(\frac{a^2}{x^2} - 1\right)} + \frac{x\,dx}{\surd (a^2 - x^2)}$;

$$\text{oder } dz = \frac{-\frac{a^2\,dx}{x^2} - \frac{a^3\,dx}{x^2\sqrt{\left(\frac{a^2}{x^2}-1\right)}}}{\frac{a}{x} + \sqrt{\left(\frac{a^2}{x}-1\right)}} + \frac{x\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}};$$

$$= -\frac{a^2\,dx}{x^2\sqrt{\left(\frac{a^2}{x^2}-1\right)}} + \frac{x\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}};$$

$$= \frac{-dx.\sqrt{(a^2-x^2)}}{x}$$

so ist $tang\ ZUV = -\frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$ und $Cosec\ ZUV = \frac{a}{x}$, also $UZ = x\ Cosec\ ZUV = a$.

Dieser Theil der Tangente ist also immer gleich für jeden Punct Z der Curve.

10. Bemerkung. Wenn $\frac{dz}{dx} = 0$ ist, so muſs an dieser Stelle die Curve mit den Abscissen x parallel sein. (1. Th. §. 375.) Da wo dies geschieht ist nun entweder die Ordinate z gröſser als in den benachbarten Puncten wie bei A. Fig. 3., oder sie ist kleiner als in den benachbarten Puncten, wie bei B. Fig. 3., oder das Zunehmen oder Abnehmen, welches sich bis auf 0 vermindert hatte, wird wieder gröſser, wie in A. Fig. 4.

Hierauf beruht es also, daſs man die gröſsten und kleinsten Werthe der Ordinate z bestimmt, indem man $dz = 0$ setzt; indeſs läſst sich erst durch Betrachtung der folgenden Glieder der Differenzreihe entscheiden, ob hier ein Gröſstes oder Kleinstes statt findet. Entwickelt man nämlich den Werth von Δz, so erhält die Reihe im Allgemeinen eine Form, worin Δx, $(\Delta x)^2$, $(\Delta x)^3$ u. s. w. vorkommen, und offenbar bleiben hier die Glieder, welche grade Potenzen von Δx enthalten, ganz dieselben, man mag $+\Delta x$ oder $-\Delta x$ nehmen, die Glieder hingegen, welche ungrade Potenzen enthalten, erhalten entgegengesetzte Zeichen, wenn man $-\Delta x$ statt $+\Delta x$ setzt.

Diese Reihe läſst sich nach Anleitung des Taylorschen Theorems *) am besten so darstellen, daſs z den Werth

$$z' = z + \frac{dz}{dx}.\Delta x + \frac{d^2z}{1.\,2.\,dx^2}(\Delta x)^2 + \frac{d^3z}{1.2.3.\,dx^3}(\Delta x)^3 + \frac{d^4z}{1.2.3.4.\,dx^4}(\Delta v)^4 + +$$

erhält, wenn x in $x + \Delta x$ übergeht, und man erhält daher für $x - \Delta x$ den

*) Lacroix. §. 21. und Mayer. 1. Th. §. 71.

zugehörigen Werth von z,

$$'z = z - \frac{dz}{dx}\Delta x + \frac{d^2z}{1.2.dx^2}(\Delta x)^2 - \frac{d^3z}{1.2.3.dx^3}(\Delta x)^3 + \frac{d^4z}{1..4\,dx^4}(\Delta x)^4 - \text{etc.};$$

für x den zugehörigen Werth

$$z = z;$$

und für $x + \Delta x$ den zugehörigen Werth

$$z' = z + \frac{dz}{dx}\Delta x + \frac{d^2z}{1.2.dx^2}(\Delta x)^2 + \frac{d^3z}{1.2.3.dx^3}(\Delta x)^3 + \frac{d^4z}{1...4.dx^4}(\Delta x)^4 + \text{etc.}$$

Da hier die folgenden Glieder desto unbedeutender werden, je kleiner Δx genommen wird, so erhellt, daſs für den Fall, da $\frac{dz}{dx} = 0$ oder die Richtung der Curve mit der Abscissenlinie parallel ist, die zunächst an z liegenden Ordinaten $'z$ und z' beide gröſser als z sein werden, wenn $\frac{d^2z}{dx^2}$ positiv ist, dagegen beide kleiner als z sein werden, wenn $\frac{d^2z}{dx^2}$ negativ ist; in jenem Falle ist also z ein kleinster Werth, in diesem Falle z ein gröſster Werth der Ordinate. Träte der Fall ein, daſs $\frac{dz}{dx} = 0$ und zugleich $\frac{d^2z}{dx^2} = 0$ wäre, so würde $'z$ kleiner als z, und z' gröſser als z sein, wofern $\frac{d^3z}{dx^3}$ einen positiven Werth hat; da also würde (wie in Fig. 4.) die Curve zwar mit der Abscissenlinie parallel, welches durch $\frac{dz}{dx} = 0$ ganz bestimmt angedeutet wird, aber gleichwohl ginge das Abnehmen der Ordinate nicht in Wachsen über. Wären die drei ersten Differentiale $= 0$, aber $\frac{d^4z}{dx^4}$ positiv, so würde z kleiner als beide benachbarte Coordinaten, und so lieſse sich, wenn auch $d^4z = 0$ wäre, weiter fortschlieſsen.

11. Aufgabe. Die gröſsten oder kleinsten Werthe der Ordinate zu bestimmen für eine Curve, deren Gleichung $z = \frac{2x^3}{a^2} - \frac{3x^2}{a} + b$ ist. (Fig. 3.)

Auflösung. Wenn $\frac{dz}{dx} = \frac{6x^2}{a^2} - \frac{6x}{a} = 0$ sein soll, so muſs entweder $x = a$ oder $x = 0$ sein; im ersten Falle ist

$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{12x}{a^2} - \frac{6}{a} = +\frac{6}{a}$, also liegt da, bei B, ein Kleinstes der Ordinate;

dagegen für $x = 0$ wird $\frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{6}{a}$, negativ, also liegt bei A ein Gröſstes.

12. Aufgabe. Den gröſsten und kleinsten Werth der Ordinate für die Curve zu bestimmen, deren Gleichung ist: $z^3 + x^2 z - axz + bx^2 = 0$.

Auflösung. Hier wird $\frac{dz}{dx} = \frac{az - 2bx + 2xz}{3z^2 + x^2 - ax}$

und $\frac{d^2 z}{dx} = \frac{(a-2x)\, dz - 2(b+z)\, dx}{3z^2 + x^2 - ax} - \frac{(az - 2bx - 2zx)(6zdz + 2xdx - adx)}{(3z^2 + x^2 - ax)^2}$,

Soll also $\frac{dz}{dx} = o$ werden, so muſs $az = 2x(b+z)$ sein, und in diesem Falle, wird also

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{-2(b+z)}{3z^2 + x^2 - ax}.$$

Um hier die Lage und den Werth der gröſsten Ordinate zu bestimmen, müssen wir die allgemeine Gleichung $z^3 + x^2(b+z) - axz = 0$ mit der nur da wo $dz = 0$ ist, statt findenden Gleichung $\frac{az}{2} = (b+z)x$ verbinden, und da giebt *) jene $z^3 - \frac{1}{2}axz = 0$, oder $z^2 = \frac{1}{2}ax$, und folglich wird aus $\frac{1}{2}az = x(b+z)$, auch $\frac{1}{2}az = \frac{2z^2}{a}(b+z)$ oder $\frac{1}{4}a^2 = bz + z^2$, oder $z = -\frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)}$. Dieses sind demnach die beiden Werthe, die sich als Gröſste oder Kleinste ergeben, und obgleich leicht erhellt, welcher von beiden das eine oder andre ist, so wollen wir es dennoch regelmäſsig untersuchen.

Wenn erstlich $z = -\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)}$ ist,
so wird aus $z^2 = \frac{1}{2}ax$, $x = \frac{1}{2}\frac{(-b+\sqrt{(a^2+b^2)})^2}{a}$

$$\text{oder } x = \frac{1}{2a}\left\{\frac{(-b+\sqrt{(a^2+b^2)})(-b+\sqrt{(a^2+b^2)})(b+\sqrt{(a^2+b^2)})}{b+\sqrt{(a^2+b^2)}}\right\}$$

$= \frac{1}{2}a\left(\frac{-b+\sqrt{(a^2+b^2)}}{+b+\sqrt{(a^2+b^2)}}\right)$, und daher x sowohl als z positiv,

also $\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{-2(b+z)}{3z^2 + x^2 - ax} = \frac{-2(b+z)}{\frac{3}{2}ax + x^2 - ax} = \frac{-2(b+z)}{(\frac{1}{2}a + x)x}$,

gewiſs eine negative Gröſse; dieser erste Werth von z ist also ein Gröſstes.

Dagegen wenn $z = -\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)}$, so wird

$x = \frac{1}{2}a\left(\frac{b+\sqrt{(a^2+b^2)}}{-b+\sqrt{(a^2+b^2)}}\right)$, und da nun $b + z = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)}$

*) Warum ich den Werth $z = 0$ nicht berücksichtige, erhellt aus §. 418. des ersten Th.

negativ ist, so erhält $\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{-2(b+z)}{x(\frac{1}{2}a+x)}$ einen positiven Werth, und hier ist z ein Kleinstes.

Anm. Ganz eben das wurde im 1. Th. §. 409. Fig. 107. gefunden.

13. Aufgabe. Zu bestimmen, ob die Curve, deren Gleichung ist, $b^3 z = x^4 - 4bx^3 + 2b^4$, Puncte habe, wo die Ordinate ein Gröſstes oder Kleinstes wird.

Auflösung. Man erhält $b^3 dz = (4x^3 - 12bx^2)\,dx$, und $b^3 d^2 z = (12x^2 - 24bx)\,dx^2$. Hier ist $dz = 0$, sowohl wenn $x = 0$, als wenn $x = 3b$ ist; der letztere Werth giebt ein Kleinstes, weil für $x = 3b$, $d^2 z$ positiv $= \frac{12\,x\,dx^2}{b^2}$ wird; dagegen giebt $x = 0$ weder ein Gröſstes noch ein Kleinstes, weil auch $d^2 z$ dann $= 0$, dagegen $d^3 z = \frac{1}{b^3}(24x - 24b)\,dx^3$, für $x = 0$ einen von 0 verschiedenen Werth $= -\frac{24\,dx^3}{b^2}$ giebt.

Das Abnehmen der z dauert also (Fig. 4.) fort, obgleich bei A die Curve mit der Abscissenlinie parallel war.

14. Bemerkung. An den Stellen, wo $\frac{dz}{dx} = 0$, ist ohne Ausnahme die Berührungslinie mit der Abscissenlinie parallel, wenn also der gröſste oder kleinste Werth der Ordinate, wie das der gewöhnlichste Fall ist, mit dieser Lage der Berührungslinie zusammengehört, so wird er nach den eben betrachteten Regeln gefunden; aber da wo die Curve einen Rückkehrpunct hat, kann ihre Ordinate einen gröſsten oder kleinsten Werth erreichen, ohne daſs die Berührungslinie mit der Abscissenlinie parallel wird, und solche Gröſste oder Kleinste werde daher nicht dadurch gefunden, daſs man $dz = 0$ setzt.

15. Aufgabe. Es sei $z = \frac{x^2}{a} \pm a\left(\frac{f-x}{a}\right)^{\frac{3}{2}}$ die Gleichung für eine Curve, man sucht die Puncte, wo z gröſste oder kleinste Werthe erhält.

Auflösung. Um die Lage der Berührungslinie zu bestimmen, erhalten wir $\frac{dz}{dx} = \frac{2x}{a} \mp \frac{3}{2}\left(\frac{f-x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$, und diese Linie wird also mit der Abscissenlinie parallel, wenn $\frac{2x}{a} = \pm \frac{3}{2}\left(\frac{f-x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$, oder $\frac{16}{9}\,x^2 = a(f-x)$ ist. Das findet statt, sowohl für

$$x = -\frac{9}{32}a + \sqrt{\left\{\frac{9}{16}af + \frac{81}{1024}a^2\right\}},$$

als für $x = -\frac{9}{32}a - \sqrt{\left\{\frac{9}{16}af + \frac{81}{1024}a^2\right\}}$.

Ich will $f = a$ setzen, dann werden diese beiden Werthe

$$x = a\left\{-\frac{9}{32} + \frac{\sqrt{657}}{32}\right\} \text{ und } x = a\left\{-\frac{9}{32} - \frac{\sqrt{657}}{32}\right\}.$$

oder $x = a.\frac{16,63}{32}$ und $x = -a.\frac{34,63}{32}$.

An dieser Stelle, bei D und E (Fig. 5.) ist die Curve mit der Abscissenlinie parallel, und um die Entscheidung zu erhalten, ob hier Gröſste oder Kleinste statt finden, muſs d^2z bestimmt werden. Es ist aber, wenn $f = a$,

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{2}{a} \pm \tfrac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{(a^2 - ax)}}$$ und dieses wird

im ersten Falle, wo $x = a.\frac{16,63}{32}$, in $\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{1}{a}\left\{3 + \frac{3}{4}\sqrt{\frac{32}{15,37}}\right\}$,

im zweiten Falle, wo $x = -a.\frac{34,63}{32}$, in $\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{1}{a}\left\{2 - \frac{3}{4}\sqrt{\frac{32}{66,63}}\right\}$

übergehn, in beiden Fällen also positiv sein, und an beiden Orten ein Kleinstes geben.

Schon daraus, daſs zwei Kleinste vorkommen, läſst sich schlieſsen, daſs auch ein Gröſstes vorkommen muſs, obgleich dieses durch die Gleichung $\frac{dz}{dx} = 0$ nicht angegeben wird. Dieses Gröſste liegt da, wo $x = f$ ist; denn wenn man in der Hauptgleichung $z = \frac{x^2}{a} \pm a\left(\frac{f-x}{a}\right)^{\frac{3}{2}}$, $x = f - v$ setzt und v sehr klein annimmt, so ist beinahe $z = \frac{f^2}{a} - \frac{2fv}{x} \pm \frac{v^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$, und hier kann allemal v so klein angenommen werden, daſs $\frac{v^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$ weniger beträgt als $\frac{2fv}{a}$, daſs also beide Werthe von z kleiner als $\frac{f^2}{a}$ werden; die beiden Aeste der Curve, welche die Ordinate z schneiden, haben also desto gröſsere Ordinaten, je näher $v = 0$ oder $x = f$ ist, und da $x > f$ ein unmögliches z geben würde, so hat z seinen gröſsten Werth wenn $x = f$ ist.

Aber hier ist die Curve nicht mit der Abscissenlinie parallel, indem $\frac{dz}{dx} = \frac{2x}{a} \mp \frac{3}{2}\left(\frac{f-x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$ hier $= \frac{2f}{a}$ wird, und der höchste Punct ist hier ein Rückkehrpunct, A. (Fig. 5.)

Wir hätten diesen auch aus der rational gemachten Hauptgleichung $(az - x^2)^2 = a(f - x)^3$ finden können. Setzt man nämlich hier $x + \Delta x$ und $z + \Delta z$ für x und z,

so wird

$$0 = \begin{cases} 2a^2 z \Delta z + a^2 (\Delta z)^2 \\ -2ax^2 \Delta z - 4ax\Delta x\Delta z - 2a\Delta z (\Delta x)^2 \\ -4azx\Delta x - 2az(\Delta x)^2 \\ +4x^3 \Delta x + 6x^2 (\Delta x)^2 + 4x(\Delta x)^3 + (\Delta x)^4 \end{cases}$$
$$+ 3a(f-x)^2 \Delta x - 3a(f-x)(\Delta x)^2 + a(\Delta x)^3$$

also verschwindet für $x = f$ und $z = \frac{f^2}{a}$ die Summe der Glieder der ersten Ordnung und hier geben die Glieder der zweiten Ordnung $a^2 dz^2 - 4af dx dz + 4f^2 dx^2 = 0$, also $(a dz - 2f dx)^2 = 0$; die Lage der Tangente wird also durch eine Gleichung des zweiten Grades bestimmt, um anzuzeigen, daſs sie einem doppelten Puncte zugehöre, aber erhält doch nur den einen Werth der durch $\frac{dz}{dx} = + \frac{2f}{a}$ angegeben wird.

Hätte ich, um an dieser Stelle die Lage der Sehnen und nicht bloſs der Tangente zu bestimmen, das nächste Glied noch mit in Betrachtung gezogen, so hätte ich

$$0 = a^2 (\Delta z)^2 - 2a\Delta x . \Delta z (2f + \Delta x) + 4f^2 (\Delta x)^2 + (4f + a)(\Delta x^3),$$

also $a\Delta z = (2f + \Delta x)\Delta x \pm \sqrt{\{-a(\Delta x)^3\}}$,

erhalten; woraus erhellt, daſs Δx nothwendig negativ zu nehmen ist, und dann die Lage der beiden Sehnen die von der Spitze A nach nahen Puncten beider Aeste gezogen werden, durch $\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{2f}{a} + \frac{\Delta x}{a} \pm \sqrt{\left(-\frac{\Delta x}{a}\right)}$, angegeben wird. Für kleine Δx ist $\sqrt{\frac{\Delta x}{a}}$ gröſser, als $\frac{\Delta x}{a}$ und die Sehnen weichen also an entgegengesetzten Seiten von der Tangente in A ab, wodurch angezeigt wird, daſs die Aeste sich einander mit den convexen Seiten berühren.

16. Bemerkung. Wenn man die Abscisse x um Δx vergröſsert, so geht der Werth der Ordinate z in

$z' = z + \frac{dz}{dx}\Delta x + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 z}{dx^2}(\Delta x)^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3 z}{dx^3}(\Delta x)^3 + \text{etc.}$ über. Da nun für die berührende grade Linie AZ (Fig. 6) offenbar die Ordinate $z'' = z + \frac{dz}{dx}\Delta x$ ist, so zeigen die folgenden Glieder an, wie hoch die Curve sich über die Tangente erhebt. Beziehen wir diese Betrachtung bloſs auf die zunächst um Z liegenden Puncte, oder setzen wir Δx sehr klein, so kömmt es nur auf das erste jener Glieder an, und wenn dieses positiv ist, so erhebt sich die Curve sowol für ein negatives als für ein positives Δx über die Tangente oder die positiven

Ordinaten der Curve sind gröſser als die der Tangente. Daher kehrt die Curve wenn d^2z positiv ist, da wo sie positive Ordinaten hat, ihre convexe, da wo sie negative Ordinaten hat, ihre concave Seite gegen die Abscissenlinie.

Beispiel. Die Gleichung für die Ellipse $z^2 = b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}$,

giebt $dz = -\frac{b^2 x dx}{a^2 z} = -\frac{b x dx}{a\sqrt{(a^2 - x^2)}}$,

und $d^2 z = -\frac{b\,dx^2}{a.\sqrt{(a^2-x^2)}} - \frac{b x^2 dx^2}{a(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{b\,a\,d\,x^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$,

Hier gehört jedem x ein positiver Werth von z zu, und für diesen ist $d^2 z$ negativ, also der oberhalb der Hauptaxe liegende Bogen der Ellipse liegt der Abscissenlinie näher als die Tangente, ist concav gegen die Abscissenlinie; und jedem x gehört auch ein negatives z zu, womit dann der negative Werth der Wurzelgröſse $(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$ zusammen gehört, wo also der Werth von $d^2 z$ positiv wird, das heiſst der negative Werth von z' wird durch dieses positive Glied vermindert, und die Curve ist hier abermals concav gegen die Axe. Die Curve ist also convex gegen die Abscissenlinie, wenn z und $d^2 z$ gleiche Zeichen haben, concav, wenn sie entgegengesetzte Zeichen haben.

17. Wäre $d^2 z = 0$, so schlösse die Curve sich weit enger, als in den gewöhnlichen Fällen an die Tangente an, und das Glied $\frac{1}{6} \cdot \frac{d^3 z}{dx^3} \Delta x^3$ zeigte dann, wie die Curve sich von der Berührungslinie entfernt.

18. Da wo $d^2 z = 0$ ist und $d^3 z$ nicht $= 0$ wird, hat die Curve einen Wendungspunct, weil diesseits x, oder für ein negatives Δx das Zeichen des Gliedes $\frac{1}{6} \cdot \frac{d^3 z}{dx^3} \Delta x^3$ negativ wird, wenn es für ein positives Δx positiv ist. Würde auch $d^3 z = 0$, so ist ein Wendungspunct nur dann da, wenn auch $d^4 z$ verschwindet und $d^5 z$ nicht verschwindet u. s. w. Wo ein Wendungspunct ist, da schneidet die Tangente die Curve, wie bei *V* Fig. 6.

19. Aufgabe. Zu bestimmen, ob in der Curve (§. 15.) für welche $(az - x^2)^2 = a(a-x)^3$ ist, ein Wendungspunct vorkömmt.

Auflösung. Da $d^2 z = \frac{2dx^2}{a} \pm \frac{3}{4} \frac{dx^2}{\sqrt{(a^2 - ax)}}$ war, so kann nur in dem Aste der Curve, welchem das untere Zeichen zugehört, es sich ereignen, daſs $d^2 z = 0$, oder $\sqrt{(a^2 - ax)} = \frac{3}{8} a$, wird und da war also $x = \frac{55}{64} a$, liegt ein Wendungspunct. Dieser befindet sich also (Fig. 5.) im untern Aste ganz nahe bei der Spitze *A*.

20. Aufgabe. Den Wendungspunct der Curve zu finden, deren Gleichung ist $z = \frac{a}{log. \frac{x}{a}}$. (Fig. 1.)

Auflösung. Da $dz = -\frac{a\,dx}{x\left(log\ \frac{x}{a}\right)^2}$, und

$d^2z = a\,dx^2 \left\{\frac{1}{x^2\left(log.\ \frac{x}{a}\right)^2} + \frac{2}{x^2\left(log.\ \frac{x}{a}\right)^3}\right\}$ ist, so muſs entweder

$1 + \frac{2}{log.\left(\frac{x}{a}\right)} = 0$, oder $x = \infty$, oder $log.\ \frac{x}{a} = \infty$ sein, wenn $d^2z = 0$ werden soll.

Der erste Werth $log\ \frac{x}{a} = -2$, oder $log\ \frac{a}{x} = 2$, oder

$x = \frac{a}{7,389} = 0,\ 1353\ a.\ e^{-2}$, giebt den Wendungspunct an, der also (Fig. 1.) bei F, da liegt, wo $z = -\frac{1}{2}a$ ist. Für $x = \infty$ verschwindet die Krümmung, weil sich der Ast an die Asymptote anschlieſst. Für $x = 0$ würde zwar $log\ \frac{x}{a} = -\infty$, aber es läſst sich leicht zeigen, daſs $x\left(log\frac{x}{a}\right)^n = 0$ wird, wenn $x = 0$ ist.

An jener Stelle, wo $log\ \frac{x}{a} = -2$, wird $\frac{dz}{dx} = -\frac{a}{4x} = -\frac{e^2}{4}$ $= -1,84726 =$ der trig. *Tang.* des Winkels, den die Berührungslinie mit x macht, und dieser ist also $= 61°.\ 34'.\ 19''$.

21. Bemerkung. Die Bestimmung der doppelten oder vielfachen Puncte erhält man, (wie im ersten Th. 11. Abschn. gezeigt ist,) am besten aus der vollständig entwickelten Differenzgleichung. Wenn in dieser die Coefficienten aller Glieder der ersten Ordnung für einen gewissen Punct der Curve verschwinden, so führt dies auf eine höhere Gleichung zu Bestimmung des Quotienten $\frac{dz}{dx}$, und dadurch wird angezeigt, daſs die Berührungslinie hier mehr als eine Lage erhalten muſs, indem jeder der durch den vielfachen Punct gehenden Aeste der Curve eine eigne Tangente hat. Da aber nicht immer diese vollständige Differenzgleichung so gegeben, oder so bequem zu finden ist, so müssen wir hier noch die Hindeutungen auf vielfache und andre merkwürdige Puncte, sofern die Differentialquotienten sie darbieten, kennen lernen.

22. Bemerkung. Im Allgemeinen ist bekanntlich für jede Function z, die von x abhängt, folglich auch hier für die Ordinate z,

$$\Delta z = \frac{dz}{dx}\Delta x + \tfrac{1}{2}\frac{d^2z}{dx^2}\Delta x^2 + \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{d^3z}{dx^3}\Delta x^3 + \frac{1}{1.2.3.4}\cdot\frac{d^4z}{dx^4}\Delta x^4 + \text{etc.}$$

aber es kommen nicht selten einzelne Werthe von x vor, wo Glieder dieser Reihe unendlich werden, und folglich angedeutet wird, dafs diese Taylorsche Reihe an einem solchen einzelnen Puncte der Curve nicht brauchbar ist, und diese Puncte eben sind es, die irgend eine besondre Merkwürdigkeit darbieten. Das erhellt übrigens leicht, dafs wenn $\frac{d^nz}{dx^n}$ unendlich ist, sich auch das nächst höhere Differential als unendlich ergeben wird; denn wenn $\frac{d^nz}{dx^n} = \frac{H}{K}$ unendlich ist, so kann das für einen nicht unendlich entfernten Punct nur dadurch entstehen, dafs $K = 0$ ist; aber dann wird $\frac{d^{n+1}z}{dx^{n+1}} = \frac{KdH - HdK}{K^2}$ gewifs auch als unendlich angegeben.

Beim Kreise zum Beispiel, wo $z = \sqrt{(a^2 - x^2)}$,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-x}{z}, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{-z + \frac{x\,dz}{dx}}{z^2} = \frac{-a^2}{z^3},$$

wird $\frac{dz}{dx} = \infty$ für $z = 0$, und eben da auch $\frac{d^2z}{dx^2} = \infty$ und so weiter.

23. Bemerkung. Um zu zeigen, worauf es beruht, dafs in einzelnen Puncten das Taylorsche Theorem unanwendbar ist, will ich zuerst eine entwickelte Differenzgleichung, worin alle Glieder der ersten, zweiten und dritten Ordnung vorkommen, als gegeben annehmen, und daraus den Werth von Δz herleiten.

Es sei also

$$0 = P\Delta x + Q\Delta z + R\Delta x^2 + S\Delta x\Delta z + T\Delta z^2 + U\Delta x^3 + V\Delta z\Delta x^2 + W\Delta x.\Delta z^2 + X\Delta z^3 + Y,$$

wo Y alle Glieder höherer Ordnungen, auf welche wir bei den Entwickelungen selten kommen werden, andeuten mag. Hier läfst sich leicht zeigen, dafs sich Δz durch $\Delta z = L\Delta x + M\Delta x^2 + N\Delta x^3 + \text{etc.}$ ausdrücken läfst, und die Werthe von L, M, N sich bestimmen lassen. Setze ich nämlich diesen Werth von Δz in alle Glieder jener Gleichung, so wird

$$\begin{array}{llll}
P\Delta x = & P\Delta x & & \\
Q\Delta z = & QL\Delta x & + QM\Delta x^2 & + QN\Delta x^3 + \text{etc.} \\
R\Delta x^2 = & & R\Delta x^2 & \\
S\Delta x\Delta z = & & SL\Delta x^2 & + SM\Delta x^3 + \text{etc.} \\
T\Delta z^2 = & & TL^2\Delta x^2 & + 2TLM\Delta x^3 + \text{etc.} \\
U\Delta x^3 = & & & U\Delta x^3 \\
V\Delta z\Delta x^2 = & & & VL\Delta x^3 + \text{etc.} \\
W\Delta x\Delta z^2 = & & & WL^2\Delta x^3 + \text{etc.} \\
X\Delta z^3 = & & & XL^3\Delta x^3 + \text{etc.}
\end{array}$$

Setzt man hier die Coefficienten jedes einzelnen Gliedes $=0$, so erhält man für jede der Gröſsen L, M, N etc. Werthe, die durch Gleichungen vom ersten Grade ausgedrückt werden, und es ist

$$L = -\frac{P}{Q};\quad M = -\frac{R}{Q} + \frac{SP}{Q^2} - \frac{TP^2}{Q^3};$$

$$N = -\frac{SM}{Q} - \frac{2TLM}{Q} - \frac{U}{Q} - \frac{VL}{Q} - \frac{WL^2}{Q} - \frac{XL^3}{Q};$$

damit ist also Δz leicht zu bestimmen, und es ist zugleich

$$L = \frac{dz}{dx};\ M = \tfrac{1}{2}\frac{d^2z}{dx^2},\ N = \tfrac{1}{6}\frac{d^3z}{dx^3},$$ und so weiter, weil auch

$$\Delta z = \frac{dz}{dx}\Delta x + \tfrac{1}{2}\frac{d^2z}{dx^2}\Delta x^2 + \frac{1}{1.2.3}\frac{d^3z}{dx^3}\Delta x^3 + \text{etc. ist.}$$

24. **Bemerkung.** Hier erhellt nun sogleich, daſs alle Coefficienten der Reihe für Δz in einer unbrauchbaren Form dargestellt werden, wenn in irgend einem Puncte der Curve $Q=0$ ist.

Wir wollen hier zuerst zwei Hauptfälle unterscheiden, nämlich, wenn erstlich P nicht $=0$, und zweitens wenn auſser $Q=0$, auch $P=0$ ist. Der erste Fall deutet bekanntlich an, daſs $\frac{P}{0} = \frac{dz}{dx} = \infty$, die Curve hier gegen die Abscissenlinie senkrecht ist; der zweite Fall deutet auf einen doppelten Punct.

25. **Lehrsatz.** Wenn $Q=0$, aber nicht $P=0$ ist, so läſst sich Δz durch eine Reihe darstellen, in welcher nicht bloſs ganze Potenzen von Δx vorkommen, und wo die niedrigste Potenz einen ächten Bruch zum Exponenten hat.

Beweis. Erster Fall. Es sei die Differenzgleichung

$$0 = P\Delta x + R\Delta x^2 + S\Delta x\Delta z + T\Delta z^2$$
$$+ U\Delta x^3 + V\Delta z\Delta x^2 + W\Delta x\Delta z^2 + X\Delta z^3 + Y,$$

so ergiebt sich leicht, daſs $\Delta z = L\Delta x^{\frac{1}{2}} + M\Delta x + N\Delta x^{\frac{3}{2}} + \text{etc.}$ die Form der Reihe für Δz ist, und L, M, N etc. ergeben sich dann ohne Schwierigkeit, indem man erhält:

$$
\begin{array}{llllll}
P\Delta x = & P\Delta x & & & & \\
R\Delta x^2 = & & & +R\Delta x^2 & & \\
S\Delta x\Delta z = & & +SL\Delta x^{\frac{3}{2}} & +SM\Delta x^2 & + \; SN\Delta x^{\frac{5}{2}} & + \text{etc.} \\
T\Delta z^2 = & TL^2\Delta x & +2TLM\Delta x^{\frac{3}{2}} & +TM^2\Delta x^2 & + \text{etc.} & \\
 & & & +2TLN\Delta x^2 & & \\
U\Delta x^3 = & & & & + \text{etc.} & \\
V\Delta z\Delta x^2 = & & & & + VL\Delta x^{\frac{5}{2}} & + \text{etc.} \\
W\Delta x\Delta z^2 = & & & +WL^2\Delta x^2 & + \text{etc.} & \\
X\Delta z^3 = & & XL^3\Delta x^{\frac{3}{2}} & +3XL^2M\Delta x^2 & + \text{etc.} & \\
Y = & & & Y & &
\end{array}
$$

woraus $L^2 = -\frac{P}{T}$; $M = \frac{-S-XL^2}{2T}$;

$$N = \frac{-R-SM-TM^2-WL^2-3XL^2M-Y}{2TL},$$

und so ferner folgt.

In diesem Falle wird die Entwickelung entweder möglich für ein positives Δx, wenn nämlich $-\frac{P}{T}$ eine positive Gröſse ist, oder möglich für ein negatives Δx, wenn $-\frac{P}{T}$ einen negativen Werth hat. Da nur eines von beiden statt findet, so erstreckt sich die Curve in zwei Aesten nur nach der einen Seite jenes Punctes hin, und der hier statt findende doppelte Werth von Δz wird angegeben durch $\Delta z = \pm\left(-\frac{P\Delta x}{T}\right)^{\frac{1}{2}} + M\Delta x \pm \frac{N}{L^3}\left(-\frac{P\Delta x}{T}\right)^{\frac{3}{2}} + \text{etc.}$

Beispiel. Es sei $a^2 = x^2 + z^2$, also $2x\Delta x + 2z\Delta z + \Delta x^2 + \Delta z^2 = 0$, so wird für $z = 0$, $P = 2x = 2a$, $Q = 0$,
$R = T = 1$, $S = 0$, also $\Delta z = \surd(-2a\Delta x) - \frac{1}{2}\Delta x . \surd - \frac{\Delta x}{2a}$
und eben den Werth würde man aus $\Delta z^2 = -2a\Delta x - \Delta x^2$ erhalten, welches $\Delta z = \sqrt{-2a\Delta x} - \frac{1}{2}\frac{\Delta x^2}{\sqrt{-2a\Delta x}} + \text{etc.}$ giebt.

Diese Bestimmungen gelten für den Kreis an der Stelle, wo er senkrecht gegen x ist.

Zweiter Fall. Es sei $T = 0$, so läſst sich die vorige Entwickelung nicht gebrauchen. Aber der Gleichung
$0 = P\Delta x + R\Delta x^2 + S\Delta x\Delta z + U\Delta x^3 + V\Delta z\Delta x^2 + W\Delta x\Delta z^2 + X\Delta z^3 + Y,$

entspricht offenbar die Form $\Delta z = L\Delta x^{\frac{1}{3}} + M\Delta x^{\frac{2}{3}} + N\Delta x + \text{etc.}$
welche giebt:

$$\begin{aligned}
P\Delta x &= P\Delta x \\
R\Delta x^2 &= \qquad\qquad\qquad\qquad + \text{etc.} \\
S\Delta x\Delta z &= \qquad SL\Delta x^{\frac{4}{3}} + SM\Delta x^{\frac{5}{3}} + \text{etc.} \\
U\Delta x^3 &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \text{etc.} \\
V\Delta z\Delta x^2 &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \text{etc.} \\
W\Delta x\Delta z^2 &= \qquad\qquad WL^2\Delta x^{\frac{5}{3}} + \text{etc.} \\
X\Delta z^3 &= XL^3\Delta x + 3XL^2M\Delta x^{\frac{4}{3}} + 3XM^2L\Delta x^{\frac{5}{3}} + \text{etc.} \\
&\qquad\qquad\qquad + 3XL^2N\Delta x^{\frac{5}{3}}
\end{aligned}$$

also $L^3 = -\frac{P}{X}$; $M = -\frac{S}{3LX}$; $N = -\frac{SM - WL^2 - 3XM^2L}{3XL^2}$.
Hier erhalten die Glieder der Differenzreihe sowohl für positive als negative Δx mögliche Werthe, aber jedem Δx gehört nur ein Werth zu.

Beispiel. Für die Parabel deren Gleichung $z^3 - p^2x = 0$ ist, erhalten wir die Differenzgleichung

$$a \quad p^2\Delta x - 3z^2\Delta z - 3z\Delta z^2 - \Delta z^3 = 0,$$

welche für $z = 0$ giebt $\Delta z = \sqrt[3]{p^2\Delta x}$

Wenn auch $X = 0$ gewesen wäre, so hätte man die Glieder der vierten Ordnung in Betrachtung zu ziehen. Allgemein aber erhellt, dafs hier die Curve in dem Puncte wo $Q = 0$ ist, eine gegen die Abscissenlinie senkrechte Richtung hat, und dafs sie, wenn die Exponenten von Δx im Werthe des Δz Brüche mit graden Nennern sind, mit beiden Aesten sich als einerlei Abscissen zugehörend über der Abscissenlinie hin erstreckt, hingegen mit beiden Aesten nach verschiedenen Seiten fortgeht, wenn die Nenner der Exponenten ungrade Zahlen sind.

26. Lehrsatz. Wenn zugleich $P = Q = 0$ ist, so findet im Allgemeinen die Entwickelung $\Delta z = L\Delta x + M\Delta x^2 + N\Delta x^3 + \text{etc.}$ statt, aber die Coefficienten erhalten doppelte oder vielfache Werthe, und deuten damit auf mehrere durch diesen Punct gehende Aeste hin.

Beweis. Es sei

$$\begin{aligned}
0 = {} & R\Delta x^2 + S\Delta x\Delta z + T\Delta z^2 \\
& + U\Delta x^3 + V\Delta z\Delta x^2 + W\Delta x\Delta z^2 + X\Delta z^3,
\end{aligned}$$

so giebt die angenommene Form $\Delta z = L\Delta x + M\Delta x^2 + N\Delta x^3 + \text{etc.}$

$$R\Delta x^2 = \quad R\Delta x^2$$
$$S\Delta x\Delta z = \quad SL\Delta x^2 + SM\Delta x^3 + SN\Delta x^4 + \text{etc.}$$
$$T\Delta z^2 = \quad TL^2\Delta x^2 + 2TLM\Delta x^3 + TM^2\Delta x^4 + 2TLN\Delta x^4 + \text{etc.}$$

$$U\Delta x^3 = \quad U\Delta x^3$$
$$V\Delta z\Delta x^2 = \quad VL\Delta x^3 + VM\Delta x^4 + \text{etc.}$$
$$W\Delta x\Delta z^2 = \quad WL^2\Delta x^3 + 2WLM\Delta x^4 + \text{etc.}$$
$$X\Delta z^3 = \quad XL^3\Delta x^3 + 3XL^2M\Delta x^4 + \text{etc.}$$

also $L^2 + \frac{SL}{T} = -\frac{R}{T}$ oder $L = -\frac{S}{2T} \pm \sqrt{\left(\frac{S^2-4RT}{4T^2}\right)}$,

$M = \frac{-U-VL-WL^2-XL^3}{S+2TL}$, also wenn ich

$\sqrt{(S^2-4RT)} = Z$ nenne, $L = \frac{-S \pm Z}{2T}$;

$$M = \frac{-U-VL-WL^2-XL^3}{\pm Z};$$

$$N = \frac{-TM^2-VM-2WLM-3XL^2M}{\pm Z};$$

wo im Werthe von N auch die Glieder der vierten Ordnung vorkommen könnten.

Etwas Aehnliches würde sich finden, wenn für einen dreifachen Punct die Glieder der zweiten Ordnung verschwinden.

Diese Entwickelung findet also im Allgemeinen keine Schwierigkeit; aber eine neue Schwierigkeit tritt ein, wenn $Z = 0$ ist.

27. Bemerkung. Aber eben die Voraussetzung $Z = 0$, macht aus dem doppelten Puncte einen Rückkehrpunct, statt dafs es ein Knoten war, wenn nicht $Z = 0$ ist. In diesem letztern Falle nämlich erhalten beide Berührungslinien in dem zu betrachtenden Puncte verschiedene Lagen, da die trigonometrischen Tangenten der Winkel unter welchen sie gegen die Abscissenlinie geneigt sind, durch $\frac{-S+\sqrt{(S^2-4RT)}}{2T}$ und durch $\frac{-S-\sqrt{(S^2-4RT)}}{2T}$ ausgedrückt werden. Im ersten Falle haben beide Aeste eine und dieselbe Berührungslinie, wie es bei den zwei Aesten, die eine Spitze bilden, der Fall ist.

28. Beispiel. Für die Lemniscata war, (1. Th. §. 391. Fig. 105.) $(z^2+x^2)^2 + 2a^2(z^2-x^2) = 0$, und die leicht zu entwickelnde Differenzgleichung ist in dem Puncte, wo $x = z = 0$ ist,

$$-2a^2\Delta x^2 + 2a^2\Delta z^2 + \Delta x^4 + \Delta z^4 + 2\Delta x^2\Delta z^2 = 0,$$

hier also ist $\Delta z = \pm\Delta x + 0\Delta x^2 \mp \frac{1}{a^2}\Delta x^3 + \text{etc.}$

und es erhellt, erstlich, weil $\frac{dz}{dx} = \pm 1$ der Coefficient von Δx ist, daſs die beiden Aeste hier unter dem Winkel von 45 und 135 Grad gegen die Abscissenlinie geneigt sind, zweitens weil der zweite Coefficient $= 0 = \frac{d^2 z}{dx^2}$ ist, daſs hier ein Wendungspunct liegt, drittens zeigt der Coefficient $\mp \frac{1}{a^2}$ an, daſs beide Theile der Curve sich zwischen der Berührungslinie und Abscissenlinie befinden, indem für ein positives Δx, der Werth von Δz an der positiven Seite $= + \Delta x - \frac{\Delta x^3}{a^2}$, und an der negativen Seite $= - \Delta x + \frac{\Delta x^3}{a^2}$ ist, und so auch für die negativen Δx.

29. Beispiel. Wenn man aus der Gleichung $z^3 + x^2 z - axz + bx^2 = 0$, die Differenzgleichung sucht (1. Theil. §. 414. Fig. 107.), und sie sogleich auf den Punct anwendet, wo $x = z = 0$ ist, so wird die Differenzgleichung $b \Delta x^2 - a \Delta x \Delta z + \Delta z^3 + \Delta z \Delta x^2 = 0$, also nach unsern Bezeichnungen $P = Q = 0$, $R = b$, $S = - a$, $T = 0$, $U = 0$, $V = +1$, $W = 0$, $X = +1$, daher $L = \frac{+a \pm \sqrt{(a^2 - 4bT)}}{2T}$, und $M = \frac{-L - L^3}{\pm a}$. Hier erhält L einen doppelten Werth, der eine ist gewiſs $L = \infty$, nämlich $= \frac{2a}{2T}$, wo $T = 0$ ist, der andre ist $\frac{a - \sqrt{(a^2 - 4bT)}}{2T} = \frac{a - a + \frac{2bT}{a}}{2T}$, wenn T sehr klein ist, nähert sich also immer mehr dem Werthe $= \frac{b}{a}$. Für den letztern Theil der Curve nämlich den Ast HAD ist also in A (erster Th. Fig. 107.) $\Delta z = \frac{b}{a} \Delta x + \left(\frac{b}{a^2} + \frac{b^3}{a^4}\right) \Delta x^2 +$ etc., und dieser Ast liegt ganz so, daſs z gröſser ist für die Curve als für die Berührungslinie. Für den andern Ast SAM findet die Entwickelung nach dem Taylorschen Theorem keine Anwendung; aber wenn man $\Delta z = L' \Delta x^{\frac{1}{2}} + M' \Delta x + N' \Delta x^{\frac{3}{2}} +$ etc. setzt, so erhält man aus der gegebenen Differenzreihe in diesem Puncte:

$$
\begin{aligned}
b\Delta x^2 &= b\Delta x^2\\
-a\Delta x\Delta z &= -aL'\Delta x^{\frac{3}{2}} - aM'\Delta x^2 - aN'\Delta x^{\frac{5}{2}} - \text{etc.}\\
+\Delta z\Delta x^2 &= + L'\Delta x^{\frac{5}{2}} + \text{etc.}\\
\Delta z^3 &= L'^3\Delta x^{\frac{3}{2}} + 3L'^2M'\Delta x^2 + 3L'^2N'\Delta x^{\frac{5}{2}}\\
&\quad + 3L'M'^2\Delta x^{\frac{5}{2}} + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

also $L'^2 = a$; $M' = \frac{b}{a - 3L'^2} = -\frac{b}{2a}$;

$$N' = \frac{L' + 3L'M'^2}{a - 3L'^2} = \frac{\pm\sqrt{a} \pm \frac{3b^2\sqrt{a}}{4a^2}}{-2a},$$ so daſs hier

$$\Delta z = \pm\sqrt{a\Delta x} - \frac{b\Delta x}{2a} \mp \frac{1 + \frac{3b^2}{4a^2}}{2a}.\Delta x.\sqrt{a\Delta x} + \text{etc.}$$

wird. Dieser Ast der Curve erstreckt sich nur nach der Seite, wo Δx positiv ist, befindet sich da aber sowohl oberhalb als unterhalb der Abscissenlinie.

30. Bemerkung. Aehnliche Bestimmungen fänden bei Knoten statt, wo drei Aeste der Curve einander durchschneiden. Da würde in dem Werthe $\Delta z = L\Delta x + M\Delta x^2 + \text{etc.}$ L durch eine Gleichung des dritten Grades ausgedrückt werden, und die drei Werthe, welche L erhielte, würden die Lage der drei Aeste angeben. Würden unter diesen drei Werthen zwei einander gleich, so würde auch da entweder eine Spitze gebildet, oder zwei Aeste würden einander berühren, und sich nach beiden Seiten weiter erstrecken, und die Betrachtungen, die wir jetzt in Beziehung auf zwei Aeste, welche eine Spitze bilden, anstellen werden, würden auch da auf eine ähnliche Art Anwendung finden.

31. Wenn (§. 26.) $Z = 0$ ist, also beide Werthe von L gleich werden, so scheint M unendlich, N unendlich und so weiter zu werden, und daraus erhellt, daſs dann die Entwickelung nach Potenzen mit ganzen Exponenten nicht mehr statt findet. Es kann da freilich die Ausnahme vorkommen, daſs der dort gefundene Werth von M,

$$M = \frac{-U - VL - WL^2 - XL^3}{\pm Z},$$

$$\text{oder } M = \frac{-U + \frac{VS}{2T} - \frac{WS^2}{4T^2} + \frac{XS^3}{8T^3}}{\pm Z} - \frac{V}{2T} + \frac{2WS}{4T^2} - \frac{3XS^2}{8T^3}$$
$$\mp\left(\frac{WZ}{4T^2} - \frac{3XSZ}{8T^3} \pm \frac{XZ^2}{8T^3}\right);$$

nur unbestimmt, nicht unendlich wird, nämlich dann, wenn

$$-U+\frac{VS}{2T}-\frac{WS^2}{4T^2}+\frac{XS^3}{8T^3}=0 \text{ ist.}$$

In diesem Falle träten die unendlichen Werthe erst für N und die folgenden ein, ja es könnte sein, dafs auch N nur unbestimmt würde, und erst bei dem nächsten Gliede sich unendliche Werthe ergäben. Gleichwohl wäre dies immer eine deutliche Anzeige, dafs die Entwickelung nicht nach Potenzen mit ganzen Exponenten fortgehen könnte, sondern entweder

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta x^{\frac{m+n}{m}} + C\Delta x^{\frac{m+2n}{m}} + \text{etc.}$$

oder $\Delta z = A\Delta x + B\Delta x^2 + C\Delta x^{\frac{2m+n}{m}} + \text{etc.}$
oder auf ähnliche Art ausgedrückt würde.

32. **Lehrsatz.** Wenn in der vollständigen Differenzreihe (§. 23.) nicht blofs $P=Q=0$, sondern zugleich auch $S^2=4RT$ ist, so läfst sich Δz nicht mehr durch eine nach den ganzen Potenzen von Δx fortgehende Reihe ausdrücken, sondern wenn sie auch mit ganzen Potenzen anfängt, so folgen doch darauf Potenzen mit Bruch-Exponenten, die gröfser als 1 sind.

Beweis. Wenn in §. 26. $Z=0$ oder $S^2=4RT$ ist, also die Differenzgleichung folgende Form hat,

$$0=R\Delta x^2+S\Delta z\Delta x+\frac{S^2}{4R}\Delta z^2+U\Delta x^3+V\Delta x^2\Delta z+W\Delta x\Delta z^2+X\Delta z^3+Y$$

so läfst sich zeigen, dafs $\Delta z=A\Delta x+B\Delta x^{\frac{3}{2}}+C\Delta x^2+D\Delta x^{\frac{5}{2}}+\text{etc.}$
wird. Denn dieser Werth giebt

$$R\Delta x^2=R\Delta x^2$$

$$S\Delta z\Delta x = SA\Delta x^2+SB\Delta x^{\frac{5}{2}}+SC\Delta x^3+SD\Delta x^{\frac{7}{2}}+$$

$$\frac{S^2}{4R}\Delta z^2=\frac{S^2}{4R}A^2\Delta x^2+2AB\frac{S^2}{4R}\Delta x^{\frac{5}{2}}+2AC.\frac{S^2}{4R}\Delta x^3+2AD.\frac{S^2}{4R}\Delta x^{\frac{7}{2}}+$$

$$+\frac{B^2S^2}{4R}\Delta x^3+2BC.\frac{S^2}{4R}\Delta x^{\frac{7}{2}}+$$

$$U\Delta x^3= \qquad U\Delta x^3$$

$$V\Delta z\Delta x^2= \qquad VA\Delta x^3+VB\Delta x^{\frac{7}{2}}+$$

$$W\Delta z^2\Delta x= \qquad WA^2\Delta x^3+2WAB.\Delta x^{\frac{7}{2}}+$$

$$X\Delta z^3= \qquad XA^3\Delta x^3+3XA^2B\Delta x^{\frac{7}{2}}+$$

$$Y= \qquad Y$$

und hieraus wird $A = -\frac{2R}{S}$. Der Coefficient des zweiten Gliedes führt zu keiner neuen Bestimmung; im dritten Gliede heben sich die mit C multiplicirten Theile auf, aber es wird nun $B^2 = -\frac{4R}{S^2}\,(U + AV + A^2W + A^3X)$, und ferner $C = -\frac{2R}{S^2}\,(V + 2AW + 3A^2X)$ und so würden auch die folgenden durch Gleichungen des ersten Grades gefunden.

Wenn B^2 positiv ist, so wird $B\triangle x^{\frac{1}{2}}$ möglich nur für positive $\triangle x$; wenn B^2 negativ ist, so wird $B\triangle x^{\frac{1}{2}}$ möglich nur für negative $\triangle x$; und darin, daſs beide Aeste der Curve sich entweder nach der Richtung der positiven, oder nach der Richtung der negativen x nicht über den betrachteten Punct hinaus erstrecken, und zugleich eine gemeinschaftliche Tangente haben, liegt die Ueberzeugung, daſs hier ein Rückkehrpunct, eine Spitze ist.

Diese allgemeine Betrachtung schlieſst auch den, im §. 31. als Ausnahme angegebenen Fall in sich, wo das dortige M durch $\frac{0}{0}$ ausgedrückt wird. Da alsdann $U - \frac{2RV}{S} + \frac{4R^2W}{S^2} - \frac{8R^3X}{S^3} = 0$ sein soll, weil hier $T = \frac{S^2}{4R}$, so ist in unsrer Betrachtung $B = 0$, und C könnte aus dem Coefficienten von $\triangle x^{\frac{7}{2}}$ nicht bestimmt werden. Um hier die Bestimmung zu erhalten, müſsten wir also weiter gehn, eben deshalb aber auch die Glieder des vierten Grades in Betrachtung ziehen. Es sei also die Differenzgleichung

$$0 = R\triangle x^2 + S\triangle z\triangle x + \frac{S^2}{4R}\triangle z^2 + U\triangle x^3 + V\triangle x^2\triangle z + W\triangle x\triangle z^2 + X\triangle z^3$$
$$+ \alpha\triangle x^4 + \beta\triangle x^3\triangle z + \gamma\triangle x^2\triangle z^2 + \delta\triangle x\triangle z^3 + \varepsilon\triangle z^4 + Y$$

und es wird sich nun leicht zeigen lassen, daſs $\triangle z$ sich durch

$$\triangle z = A\triangle x + C\triangle x^2 + D\triangle x^{\frac{5}{2}} + E\triangle x^3 + F\triangle x^{\frac{7}{2}} + \text{etc.}$$

ausdrücken lasse. Man erhält nämlich:

$$R\triangle x^2 = R\triangle x^2$$

$$S\triangle z\triangle x = AS\triangle x^2 + CS\triangle x^3 + DS\triangle x^{\frac{7}{2}} + ES\triangle x^4 + FS\triangle x^{\frac{9}{2}} + \text{etc.}$$

$$\frac{S^2}{4R}\triangle z^2 = \frac{S^2}{4R}A^2\triangle x^2 + \frac{S^2}{4R}2AC\triangle x^3 + \frac{S^2}{4R}2AD.\triangle x^{\frac{7}{2}} + \frac{S^2}{4R}2AE\triangle x^4$$

$$+ \frac{S^2}{4R}2AF\triangle x^{\frac{9}{2}}$$

$$+ \frac{S^2}{4R}C^2\triangle x^4 + \frac{S^2}{4R}2CD\triangle x^{\frac{9}{2}} +$$

$$U\triangle x^3 = U\triangle x^3$$

$$V\triangle x^2\triangle z = AV\triangle x^3 + \quad + VC\triangle x^4 + VD\triangle x^{\frac{9}{2}} +$$

$$W\triangle x.\triangle z^2 = A^2W\triangle x^3 + \quad + 2AWC\triangle x^4 + 2AWD\triangle x^{\frac{9}{2}} +$$

$$X\triangle z^3 = A^3X\triangle x^3 \quad + 3A^2XC\triangle x^4 + 3A^2XD\triangle x^{\frac{9}{2}} +$$

$$\alpha\triangle x^4 = \alpha\triangle x^4$$

$$\beta\triangle x^3\triangle z = \beta A\triangle x^4 +$$

$$\gamma\triangle x^2\triangle z^2 = \gamma A^2\triangle x^4 + \quad + \text{etc.}$$

$$\delta\triangle x\triangle z^3 = \delta A^3\triangle x^4 + \quad + \text{etc.}$$

$$\varepsilon\triangle z^4 = \varepsilon A^4\triangle x^4 + \quad + \text{etc.}$$

Hier wird wieder $A = -\frac{2R}{S}$; aber die Coefficienten von $\triangle x^3$, und $\triangle x^{\frac{7}{2}}$ verschwinden dann von selbst, und C wird durch eine Gleichung vom zweiten Grade aus dem Coefficienten von $\triangle x^4$ bestimmt. In Beziehung auf die Bestimmung des D kann nun ein doppelter Fall eintreten, entweder daſs der Coefficient von $\triangle x^{\frac{9}{2}}$ durch jenen Werth von C von selbst verschwindet, dann bleibt hier D unbestimmt, und wird erst durch den Coefficienten von $\triangle x^5$ gefunden; oder daſs der Coefficient von $\triangle x^{\frac{9}{2}}$ nicht von selbst verschwindet, dann muſs $D = 0$ sein, und E wird durch den Coefficienten von $\triangle x^5$ bestimmt. Und so geht es weiter fort.

33. Wenn wir die geometrische Bedeutung jener eben betrachteten Entwickelungen untersuchen, so läſst sich leicht folgendes übersehen. Wenn $\triangle z = A\triangle x + B\triangle x^{\frac{3}{2}} + C\triangle x^2 + \text{etc.}$ ist, so hat offenbar das Glied $B\triangle x^{\frac{3}{2}}$ wegen des Wurzelzeichens einen doppelten Werth; und da für die berührende grade Linie $\triangle z = A\triangle x$ ist, so liegen die beiden Aeste der krummen Linie so, daſs für den einen $\triangle z = A\triangle x + B\triangle x^{\frac{3}{2}}$,

für den andern $\triangle z = A\triangle x - B\triangle x^{\frac{3}{2}}$,

die Lage der zunächst benachbarten Puncte ausdrückt; diese liegen also für den einen Ast an der einen, für den andern Ast an der andern Seite der Berührungslinie, und die Spitze ist eine Spitze der ersten Art, das heiſst, eine

Spitze, wo beide Aeste sich mit den convexen Seiten berühren. Wäre hier $A=0$ so wäre die Tangente beider Aeste mit der Abscissenlinie parallel.

34. Wenn dagegen $\Delta z = A\Delta x + C\Delta x^2 + D\Delta x^{\frac{5}{2}} +$ etc. so hat zwar das dritte Glied einen doppelten Werth; aber beide Aeste der Curve liegen zunächst an der Spitze an einerlei Seite der Berührungslinie, weil

$$\Delta z = A\Delta x + C\Delta x^2 + D\Delta x^{\frac{5}{2}} + \text{etc.}$$

$$\text{und } \Delta z = A\Delta x + C\Delta x^2 - D\Delta x^{\frac{5}{2}} + \text{etc.}$$

offenbar für sehr kleine Δx sowohl im einen als im andern Falle gröſser als $A\Delta x$ ist. Hier ist also eine Spitze, wo beide Aeste an einerlei Seite der Tangente liegen; sie heiſst eine Spitze der zweiten Art, und ihre beiden Aeste berühren sich so innig, daſs der Abstand beider von einander erst durch das Glied $D\Delta x^{\frac{5}{2}}$ ausgedrückt wird.

35. Beispiel. Im 15. §. betrachteten wir die Curve, deren Gleichung $(az - x^2)^2 = a(f - x)^3$ ist. Für diese wird die vollständige Differenzgleichung

$$0 = \left.\begin{array}{l} 2a^2 z\Delta z + a^2\Delta z^2 \\ -2ax^2\Delta z \\ -4azx\Delta x - 4ax\Delta z\Delta x \\ \qquad\qquad - 2az\Delta x^2 \quad -2a\Delta z\Delta x^2 \\ +4x^3\Delta x \quad + 6x^2\Delta x^2 \quad + \quad 4x\Delta x^3 + \Delta x^4 \\ +3af^2\Delta x \\ -6afx\Delta x - 3af\Delta x^2 \\ +3ax^2\Delta x + 3ax\Delta x^2 \quad + \quad a\Delta x^3. \end{array}\right\}$$

Für den Punct, wo $x=f$ und $z=\frac{f^2}{a}$ ist, geht diese Gleichung in

$$0 = 4f^2\Delta x^2 - 4af\Delta x\Delta z + a^2\Delta z^2 + (a+4f)\Delta x^3 - 2a\Delta z\Delta x^2 + \Delta x^4$$

über, oder in $(2f\Delta x + \Delta x^2 - a\Delta z)^2 = -a\Delta x^3$;

es wird also $\Delta z = \frac{2f}{a}\Delta x \pm \Delta x\sqrt{\frac{-\Delta x}{a} + \frac{\Delta x^2}{a}}$.

In dem erwähnten Puncte ist also die Lage der Berührungslinie durch $\frac{dz}{dx} = \frac{2f}{a}$ bestimmt, und sie wird an ihren beiden Seiten von den beiden Aesten der Curve berührt. §. 15. Fig. 5.

36. Beispiel. Wäre dagegen $(az - x^2)^2 = \frac{(f-x)^5}{a}$, so würde auch hier für $x=f$, $z=\frac{f^2}{a}$, und die Differenzgleichung würde für diesen Punct

$$0 = 4f^2 \Delta x^2 - 4af\Delta z \Delta x + a^2 \Delta z^2 - 2a\Delta z \Delta x^2 + 4f\Delta x^3 + \Delta x^4 + \frac{\Delta x^5}{a};$$

und $\Delta z = \frac{2f}{a}\Delta x + \frac{\Delta x^2}{a} \pm \frac{\Delta x^2}{a}\sqrt{\frac{-\Delta x}{a}}$;

und hier ist also $\Delta z = A\Delta x + B\Delta x^2 \pm C\Delta x^{\frac{5}{2}}$.

Die Curve hat also in dem Puncte, wo $x = f$ ist, ebenso wie die in Fig. 5. dargestellte Linie, bei A eine Spitze, die Tangente ist auch bei ihr in A so geneigt, dafs $\frac{dz}{dx} = \frac{2f}{a}$ ist, aber beide Aeste der Curve berühren nun an der obern Seite der Berührungslinie, indem der eine sich um so viel als

$$\frac{\Delta x^2}{a} + \frac{\Delta x^2}{a}\sqrt{\frac{-\Delta x}{a}} \text{ ausdrückt,}$$

der andre um so viel als $\frac{\Delta x^2}{a} - \frac{\Delta x^2}{a}\sqrt{\frac{-\Delta x}{a}}$ ausdrückt, von der Berührungslinie entfernt.

37. Bemerkung. Auch die Fälle, wo alle Glieder der zweiten Ordnung fehlten, würden alsdann hieher gehören, wenn unter den Tangenten an dem dreifachen oder vielfachen Puncte zwei zusammen fielen. Ich theile die Entwickelungen dafür nicht mit, da sie dem Wesentlichen nach sich aus dem Vorigen wohl übersehen lassen.

38. Bemerkung. Unter den hier betrachteten Fällen scheint noch der zu fehlen, wo Δz nicht wie in §. 25. durch

$$\Delta z = L\Delta x^{\frac{1}{m}} + M\Delta x^{\frac{2}{m}} + \text{etc.}$$

sondern durch $\Delta z = G\Delta x^{\frac{n}{m}} + H\Delta x^{\frac{n+r}{m}} + I\Delta x^{\frac{n+2r}{n}} + \text{etc.}$

ausgedrückt würde, und $\frac{n}{m} < 1$ ist. In einem solchen Puncte ist ebenso wie in §. 25. die Curve senkrecht gegen die Abscissenlinie, aber sie kann nun zugleich einen doppelten Punct dort haben und eine Spitze bilden. Die Betrachtung dieses Falles ist aber als schon in §. 32. mit eingeschlossen anzusehen; wenn man nämlich diesen in dem ganzen Umfange nimmt, den er nach §. 37. haben sollte, denn die Umkehrung der Reihe würde geben

$\Delta x = A\Delta z^{\frac{m}{n}} + B.\Delta z^{\frac{m+r}{n}} + C\Delta z^{\frac{m+2r}{n}} + \text{etc.}$ und Δx würde also durch eine Reihe ausgedrückt, in welcher die erste Potenz von Δz fehlt, und nur Bruchpotenzen vorkommen, deren Exponenten gröfser, als 1 sind. Welche Form an solcher Stelle die Curve haben wird, läfst sich nun leicht bestimmen.

39. **Lehrsatz.** Wenn in einem Puncte der Curve die Differenzreihe für Δz in ihrem ersten Gliede eine Potenz von Δx hat, deren Exponent kleiner als 1 ist, so ist die Curve hier senkrecht auf die Abscissenlinie, und der Differentialquotient $\frac{dz}{dx}$ erscheint als unendlich. Ist dieser niedrigste Exponent ein Bruch von der Form $\frac{2n+1}{2m}$, so ist Δz entweder für negative Δx oder für positive Δx unmöglich, solange Δx sehr klein ist; die Curve erstreckt sich also von jenem Puncte an entweder nur nach der Richtung der wachsenden oder nach der Richtung der abnehmenden Abscisse wie Fig. 14. bei S. Ist dieser niedrigste Exponent von der Form $\frac{2n}{2m+1}$, so hat die Curve, wie bei T (Fig. 14.), eine Spitze der ersten Art, weil für sehr kleine Δx die Werthe von Δz gleich ausfallen für positive und negative Δx. Ist endlich der niedrigste Exponent von der Form $\frac{2n+1}{2m+1}$ so ist in dem Puncte, wo das statt findet, ein Wendungspunct (wie bei U, Fig. 14.), weil den positiven Δx ein Werth für Δz entspricht, der dem, welcher mit negativen Δx zusammen gehört, entgegengesetzt ist.

Beispiele geben die Parabeln höherer Ordnungen, nämlich $z=p^{+\frac{1}{4}} x^{\frac{3}{4}}$ für den ersten Fall, (vergl. im ersten Theile Fig. 98. §. 322.); für den zweiten Fall $z=p^{\frac{3}{5}}.\ x^{\frac{2}{5}}$. (im 1. Th. Fig. 99. §. 323.); für den dritten Fall $z=p^{\frac{4}{5}}.\ x^{\frac{1}{5}}$ (im 1. Th. Fig. 100. §. 324.)

40. In allen diesen Fällen scheint zwar auch $\frac{d^2 z}{dx^2}$ unendlich zu werden, aber man darf daraus nicht schliessen, dass die Abweichung der Curve von der Tangente sehr gross werde.

41. **Lehrsatz.** Wenn die Differenzreihe mit der ersten Potenz anfängt, aber dann sogleich gebrochene Exponenten folgen, wie

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta x^{\frac{n+m}{n}} + C\Delta x^{\frac{n+2m}{n}} + \text{etc.}$$

so hat die Curve allemal an diesem Puncte eine unter dem Winkel $\varphi = Ang.\ tang.\ \frac{dz}{dx} = Ang.\ tang.\ A.$ geneigte Tangente, und es liegt 1. die Curve ganz an einer Seite der Berührungslinie wie bei *V* Fig. 15. wenn $m+n$ eine grade und n eine ungrade Zahl ist; 2. die Curve hat eine Spitze, deren beide Aeste die Tangente an verschiedenen Seiten berühren, wenn $m+n$ ungrade und n grade ist, wie bei *W* Fig. 15. 3. Die Curve hat einen Wendungspunct, wie bei *X* Fig. 15. wenn $m+n$ und n zugleich ungrade Zahlen sind.

Beweis. Im ersten Falle ist für ein positives Δx $\Delta z = A\Delta x + B\Delta x^{\frac{n+m}{n}} +$ etc., also der nach der Richtung der Ordinate gemessene Abstand von der Tangente $= + B\Delta x^{\frac{n+m}{n}}$; für ein negatives Δx, $\Delta z = - A\Delta x + B\Delta x^{\frac{n+m}{n}}$, also der nach der Richtung der Ordinate gemessene Abstand von der Tangente $= + B\Delta x^{1+\frac{m}{n}}$, wenn man für kleine Δx die höhern Glieder wegläſst; beide Entfernungen haben einerlei Zeichen, wenn $\frac{m+n}{n}$ ein Bruch ist, dessen Nenner eine ungrade, und dessen Zähler eine grade Zahl ist. Der Beweis für die übrigen Fälle erhellt dann leicht.

42. Lehrsatz. Wenn für irgend einen Punct der Curve der Werth von Δz so ausgedrückt wird, daſs die niedrigsten Glieder die erste und zweite Potenz von Δx enthalten, dann aber Potenzen mit gebrochenen Exponenten folgen, deren ersten ich $= \frac{2n+m}{n}$ setze: so ist die Curve in der Nähe dieses Punctes allemal ganz an einerlei Seite der Tangente; sie hat aber eine Spitze der zweiten Art, wenn n eine grade Zahl ist.

Beweis. Da $\Delta z = A\Delta x + B\Delta x^2 + C\Delta x^{\frac{2n+m}{n}} +$ etc. ist, so drückt $B\Delta x^2$ mit gleichem Zeichen den nach der Richtung der Ordinate gemessenen Abstand von der Tangente aus, es mag Δx positiv oder negativ sein, wofern die Curve sich nach beiden Richtungen hin erstreckt. Sie erstreckt sich aber nur nach der einen Richtung, wenn die Exponenten der folgenden Glieder grade Zahlen zu Nennern haben, weil dann diese Glieder nur entweder für $+\Delta x$ oder für $-\Delta x$ möglich werden. Im letzten Falle sind es slso zwei Aeste, die beide an einer Seite der Tangente liegen und für welche $\Delta z = A\Delta x + B\Delta x^2 \pm C\Delta x^{\frac{2n+m}{m}} +$ etc. wird.

43. Bemerkung. Diese Betrachtungen zeigen nun wohl, wie auch die höhern Differentiale dadurch, daſs sie in gewissen Puncten unendlich werden, uns die merkwürdigen Puncte der Curve kennen lehren.

Ist $\Delta z = A\Delta x^{\frac{m}{n}} +$ etc. und $\frac{m}{n} < 1$, so ist $\frac{dz}{dx} = A\,dx^{\frac{m}{n}-1}$, unendlich, weil $\frac{m}{n} - 1$ ein negativer Exponent ist, und alle höhern Differentialquotienten werden nun auch als unendlich in Vergleichung gegen die zugehörigen Potenzen von dx angegeben.

Wenn $\Delta z = A\Delta x + B\Delta x^{\frac{n+m}{n}}$ + etc. ist, so wird
für die Abscisse $= x$ die Ordinate $= z$;

für die Abscisse $= x+\Delta x$, die Ordinate $= z + A\Delta x + B\Delta x^{\left(1+\frac{m}{n}\right)} +$

für die Abscisse $= x+2\Delta x$, die Ordinate $= z + 2A\Delta x + B(2\Delta x)^{1+\frac{m}{n}} +$
also die zwei ersten Glieder der ersten Differenzreihe

$$A\Delta x + B\Delta x^{\left(1+\frac{m}{n}\right)} +$$

$$\text{und } A\Delta x + \left(2^{\frac{n+m}{n}} - 1\right) B.\,\Delta x^{1+\frac{m}{n}} +$$

und das erste Glied der zweiten Differenzreihe $= \left(2^{\frac{n+m}{n}} - 2\right) B.\,\Delta' x^{\frac{n+m}{n}}$

das ist $\frac{d^2 z}{dx^2} = \left[2^{\frac{n+m}{n}} - 2\right] B \frac{dx^{1+\frac{m}{n}}}{dx^2}$, welches unendlich ist, wenn $\frac{m}{n} < 1$; in diesem Falle wird also der zweite Differentialquotient und alle höhern unendlich.

Wäre $\Delta z = A\Delta x + B\Delta x^2 + C\Delta x^{2+\frac{m}{n}}$ + etc., so erhellt leicht, daſs der erste und zweite Differentialquotient endlich wird, der dritte aber unendlich ist, wenn $\frac{m}{n} < 1$; und hieraus erhellt, daſs eine Spitze der zweiten Art nothwendig fordert, daſs erst die dem zweiten Differentialquotienten folgenden unendlich werden.

44. Die Puncte also, wo ein Differentialquotient als unendlich angegeben wird, verdienen allemal, als merkwürdige Puncte eine nähere Betrachtung. Von welcher Art sie sind, das läſst sich aus den Differentialquotienten nicht bestimmen, und da die für diesen bestimmten Punct geltende Form der Differenzreihe sich nicht immer so leicht finden läſst, so muſs man meistens die Beschaffenheit der Curve in der Nähe eines solchen Punctes untersuchen, und dadurch bestimmen, ob hier ein Knoten, eine Spitze u. s. w. sei. Vergl. Lagrange théorie des fonct. anal. p. 181. und Lacroix traité I. 456.

Zweiter Abschnitt.

Von der Bestimmung des Krümmungshalbmessers, von den Evoluten der Curven und den durch Abwickelung entstandenen Curven.

45. **Bemerkung.** So wie wir eine grade Linie suchten, die als Tangente einerlei Richtung mit der Curve an einer bestimmten Stelle derselben hat, so können wir auch krumme Linien von bestimmter Art suchen, die entweder nur die Richtung mit der gegebnen Curve an einem gewissen Puncte gemein haben, oder zugleich sich noch enger an sie anschliefsen. Ist das letztere der Fall, so schreiben wir beiden Curven an diesem Puncte gleiche Krümmung zu.

Zwei Linien für deren eine zur Abscisse $= x$ die Ordinate $= u$, für die andre zur Abscisse $= x$ die Ordinate $= z$ gehört, haben da einen Punct gemein, wo $u = z$ ist; sollen aber zugleich beide hier eine gemeinschaftliche Tangente haben oder sich einander berühren, so mufs zugleich der Werth von $\frac{du}{dx}$ an dieser Stelle mit dem Werthe von $\frac{dz}{dx}$ übereinstimmen; und wenn wir ihnen gleiche Krümmung zuschreiben sollen, so wird erfordert, dafs auch an eben der Stelle die Werthe von $\frac{d^2u}{dx^2}$ und $\frac{d^2z}{dx^2}$ gleich ausfallen. Dann schliefsen sich die Curven so eng an einander, dafs ihre Entfernung nur durch die dritte und durch höhere Potenzen der Differenz von x ausgedrückt wird, und man könnte eine noch engere Berührung erhalten, wenn man auch noch $\frac{d^3u}{dx^3}$ als mit $\frac{d^3z}{dx^3}$ einerlei Werth erhaltend annähme. Dafs man dieses vorzüglich anwendet, um den Krümmungskreis zu bestimmen ist schon 1. Th. §. 560. gesagt worden.

46. **Aufgabe.** Den Halbmesser des Krümmungskreises und die Lage seines Mittelpunctes für jeden gegebnen Punct einer Curve zu bestimmen.

Auflösung. Es sei ein Kreis zu finden, der mit einer Curve an der Stelle, wo $x = x'$ und $z = z'$ ist, einerlei Krümmung habe. R sei der Halbmesser dieses Kreises, A die Abscisse, B die Ordinate, wodurch die Lage seines Mittelpunctes bestimmt wird, x, u die Coordinaten für jeden Punct seines Umfangs, so ist

$$R^2 = (x - A)^2 + (u - B)^2,$$ und R, A, B müssen hier bestimmt werden.

Da der Kreis durch den Punct der Curve gehen soll, der durch die Coordinaten x', z' bestimmt ist, so mufs neben der allgemeinen Gleichung

$$R^2 = x^2 - 2Ax + A^2 + u^2 - 2Bu + B^2,$$

auch die besondre

$$R^2 = x'^2 - 2Ax' + A^2 + z'^2 - 2Bz' + B^2,$$

statt finden, also $0 = x^2 - x'^2 - 2A.(x - x') + u^2 - z'^2 - 2B(u - z')$ sein. Dies ist eine Gleichung für alle Kreise, die durch jenen Punct gehen. Sie giebt für die Richtung der Kreislinie an irgend einer durch x und u bestimmten Stelle $\frac{du}{dx} = \frac{-(x-A)}{u-B}$ und dieses soll damit die Kreise sich an der bestimmten Stelle berühren $= \frac{dz}{dx}$ sein, da wo $x = x'$ und $u = z'$ ist, also $\frac{dz'}{dx'} = \frac{-(x'-A)}{z'-B}$; alle Kreise also, welche unsre Curve dort berühren, entsprechen diesen beiden Gleichungen. Damit aber unser Kreis eben die Krümmung habe, wie die Curve an jener Stelle, mufs

$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{du\,(x-A)}{dx\,(u-B)^2} - \frac{1}{u-B}$, gleich dem an dieser Stelle statt findenden Werthe von $\frac{d^2z}{dx^2}$ sein, also

$$\frac{d^2z'}{dx'^2} = \frac{-(x'-A)^2}{(z'-B)^3} - \frac{1}{z'-B} = \frac{-(x'-A)^2 - (z'-B)^2}{(z'-B)^3}$$

oder $\frac{d^2z'}{dx'^2} = \frac{-R^2}{(z'-B)^3}$.

Die zweite Gleichung gab $-(x'-A) = (z'-B).\frac{dz'}{dx'}$.

also die dritte $\frac{d^2z'}{dx'^2} = \frac{-\frac{dz'^2}{dx'^2} - 1}{z'-B}$

oder $d^2z'.(z'-B) = -(dz'^2 + dx'^2)$

$B = z' + \frac{ds'^2}{d^2z}$, wenn ich

$dz'^2 + dx'^2 = ds'^2$ nenne.

Hieraus also ferner $x' - A = \frac{ds'^2.\ dz'}{d^2z'.\ dx'}$,

$$A = x' - \frac{ds'^2.\ dz'}{d^2z'.\ dx'};$$

und endlich $R^2 = (x'-A)^2 + (z'-B)^2$

also $R = \pm (z'-B).\frac{ds'}{dx'} = \mp \frac{ds'^3}{dx'.\ d^2z'}$.

47. Hiedurch ist also nicht bloſs der Krümmungshalbmesser gegeben, sondern auch die beiden Coordinaten $A, B,$ des Mittelpunctes, diese lassen sich auch durch

$$B = z' + R. \frac{dx'}{ds'} \text{ und } A = x' - R. \frac{dz'}{ds'}$$

ausdrücken.

48. In dem Ausdruck für den Krümmungshalbmesser ist $d^2 z'$ so gesucht, daſs dx' als unveränderlich angenommen ist. Wollte man diese Voraussetzung nicht beibehalten, so müſste man

$$d. \frac{dz'}{dx'} \text{ durch } \frac{d^2 z'. dx' - d^2 x'. dz'}{dx'^2}, \text{ ausdrücken,}$$

also statt $d^2 z'$ schreiben $d^2 z' - \frac{d^2 x'. dz'}{dx'}$.

49. Bemerkung. Folgende Anleitung zu Bestimmung des Krümmungshalbmessers ist noch leichter zu übersehen.

Es sei AB (Fig. 9.) irgend eine Curve, an welcher in zwei einander sehr nahen Puncten S und T Tangenten SU, TV gezogen sind, SZ, TZ sind die Normallinien. Wenn ST hier ein überaus kleiner Bogen ist, so ist der Durchschnittspunct Z der Normallinien der Mittelpunct, SZ der Halbmesser des Krümmungskreises, und offenbar ist $SZT = TVN - SUN$, oder wenn $SUN = \phi$ heiſst, $SZT = d\phi$, weil hier nur von unendlich nahen Puncten die Rede ist.

Der Bogen der Curve sei $ST = ds = \sqrt{(dx^2 + dz^2)}$, und eben dieser ist als Bogen des Kreises vom Halbmesser $ZS = R$ angesehen $= R. d\phi$, also

$$R = \frac{ds}{d\phi}.$$

Da nun $tang\, \phi = \frac{dz}{dx}$; $d.\, tang\, \phi = d\phi\, (1 + tang.^2 \phi) = \frac{dx. d^2 z - dz d^2 x}{dx^2}$

oder $d\phi = \frac{dx. d^2 z - dz d^2 x}{ds^2}$ ist, so haben wir

$$R = \frac{ds^3}{dx. d^2 z - dz. d^2 x}$$

und R erscheint hier als positiv, wenn für ein positives und unveränderliches dx, zugleich ds und $d^2 z$ positiv sind.

Der Ort des Krümmungsmittelpunctes Z wird, wenn SN die verlängerte Normallinie, also $SNC. = 90^\circ - \phi$ und ferner $CP = x$, $PS = z$ ist, durch die Coordinate $A = x - SZ. Cos\, SNC = x - R. Sin\, \phi$, und

$$B = z + SZ.\ Sin\, SNC = Z + R\, Cos\, \phi, \text{ bestimmt,}$$

wo $Sin\, \phi = \frac{dz}{ds}$ und $Cos\, \phi = \frac{dx}{ds}$ ist.

Anmerkung. Hier ist angenommen, dafs $ds = \sqrt{(dx^2 + dz^2)}$ sei; — ein Satz, der wohl aus dem Vorigen, als hinreichend begründet erscheint.

50. Aufgabe. Wenn für die Curve eine Gleichung zwischen dem veränderlichen Winkel $= \psi$ und Abstande $= y$ gegeben ist, den Krümmungshalbmesser auszudrücken.

Auflösungen. Wenn der Punct von welchem der Abstand gemessen wird, als Anfangspunct rechtwinklicher Coordinaten x, z angesehen wird, und des Winkels ψ unveränderlicher Schenkel mit x zusammen fällt, so ist

$z = y.\, Sin\, \psi$; $x = y\ Cos\, \psi$,

$dz = dy.\, Sin\, \psi + y\, d\psi.\, Cos\, \psi$; $dx = dy\, Cos\, \psi - y\, d\psi.\, Sin\, \psi$;

$d^2 z = d^2 y.\, Sin\, \psi + 2\, dy.\, d\psi.\, Cos\, \psi + y\, d^2\psi.\, Cos\, \psi - y\, d\psi^2\, Sin\, \psi$;

$d^2 x = d^2 y.\, Cos\, \psi - 2\, dy\, d\psi.\, Sin\, \psi - y\, d^2\psi\, Sin\, \psi - y\, d\psi^2\, Cos\, \psi$;

also $d^2 z.\, dx - d^2 x.\, dz = 2\, dy^2\, d\psi + y\, dy\, d^2\psi - y\, d^2 y\, d\psi + y^2\, d\psi^3$;

$ds = \sqrt{(dy^2 + y^2\, d\psi^2)}$; demnach wird

der Krümmungshalbmesser $R = \dfrac{(dy^2 + y^2\, d\psi^2)^{\frac{3}{2}}}{2\, dy^2.\, d\psi + y\, dy\, d^2\psi - y\, d^2 y.\, d\psi + y^2\, d\psi^3}$

oder, wenn man $d\psi$ als das beständige Differential annimmt,

$$R = \frac{(dy^2 + y^2\, d\psi^2)^{\frac{3}{2}}}{d\psi\, (2\, dy^2 - y\, d^2 y + y^2\, d\psi^2)}$$

51. Erklärung. Wenn man den geometrischen Ort aller Krümmungs-Mittelpuncte für eine gegebne Curve bestimmt, so erhält man die zu dieser Curve gehörige Linie der Krümmungs-Mittelpuncte.

52. Erklärung. Wenn man sich um die Curve AB (Fig. 10.) einen Faden gelegt denkt, der sich an alle von B bis A liegende Puncte der Curve anschliefst, von A an aber grade gespannt eine Tangente AC der Curve bildet; wenn man sich nun den Endpunct C des Fadens so gefafst und fortgeführt denkt, dafs der Faden, während er immer die Curve berührt, sich nach und nach von der Curve AB abwickelt: so erhält man in der Linie CDE, welche der Endpunct des Fadens durchläuft, die durch Abwickelung der A und B entstandene Linie. Dagegen heifst ASB die Evolute der CDE, oder die zu CDE gehörige Abgewickelte.

53. Bemerkung. Es läfst sich leicht übersehn, dafs allemal, wenn AB von A bis S abgewickelt ist, (Fig. 10.) der freie Theil SD des Fadens $= AC + AS$ ist, oder um so viel zunimmt, als der abgewickelte Bogen. Es läfst sich auch wohl übersehen, dafs SD die Normallinie der durch Abwickelung entstandenen und zugleich die Tangente der Abgewickelten ist.

54. Lehrsatz. Die Evolute AB einer Curve CE ist einerlei mit der Linie ihrer Krümmungs-Mittelpuncte, und der Krümmungshalbmesser in jedem Puncte D der Curve ist (Fig. 10.) gleich der Länge DS des abgewickelten Fadens.

Beweis. Der Beweis hiefür läſst sich so führen, daſs man erstlich zeigt, der Krümmungshalbmesser sei allemal eine Tangente an der Linie der Krümmungs-Mittelpuncte, und zweitens zeigt, der Krümmungshalbmesser nehme, indem man von D nach E fortgeht, um soviel zu als der zugehörige Bogen SB auf der Linie der Krümmungs-Mittelpuncte.

Es sei also (Fig. 11.) BDE eine durch Coordinaten $CP = x$, $PD = z$ bestimmte Curve; in D sei DS ihr Krümmungshalbmesser $= R$, und die Lage des Krümmungs-Mittelpunctes S durch Coordinaten $CQ = u$, $QS = v$ bestimmt. Dann ist, wie die Figur zeigt,

$u = x + DS.\frac{dz}{ds} = x - \frac{R.dz}{ds}$, weil DS hier $= -R$ wegen des negativen d^2z wird, und $v = z + R\frac{dx}{ds}$, (nach §. 47.) Da u, v die Coordinaten der Linie der Krümmungs-Mittelpuncte sind, so ist $\frac{dv}{du} = tang\,\psi$, wenn ψ der Winkel ist, unter welchem die Tangente dieser Linie die Abscissenlinie schneidet. Es ist aber

$$du = dx - dR.\frac{dz}{ds} - R\,d.\frac{dz}{ds} = dx - \frac{dR.dz}{ds} - \frac{R}{ds^2}(ds\,d^2z. - dz\,d^2s);$$

und $dv = dz + dR.\frac{dx}{ds} + R.d.\frac{dx}{ds} = dz + dR.\frac{dx}{ds} + \frac{R(ds.d^2x - dx.d^2s)}{ds^2}$;

oder $du = dx - \frac{dR.dz}{ds} - \frac{R\,dx.(dx.d^2z - dz.d^2x)}{ds^3} = -\frac{dR.dz}{ds}$;

und $dv = dz + \frac{dR.dx}{ds} + \frac{R\,dz}{ds^3}(dz.d^2x - dx.d^2z) = +\frac{dR.dx}{ds.}$,

also $\frac{dv}{du} = tang.\psi = -\frac{dx}{dz}$, das heiſst, die Berührungslinie der AS macht mit CW eben den stumpfen Winkel, welchen die Normallinie der CDE mit CW macht; also, da S der dem Puncte D entsprechende Krümmungs-Mittelpunct ist, so fällt jene Berührungslinie und diese Normallinie zusammen.

Aber eben jene Gleichungen ergeben auch

$$\sqrt{(du^2 + dv^2)} = \sqrt{\{dx^2 + dz^2\}}.\frac{dR}{ds} = dR,$$

das ist, der Bogen der Linie der Krümmungs-Mittelpuncte $= \sqrt{(du^2 + dv^2)}$ wächst, wenn man von S zu einem unendlich nahen Puncte s fortgeht, eben so viel als für CDE der Krümmungshalbmesser wächst, wenn man zu dem unendlich nahen Puncte d, der jenem S entspricht, fortgeht.

55. Man wird vielleicht fragen, worauf das Zusammengehören der Puncte d, s sich gründe. Aber es erhellt; da u, v und R gegebne Functionen

von x und z sind, daſs ihre Differentiale uns die mit bestimmten Aenderungen von x und z zusammengehörenden Aenderungen angeben.

56. Aufgabe. Die Evolute der Ellipse, Parabel und Hyperbel zu finden.

Auflösung. Die Gleichung für die Ellipse $z^2 = b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}$,

giebt $z dz = -\frac{b^2 x dx}{a^2}$; also, wenn ich dx als unveränderlich annehme

$$d^2 z = -\frac{b^2 dx^2}{a^2 z} + \frac{b^2 x dx . dz}{a^2 z^2} = -\frac{b^2 dx^2}{a^2 z^2}\left(z + \frac{b^2 x^2}{a^2 z}\right) = \frac{-b^4 dx^2}{a^2 z^3};$$

und folglich, da $ds^2 = dx^2\left(1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 z^2}\right)$ ist,

$$R = -\frac{(a^4 z^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^6 z^3 . \frac{b^4}{a^2 z^3}} = -\frac{(a^4 z^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4}.$$

Für die Linie der Krümmungs-Mittelpuncte sind also die beiden Coordinaten

$$u = x - \frac{R dz}{ds} = x - \frac{(a^4 z^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}} . \, b^2 x}{a^4 b^4 . \sqrt{(a^4 z^2 + b^4 x^2)}};$$

$$= x \frac{(a^4 (b^2 - z^2) \, b^4 x^2)}{a^4 b^2} = \frac{x^3 (a^2 - b^2)}{a^4}$$

und $v = z + \frac{R . dx}{ds} = z - \frac{(a^4 z^2 + b^4 x^2) . z}{a^2 b^4} = z \left(\frac{b^4 (a^2 - x^2) - a^4 z^2}{a^2 b^4}\right)$

$$= z^3 \left(\frac{b^2 - a^2}{b^4}\right).$$

Daraus folgt auch $v = \frac{(b^2 - a^2)}{b} . \frac{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^3}$,

oder $v^{\frac{2}{3}} . b^{\frac{2}{3}} = \frac{(a^2 - x^2)\,(b^2 - a^2)^{\frac{2}{3}}}{a^2}$,

oder $v^{\frac{2}{3}} . b^{\frac{2}{3}} + \frac{x^2}{a^2} (b^2 - a^2)^{\frac{2}{3}} = (b^2 - a^2)^{\frac{2}{3}}$,

also $v^{\frac{2}{3}} . b^{\frac{2}{3}} + u^{\frac{2}{3}} . a^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$,

weil $x^2 = \frac{u^{\frac{2}{3}} . a^{\frac{8}{3}} .}{(a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}} = \frac{u^{\frac{2}{3}} . a^{\frac{8}{3}}}{(b^2 - a^2)^{\frac{2}{3}}}$ ist.

Die Gleichung für die Evolute der Ellipse ist also

$$a^{\frac{2}{3}} . u^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} . v^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}.$$

2. Ganz ebenso würde die Gleichung für die Evolute der Hyperbel gefunden $a^{\frac{2}{3}}.\, u^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}}.\, v^{\frac{2}{3}} = (a^2 + b^2)^{\frac{2}{3}}$.

3. Um die Gleichung für die Evolute der Parabel zu finden, setze ich $U = a - u$ und erhalte so als Ausdruck für die Evolute der Ellipse

$$(a - U)^{\frac{2}{3}} + \frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} v^{\frac{2}{3}} = \left(a - \frac{b^2}{a}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Die Bestimmungen für die Ellipse geben aber eine Parabel, wenn man $\frac{b^2}{a} = \frac{1}{2} p$ und a unendlich setzt, dadurch wird es unnöthig, die Potenzen der Binomen auf mehr als zwei Glieder zu entwickeln und man hat daher

$$a^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3} \frac{U}{a^{\frac{1}{3}}} + \frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} v^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3} . \frac{1}{2} \frac{p}{a^{\frac{1}{3}}};$$

das ist $-\frac{2}{3} U + \dfrac{b^{\frac{2}{3}} v^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}} = -\frac{1}{3} p$,

oder $v^{\frac{2}{3}}.\, (\frac{1}{2} p)^{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} (-\frac{1}{2} p + U)$, oder $v^2 = \frac{16}{27} \dfrac{(U - \frac{1}{2} p)^3}{p}$.

57. Die Gleichung für die Evolute der Ellipse hat viel Aehnlichkeit mit der Gleichung für die im 1. Theil §. 506. betrachtete Curve, und die nähere Untersuchung dieser Evolute liefse sich also nach der dortigen Anleitung anstellen.

Die Evolute der Parabel ist eine Parabel der dritten Ordnung. (1. Th. §. 321.)

Um die Evolute der Hyperbel näher kennen zu lernen, ist es am bequemsten die Gleichung

$$a^{\frac{2}{3}}.\, u^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}}.\, v^{\frac{2}{3}} = (a^2 + b^2)^{\frac{2}{3}},$$

rational zu machen, wodurch man erhält

$$(a^2 u^2 - b^2 v^2)^3 - 3\,(a^2 + b^2)^2\,(a^4 u^4 + 7 a^2 b^2 u^2 v^2 + b^4 v^4)$$
$$+ 3\,(a^2 + b^2)^4\,(a^2 u^2 - b^2 v^2) - (a^2 + b^2)^6 = 0.$$

Da hier das höchste Glied drei gleiche einfache Factoren $au - bv$, und drei andre gleiche einfache Factoren $au + bv$ enthält, das zweite Glied aber fehlt, und das dritte Glied worin die vierte Potenz vorkömmt, jene Factoren nicht enthält, so hat diese Evolute eine Parabel der dritten Ordnung zur Asymptote, die durch die Gleichung

$$(au - bv)^3 = \lambda^5 u,$$

und eine zweite, die durch die Gleichung $(au+bv)^3=\lambda'^5\, u$ ausgedrückt wird. (1. Th. §. 356.) *).

Aus $(au-bv)^3=\lambda^5 u$ folgt $bv=au-\lambda^{\frac{5}{3}}.u^{\frac{1}{3}}$, $au+bv=u^{\frac{1}{3}}(2a.u^{\frac{2}{3}}-\lambda^{\frac{5}{3}})$, oder für unendliche u, $(a^2u^2-b^2v^2)^3=8a^3\lambda^5 u^4 - 3(a^2+b^2)^2(a^4u^4+7a^2b^2u^2v^2+b^4v^4)=+27(a^2+b^2)^2 a^4u^4$, und da die übrigen Glieder geringere Potenzen von u enthalten, so muſs $\lambda^5=-\frac{27}{8}a(a^2+b^2)^2$ angenommen werden, damit die Summe dieser Glieder $=0$ sei. Die Gleichungen für beide Asymptoten sind also: $(au-bv)^3=-\frac{27}{8}au(a^2+b^2)^2$, und $(au+bv)^3=+\frac{27}{8}au(a^2+b^2)^2$. Die beiden Parabel-Asymptoten gehen durch den Mittelpunct der Hyperbel und sind von der Art, die im 1. Th. §. 324. Fig. 100. angegeben ist. Die Evolute der Hyperbel selbst hat ihre zwei Spitzen da, wo $u=\pm\frac{a^2+b^2}{a}=\pm(a+\frac{1}{2}p)$ ist, weil der Krümmungshalbmesser am Scheitel $=\frac{1}{2}p$, dem halben Parameter der Hyperbel gleich ist. (Vergl. 1. Th. §. 570.)

58. **Aufgabe.** Den Krümmungshalbmesser der Cissoide zu finden.

Auflösung. Die Gleichung für die Cissoide $z^2=\frac{x^3}{b-x}$,

giebt $dz=\frac{3}{2}\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{(b-x)}}+\frac{1}{2}\frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{(b-x)^{\frac{3}{2}}}=\frac{(\frac{3}{2}b.x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}})\,dx}{(b-x)^{\frac{3}{2}}}$;

$$ds=\frac{b\,dx}{(b-x)}.\sqrt{\left(\frac{b-\frac{3}{4}x}{b-x}\right)};$$

$$d^2z=\frac{3}{4}\frac{b^2dx^2}{x^{\frac{1}{2}}(b-x)^{\frac{5}{2}}}.$$

Also der Krümmungshalbmesser $R=\frac{\frac{4}{3}b.\sqrt{\{(b-\frac{3}{4}x)^3.x\}}}{(b-x)^2}$.

59. Der Krümmungshalbmesser wird also $=0$ für $x=0$ oder da wo der Rückkehrpunct ist. Wir werden nachher sehen, daſs bei jedem Rückkehrpuncte der Krümmungshalbmesser entweder $=0$ oder $=\infty$ wird.

60. **Aufgabe.** Die Evolute der Cycloide zu finden.

Auflösung. Wenn man die Coordinaten der Cycloide (1. Theil §. 610. Fig. 163.) durch $x=r-r\,Cos\,\phi$;
$z=r\phi-r\,Sin\,\phi$,

*) Der Fall, da das zweite Glied fehlt, ist dort nicht ausdrücklich erwähnt worden: man kann sich aber leicht überzeugen, daſs er mit dahin gehört.

ausdrückt, so ist $dx = rd\phi . Sin\, \phi$; $dz = (r - r\, Cos\, \phi)\, d\phi$. $ds = rd\phi \sqrt{(2 - 2\, Cos\, \phi)}$. Soll hier dx als unveränderlich angesehen werden, so ist $d^2x = rd^2\phi .\ Sin\, \phi + rd\phi^2\ Cos\, \phi = 0$, also $d^2\phi = - d\phi^2$. $Cotang.\, \phi$; folglich $d^2z = rd^2\phi(1 - Cos\, \phi) + rd\phi^2\, Sin\, \phi = rd\phi^2\left(\frac{1 - Cos\, \phi}{Sin\, \phi}\right)$

Hiernach wird $R = \frac{ds^3}{d^2z\, dx} = 2r . \sqrt{(2 - 2\, Cos\, \phi)}$, und die Coordinaten der Evolute $u = x - 2r(1 - Cos\, \phi) = -(r - r\, Cos\, \phi)$

$v = x + 2r\, Sin\, \phi = r\phi + r\, Sin\, \phi$.

Diese Gleichungen zeigen (vergl. 1. Th. §. 612.), daſs die Evolute eine Cycloide, der gegebnen gleich, ist; daſs aber die Spitze der Evolute da liegt, wo $v = r . \pi$ und $u = -2r$ ist.

61. Bemerkung. Wenn man (Fig. 10.) aus der Gleichung für die Curve ASB die durch ihre Abwickelung entstandene finden will, so sieht man ASB als bekannt, also die Coordinaten u, v, als durch einander gegeben an, damit ist dann auch die Länge des Bogens AS als gegeben anzusehen, und da DS gleich ist diesem Bogen addirt zu derjenigen bestimmten Länge des Fadens, die bei A als Tangente über die Curve hinausreichte, so lassen sich die Coordinaten der durch ihre Abwickelung entstehenden Curve bestimmen.

62. Aufgabe. Aus der Gleichung für eine Curve die Gleichung für ihre Abwickelnde zu finden. (Fig. 11.)

Auflösung. Es sei $CQ = u$ die Abscisse, $QS = v$ die Ordinate des Punctes S, der Bogen AS sei $= s$, von einem bestimmten Anfangspuncte an gerechnet, und die Länge des Fadens, durch dessen Endpunct die bei der Abwickelung entstehende Curve beschrieben wird, sei allemal $= s + a$, so ist des Punctes D Abscisse $x = u - (s + a)\ Cos\ DST = u - (s + a)\frac{du}{ds}$,

und Ordinate $z = v + (s + a)\ Sin\ DST = v - (s + a)\frac{dv}{ds}$.

63. Aufgabe. Die durch Abwickelung des Kreises entstehende krumme Linie zu bestimmen. (Fig. 12.)

Auflösung. Des Kreises Halbmesser sei $= r$, $CQ = u$, $QS = v$, $AS = s = r.\ Arc.\ Sin\ \frac{u}{r}$, also $DS = a + r.\ Arc.\ Sin\ \frac{u}{r}$.

Für den Punct D ist also

$$\text{da } u = \sqrt{(r^2 - v^2)};\ du = -\frac{v\,dv}{u};$$

$$\frac{du}{ds} = \frac{+v}{r};\ \frac{dv}{ds} = \frac{-u}{r},$$

$$\text{die Abscisse } x = u - \frac{\left(a + r.\ Arc\ Sin\ \frac{u}{r}\right)v}{r};$$

$$\text{die Ordinate } z = v + \frac{\left(a + r.\ Arc\ Sin\ \frac{u}{r}\right)u}{r}.$$

Wenn man $Arc\ Sin\ \frac{u}{r} = \omega$ nennt, so giebt das

$$x = r\ Sin\ \omega - a\ Cos\ \omega - r\ \omega\ Cos\ \omega,$$
$$\text{und } z = r\ Cos\ \omega + a\ Sin\ \omega + r\ \omega\ Sin\ \omega$$

also auch $x\ Sin\ \omega + z\ Cos\ \omega = r$, oder in der Figur $PV - PW = r$, da $CP = -u$.

64. Wenn $\omega = 0$, oder wenn der Faden in A berührt, so ist für den Punct B $x = -a$ und $z = r$; für $\omega = \frac{1}{2}\pi$, oder für den Punct E ist $x = r$ und $z = a + r. \frac{1}{2}\pi$.

Will man den Punct wissen, wo die Linie in die Abscissenlinie CF einschneidet, so muſs man $z = 0$, also

$$-r\ Cos\ \omega = (a + r\omega)\ Sin\ \omega, \text{ das ist } Cotang.\ \omega = -\frac{u}{r} - \omega$$

setzen. Dieser transcendenten Gleichung kann durch unzählige Werthe für ω Genüge geschehn; der kleinste darunter ist, wenn ich als Beispiel $a = 0$ setze, $\omega = 160\frac{1}{2}$ Grad. Der nächste ist $360 - 9\frac{1}{3}$ Grad u. s. w. Die durch Abwickelung des Kreises entstandene ist also eine Spirale, die in unzähligen Windungen den Kreis umgiebt. Fig. 12. zeigt diese Curve in verschiedenen Lagen, Aa stellt sie dar für $a = 0$; EDG für $a = r. \frac{1}{4}\pi$ und HI für $a = r. \pi$.

65. **Aufgabe.** Die durch Abwickelung der Curve, deren Gleichung $u^{\frac{2}{3}} + v^{\frac{2}{3}} = b^{\frac{2}{3}}$ ist, entstehende Linie zu finden. (Fig. 13.)

Auflösung. Hier ist

$$dv = -\frac{v^{\frac{1}{3}}du}{u^{\frac{1}{3}}}, \text{ also } ds = \sqrt{(du^2 + dv^2)} = \frac{du\sqrt{(u^{\frac{2}{3}} + v^{\frac{2}{3}})}}{u^{\frac{1}{3}}},$$

$$ds = \frac{b^{\frac{1}{3}}du}{u^{\frac{1}{3}}},$$

also $S = \frac{3}{2}\, b^{\frac{1}{3}}.\, u^{\frac{2}{3}}$.

Wir erhalten also die Abscisse

$$x = u - (\tfrac{3}{2} b^{\frac{1}{3}} . u^{\frac{2}{3}} + a) \frac{u^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}},$$

die Ordinate $z = v + (\tfrac{3}{2} b^{\frac{1}{3}} . u^{\frac{2}{3}} + a) \dfrac{v^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}}$,

oder $x = u - \tfrac{3}{2} u - \dfrac{a . u^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}} = - \tfrac{1}{2} u - \dfrac{a . u^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}}$,

Setzt man also $a = 0$, so wäre $u = -2x$,

also $v^{\frac{1}{3}} = \sqrt{} \{ b^{\frac{2}{3}} - (2x)^{\frac{2}{3}} \}$,

und $z = \sqrt{} \{ b^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} . \sqrt[3]{4} \}^3 + \tfrac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} . \sqrt[3]{4} . \sqrt{} \{ b^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{4} \}$;

oder $z^2 = (b^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} . \sqrt[3]{4}) . \{ b^{\frac{2}{3}} + \tfrac{1}{2} x^{\frac{2}{3}} . \sqrt[3]{4} \}^2$

oder $z^2 = b^2 - \tfrac{3}{4} b^{\frac{2}{3}} . x^{\frac{4}{3}} . \sqrt[3]{16} - x^2$.

oder endlich $(z^2 + x^2 - b^2)^3 = - \tfrac{27}{4} b^2 x^4$,

eine Gleichung für eine Curve vom sechsten Grade, die in Fig. 13. durch ABD dargestellt ist.

66. Bemerkung. Aus derselben Curve können sehr verschiedene Curven durch Abwickelung entstehen, je nachdem man die Länge der Tangente $= a$ an der Stelle, von wo man den Bogen s an rechnet, verschieden nimmt. Fig. 13. zeigt dieses. Alle so entstandene Curven haben die Eigenschaft, dafs die Normallinie der einen immer auch alle übrigen unter rechtem Winkel trifft, und dafs das zwischen beiden abgeschnittene Stück der Normallinie überall gleich ist, oder die Curven überall gleich weit von einander abstehend sind. So könnte man die im 1. Theil §. 530. betrachteten Curven, wenn ihr Abstand von der Parabel nicht mehr als den halben Parameter beträgt, durch Abwickelung der Evolute der Parabel erhalten. Bei der Parabel nämlich ist schon im Scheitel der Krümmungshalbmesser $= \tfrac{1}{2} p$. und so weit mufs dort die Tangente der Evolute verlängert, so lang der Faden genommen werden, um bei der Abwickelung die Parabel zu erhalten. Nimmt man a kleiner, so erhält man nach und nach die dort betrachteten Curven, die aber nicht mehr ganz durch Abwickelung können hervorgebracht werden, wenn der Abstand von der Parabel gröfser als $\tfrac{1}{2} p$ sein soll.

67. Bemerkung. Die Bestimmung des Krümmungshalbmessers hat nach den bisherigen Anleitungen zwar eben keine Schwierigkeit; aber in den Fällen, wo $d^2 z$ verschwindet oder unendlich wird, könnte man fragen, ob nicht da Zweifel gegen die Anwendbarkeit der Formeln einträten. Wenn in

der Formel $\frac{ds^3}{dx.d^2z} = R$, der Nenner verschwindet, so wird R unendlich. Das findet da statt, wo die Abweichung der Curve von der graden Berührungslinie erst durch Glieder der dritten Ordnung oder höherer Ordnungen ausgedrückt wird, und da wird offenbar ein Kreis sich desto enger an die Curve anschliefsen, je gröfser sein Halbmesser wird, selbst wenn man diesen unendlich wachsend annähme, und dies ist der Grund, warum $R = \infty$ wird. Dieses ist der gewöhnliche Fall in den Wendungspuncten einer Curve (§. 18.), aber auch in andern Fällen, wo $d^2z = 0$ ist. Zum Beispiel wenn

$x^4 + z^4 = b^4$ ist, so wird $dz = -\frac{x^3 dx}{z^3}$; $ds = dx\frac{\sqrt{\{z^6 + x^6\}}}{z^3}$,

$$d^2z = \frac{-3x^2dx^2}{z^3} + \frac{3x^3dx.dz}{z^4} = \frac{-3x^2b^4dx^2}{z^7},$$

also $R = \frac{-(z^6 + x^6)^{\frac{3}{2}}}{3z^2x^2b^4}$. Für $x = 0$ wird $z = b$ und $dz = d^2z = 0$, weil (1. Th. Fig. 140.) die Curve sich senkrecht über C so sehr eng an die Tangente anschliefst, und da wird $R = \infty$. Wo $x = b$ und $z = 0$ ist, wird zwar $dz = \infty$, $d^2z = \infty$, aber gleichwohl auch $R = -\frac{b^3}{3z^2} = \infty$, weil auch hier alle Krümmung verschwindet, und die Entfernung von der Tangente erst durch Glieder der vierten Ordnung ausgedrückt wird.

68. Bemerkung. Um die Fälle, wo $d^2z = \infty$ wird, richtig zu beurtheilen, wollen wir, (nach Anleitung des §. 25. u. folg.) die vollständigen Differenzreihen betrachten. Wir unterschieden dort vier Hauptfälle, für welche an einem Puncte einer der Differentialquotienten als unendlich angegeben wird; nämlich erstlich wo $\Delta z = A\Delta x^{\frac{m}{n}} + B\Delta x^{\frac{m+r}{n}} + \text{etc.}$ ist, und $\frac{m}{n} < 1$ ist; zweitens wo Δz zwar durch eine nach den ganzen Potenzen von Δx fortgehende Reihe ausgedrückt wird, die Coefficienten aber mehrfache Werthe erhalten; drittens wo $\Delta z = A\Delta x + B\Delta x^{1+\frac{m}{n}} + \text{etc.}$ und $\frac{m}{n} < 1$; viertens wo

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta x^2 + C\Delta x^{2+\frac{m}{n}} + \text{etc.}$$

Der erste Fall, wo nämlich die Curve senkrecht gegen die Abscisse x ist, läfst sich für unsern Zweck besser behandeln, wenn wir die Reihe umkehren und $\Delta x = \frac{\Delta z^{\frac{n}{m}}}{A^{\frac{n}{m}}} - \frac{n}{m} B . A^{-1-\frac{n+r}{m}} \Delta z^{\frac{n+r}{m}} + \text{etc.}$ setzen, wo nun

$\frac{n}{m} > 1$ ist, alsdann fällt er mit dem dritten Falle zusammen und fordert nur, dafs man beim dritten Falle den Coefficienten von Δx, als $= 0$ werdend ansehe. Der zweite Fall braucht hier gar nicht besonders betrachtet zu werden, weil er auf einen Knoten deutet, wo freilich für beide, sich hier durchschneidende Aeste die Krümmungshalbmesser gefunden werden müssen, dieses aber gewöhnlich ohne Schwierigkeit geschieht.

69. Lehrsatz. Wenn in irgend einem Puncte der Curve die Differenzreihe nicht durch die Folge der Potenzen mit ganzen Exponenten ausgedrückt werden kann, sondern durch $\Delta z = A\Delta x + B\Delta x^{1+\frac{m}{n}} +$ etc. dargestellt wird; so ist hier der Krümmungshalbmesser eine endliche Gröfse, wenn $\frac{m}{n} = 1$, er ist unendlich grofs, wenn $\frac{m}{n} > 1$, unendlich klein wenn $\frac{m}{n} < 1$ ist.

Beweis. Allemal wird, wie aus der umständlichen Entwickelung im 1. Th. §. 560. erhellt, der Krümmungshalbmesser durch $\frac{(dx^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{dx.\, d^2 z}$ ausgedrückt, wenn man unter dz das erste Glied der ersten, unter $d^2 z$ das erste Glied der zweiten Differenzreihe der Werthe von z versteht, welche dieses für gleichförmig geänderte x erhält. Da nun in unserm Falle

zur Abscisse x, die Ordinate $= z$,

zur Abscisse $x + \Delta x$, die Ordinate $= z + A\Delta x + B\Delta x^{1+\frac{m}{n}} +$ etc.

zur Abscisse $x + 2\Delta x$, die Ordinate $= z + 2A\Delta x + B.\, 2^{\frac{n+m}{n}} \Delta x^{\frac{n+m}{n}} +$ etc.

gehört, so sind die zwei ersten Glieder der ersten

Differenzreihe . . $A\Delta x + B\Delta x^{\frac{n+m}{n}} +$

und $A\Delta x + B.\left(2^{\frac{n+m}{n}} - 1\right) \Delta x^{\frac{n+m}{n}} +$

und das erste Glied der zweiten Differenzreihe $= B\left(2^{\frac{n+m}{n}} - 2\right) \Delta x^{\frac{n+m}{n}} +$.

Der Krümmungshalbmesser ist also $= \dfrac{(1 + A^2)^{\frac{3}{2}}\, dx^3}{dx.\, B\left(2^{\frac{n+m}{n}} - 2\right) dx^{1+\frac{m}{n}}}$

$$\text{oder} = \frac{(1 + A^2)^{\frac{3}{2}}\, dx^{1-\frac{m}{n}}}{B\left(2^{\frac{n+m}{n}} - 2\right)}$$

und dieser wird mit dx zugleich unendlich abnehmen, wenn $\frac{m}{n} < 1$ ist, einen

endlichen Werth erhalten $= \frac{(1+A^2)^{\frac{3}{2}}}{B\left(2^{\frac{n+m}{n}}-2\right)}$ wenn $\frac{m}{n}=1$, und unendlich groſs sein, wenn $\frac{m}{n}>1$ ist.

70. Hierin sind alle Fälle zugleich aufgelöst. Der erste nämlich (in §. 68.) kömmt auf den dritten zurück, giebt aber $A=0$; der vierte kömmt mit dem dritten überein, wenn man $\frac{m}{n}=1$ setzt.

Wenn also im ersten Falle $\Delta z = M\Delta x^{\frac{p}{q}} + N\Delta x^{\frac{p+r}{q}} +$ also $\Delta x = M^{-\frac{q}{p}}.\,\Delta z^{\frac{q}{p}}$ + etc. ist, und hier $\frac{q}{p}>1=1+\frac{m}{n}$, so stellt $M^{-\frac{q}{p}}$ das vor, was in §. 69. $=B$ war, und das dortige A ist $=0$. Der Krümmungshalbmesser ist also endlich

und zwar $=\frac{M^2}{2}$ wenn $\frac{q}{p}=2$ ist;

er ist unendlich klein, wenn $\frac{q}{p}<2$ oder $\frac{p}{q}>\frac{1}{2}$ ist,

und unendlich groſs, wenn $\frac{q}{p}>2$ oder $\frac{p}{q}<\frac{1}{2}$ ist.

71. Beispiele hiezu geben die Parabeln der verschiedenen Ordnungen.

1. Für $z=P^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$, ist am Scheitel $\Delta z = P^{\frac{1}{2}}.\,\Delta x^{\frac{1}{2}}$, also hier $\frac{p}{q}=\frac{1}{2}$, und der Krümmungshalbmesser $=\frac{M^2}{2}=\frac{1}{2}P$.

2. Wenn $z=p^{\frac{2}{3}}.\,x^{\frac{1}{3}}$ ist, so wird der Krümmungshalbmesser unendlich groſs, wie es auch aus der allgemeinen Formel $\frac{ds^3}{dx.d^2z}=\frac{\left\{1+\frac{1}{9}\frac{p^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}}\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{2}{9}p^{\frac{2}{3}}.\,x^{-\frac{5}{3}}}$, welches für $x=0$, in $=\frac{1}{6}\frac{p^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}=\infty$ übergeht, folgen würde. Diese Parabel hat im Scheitel einen Wendungspunct, wie 1. Th. Fig. 100. Indeſs sehen wir hier, daſs nicht nothwendig im Wendungspuncte der Krümmungshalbmesser

unendlich grofs wird; denn die Gleichung $z = p^{-\frac{2}{7}} x^{\frac{9}{7}}$, gäbe auch eine Parabel die im Scheitel einen Wendungspunct hätte; aber dennoch würde für diese hier der Krümmungshalbmesser $= 0$.

3. Wäre $z = p^{\frac{1}{3}}. x^{\frac{2}{3}}$, so hätte die Parabel eine Spitze (wie 1. Th. Fig. 99.), und der Krümmungshalbmesser wäre $= 0$. Dagegen wenn $z = p^{\frac{3}{5}}. x^{\frac{2}{5}}$, so hätte sie auch eine Spitze, aber der Krümmungshalbmesser wäre unendlich grofs.

4. Für $z = p^{\frac{3}{4}}. x^{\frac{1}{4}}$ würde die Parabel die Abscissenlinie so wie in Fig. 98. 1. Th. senkrecht durchschneiden, und hier wäre der Krümmungshalbmesser unendlich grofs. Dagegen wenn $z = p^{-\frac{1}{6}} x^{\frac{7}{6}}$, so wäre er unendlich klein.

72. **Lehrsatz.** 1. Da wo die Curve eine Spitze der ersten Art hat, ist ihr Krümmungshalbmesser entweder unendlich grofs, oder unendlich klein. 2. Da wo sie eine Spitze der zweiten Art hat, ist der Krümmungshalbmesser entweder von endlicher Gröfse oder unendlich grofs. 3. Wo sie einen Wendungspunct hat, kann der Krümmungshalbmesser unendlich grofs und auch unendlich klein sein.

Beweis. 1. Für Spitzen der ersten Art hat die Differenzreihe die Form $\triangle z = A \triangle x + B \triangle x^{1+\frac{m}{n}} + \text{etc.}$ und $\frac{m}{n}$ ist nicht $= 1$, sondern ein Bruch mit gradem Nenner, also können beide Fälle, der Krümmungshalbmesser $= \infty$ oder $= 0$ statt finden, nach §. 69.; aber nicht der Fall eines endlichen Halbmessers.

2. Spitzen der zweiten Art entstehen, wenn die Differenzreihe die Form

$$\triangle z = A \triangle x + B \triangle x^2 + C \triangle x^{2+\frac{m}{n}} + \text{etc.}$$

$$\text{oder } \triangle z = A \triangle x + B \triangle x^4 + C \triangle x^{4+\frac{m}{n}} + \text{etc.}$$

oder eine ähnliche hat, wenn da n eine grade Zahl ist. Die erste Form giebt einen endlichen, die übrigen alle einen unendlichen Krümmungshalbmesser.

3. Ein Wendungspunct ist allemal da, wo $\frac{d^2 z}{dx^2}$ aus dem Positiven ins Negative übergeht. Geschieht das durch ein Abnehmen bis auf Null, so findet da keine Krümmung statt und der Krümmungshalbmesser ist unendlich; aber es kann auch dadurch geschehen, dafs $\frac{d^2 z}{dx^2}$ unendlich wird. Das letztere findet

z. B. bei der Parabel, wo $z = p^{-\frac{2}{7}} . x^{\frac{9}{7}}$ war, statt. Da nämlich ist allgemein $\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{18}{49} . p^{-\frac{2}{7}} x^{-\frac{5}{7}}$, unendlich groſs für $x = 0$, und $\frac{d^2 z}{dz^2} = \frac{18}{81} . p^{\frac{2}{7}} . x^{-\frac{9}{7}}$, gleichfalls unendlich. Hier ist also die Aenderung der Richtung, das heiſst die Krümmung sehr groſs, und der Krümmungshalbmesser verschwindend.

73. Bemerkung. Wenn man den Krümmungskreis DE an einem Puncte B der Curve (Fig. 16.) zeichnet, wo die Krümmung von A gegen C hin abnehmend ist: so erhellt leicht, daſs, indem der Kreis in B einerlei Richtung mit der Curve hat, er sich bei E nach der concaven Seite der Curve, bei D an der convexen Seite von ihr entfernen wird. Daſs der Krümmungskreis ganz an der concaven Seite liegt, findet nur statt, wenn (z. B. am Ende der gröſsern Axe der Ellipse) in dem Puncte, wo er berührt, der Krümmungshalbmesser kleiner ist, als in den benachbarten Puncten, dagegen berührt er die convexe Seite, wenn der Krümmungshalbmesser gröſser, als in den benachbarten Puncten ist.

74. Lehrsatz. Da wo der Krümmungshalbmesser entweder einen gröſsten oder einen kleinsten Werth erreicht, ist des Kreises Berührung mit der Curve so innig, daſs der Abstand beider von einander erst durch Glieder der vierten Ordnung ausgedrückt wird.

Beweis. Soll das der Fall sein, daſs der Abstand erst durch Glieder der vierten Ordnung ausgedrückt wird, so muſs in den Betrachtungen des §. 46. auch $\frac{d^3 u}{dx^3} = \frac{d^3 z'}{dx'^3}$ sein. Es ist aber dort

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{du}{dx} . \frac{(x-A)}{(u-B)^2} - \frac{1}{u-B} = \frac{-(x-A)^2}{(u-B)^3} - \frac{1}{u-B}, = \frac{-R^2}{(u-B)^3};$$

also $\frac{d^3 u}{dx^3} = \frac{-2(x-A)}{(u-B)^3} + \frac{3(x-A)^2 \, du}{(u-B)^4 \, dx} + \frac{du}{dx}\left(\frac{1}{(u-B)^2}\right);$

$$= \frac{-2(x-A)}{(u-B)^3} - \frac{3(x-A)^3}{(u-B)^5} - \frac{x-A}{(u-B)^3} =$$

$$= \frac{-3(x-A)\{(x-A)^2 + (u-B)^2\}}{(u-B)^5}.$$

Hiernach soll also $\frac{d^3 z'}{dx'^3} = \frac{-3(x'-A) . R^2}{(z'-B)^5}$ sein; da wir aber aus den Betrachtungen im §. 46. schon haben

$$\frac{d^2 z'}{dx'^2} = \frac{-R^2}{(z'-B)^3}; \text{ so ist } \frac{d^3 z'}{dx'^3} = \frac{-2R.\frac{dR}{dx'}}{(z'-B)^3} + \frac{3R^2 \frac{dz'}{dx}}{(z'-B)^4}$$

$$= \frac{-2R.\frac{dR}{dx'}}{(z'-B)^3} - \frac{3R^2(x'-A)}{(z'-B)^5}$$

und dieser Werth ist dem vorhin gefundenen nur dann gleich, wenn $dR = 0$ ist, also an der Stelle, wo R einen gröſsten oder kleinsten Werth erlangt hat.

75. **Lehrsatz.** Wenn die Evolute einer Curve eine Spitze hat, so ist in dem Puncte der Abgewickelten, welcher dieser Spitze zugehört, der Krümmungshalbmesser ein Kleinstes oder ein Gröſstes.

Beweis. Allemal liegt ja der Punct der Curve auf der Tangente, die an dem zugehörigen Puncte der Evolute gezogen ist, und der Krümmungshalbmesser ist gleich der Länge dieser Tangente. 1. Hat also (Fig. 17.) die Evolute $CBADE$ bei A eine Spitze der ersten Art, so kann der dem Puncte A zugehörige Punct der Curve entweder so wie F oder so wie I liegen. Im ersten Falle ist FA der Krümmungshalbmesser in F, und wenn man an D oder B Berührungslinien der Evolute zieht, so liegen die zugehörigen Puncte der Curve so, daſs für G der Krümmungshalbmesser $GD = AF +$ Bogen AD ist, also gröſser als in F. Ein Gleiches gilt für D. Im zweiten Falle ist für den der Spitze zugehörenden Punct I der Krümmungshalbmesser $= AI$ nnd für einen andern Punct L der Krümmungshalbmesser $BL = AI -$ Bogen AB kleiner als in I. Die Curve schneidet hier die an die Spitze der Evolute gezogne Berührungslinie senkrecht. 2. Wenn (Fig. 18.) die Evolute MNO in N eine Spitze der zweiten Art hat, so befinden sich offenbar beide Aeste, sie mögen nun wie RPQ oder wie UST liegen, an derselben Seite der Tangente in N, das ist an einerlei Seite der PS. Beide Aeste schneiden in P oder in S senkrecht auf PS ein, und bilden also Spitzen der zweiten Art. Es erhellt auch, daſs der Krümmungshalbmesser in Q, R gröſser ist, als in P, und daſs der Krümmungshalbmesser in U und T kleiner ist, als in S.

76. **Lehrsatz.** Wenn die Evolute eine gradlinigte Asymptote hat, so entspricht dem ins Unendliche hinausgerückten Puncte der Evolute entweder 1. ein Wendungspunct, oder 2. eine Spitze der ersten Art, oder 3. eine sehr innige Berührung an die Tangente, wobei jedoch die Curve ganz auf derselben Seite der Tangente bleibt. Das erstere findet statt, wenn wie bei AB, CD (Fig. 19.) die Aeste der Evolute an den verschiedenen Enden und an den verschiedenen Seiten der Asymptote liegen, und EFG stellt dann ungefähr die Lage der Curve vor. Eine Spitze hat die Curve, wenn die Aeste der Evolute an den verschiedenen Enden aber an einerlei Seite der Asymptote liegen,

wie HI und CD, die Curve liegt dann wie KLM und hat in L einen unendlich grofsen Krümmungshalbmesser. Der dritte Fall tritt ein, wenn beide Aeste der Evolute an verschiedenen Seiten der Asymptote liegen, aber diese an demselben Ende berühren, wie NO, CD. PQ stellt dann die Curve dar.

Der Beweis ist leicht zu führen.

77. **Lehrsatz.** Wenn die Evolute einen Wendungspunct hat, so hat an dem zugehörigen Puncte die Curve eine Spitze der zweiten Art. (Fig. 20.), wenn nicht etwa zugleich dort der Krümmungshalbmesser $= 0$ ist.

Beweis. Wenn AB die Linie der Krümmungs-Mittelpuncte ist, die in E einen Wendungspunct hat, so liegt der diesem Puncte E zugehörige Punct der Curve auf der Tangente EF, zum Beispiel in F. Zieht man nun an andern Puncten B, D der Evolute Tangenten, so liegen diese offenbar beide an einerlei Seite von EF und unsre Curve kann sich nicht über EF hinaus erstrecken. Die beiden Aeste FC, FG sind ferner beide in F auf EF senkrecht, und wenden beide ihre concaven Seiten nach E zu; es ist also in F eine Spitze der zweiten Art.

78. **Lehrsatz.** Wenn ein Punct der Curve mit dem zugehörigen Puncte der Evolute zusammen fällt, so hat die Curve da entweder eine Spitze der ersten Art, in welcher zugleich der Krümmungshalbmesser $= 0$ ist, oder einen Wendungspunct, in welchem der Krümmungshalbmesser $= 0$ ist, oder sie liegt zwar ganz an einer Seite der Tangente, hat aber dennoch hier einen verschwindenden Krümmungshalbmesser.

Beweis. Den ersten Fall zeigt Fig. 21. wo die Krümmungsmittelpuncte der Linie BAC sich auf der DAE befinden. Der zweite Fall ist in Fig. 22. dargestellt, wo BAC die Curve, DAE die Evolute ist.

Der dritte Fall tritt ein, wenn die Evolute eine Spitze hat, wie LMN Fig. 23., wo zu dieser Evolute die Curve OMP gehört.

Dritter Abschnitt.

Von der Quadratur der durch krumme Linien eingeschlossenen Flächenräume.

79. **Aufgabe.** Die Differentialformeln für den Flächenraum, der durch eine Curve begrenzt wird, zu finden.

Auflösung. 1. Wenn (Fig. 24.) die Curve durch senkrechte Coordinaten $CM = x$, $MN = z$ bestimmt ist, so nimmt der Flächenraum DMN, um $MNnm = zdx$ zu, indem x um dx wächst, und zdx ist also das Differential der Fläche.

2. Ist dagegen (Fig. 25.) eine Gleichung zwischen $ACS = \psi$ und $CS = y$ gegeben, so wächst die Fläche ACS, um sCS, indem ψ um $d\psi$ zunimmt; aber die Höhe des kleinen Sectors SCs ist $= y\,d\psi$, also der Inhalt des Sectors $= \frac{1}{2} y^2 d\psi$, und dies ist hier das Differential der Fläche.

Eben dieser Sector ließe sich auch durch rechtwinkliche Coordinaten $CT = x$, $TS = z$ ausdrücken. Da nämlich $y^2 = x^2 + z^2$ und $tang\,\psi = \frac{z}{x}$ also $d\psi . Sec^2 \psi = \frac{x dz - z dx}{x^2}$, und $d\psi = \frac{x dz - z dx}{x^2 + z^2}$ ist, so wird der Inhalt des kleinen Sectors SCs durch $= \frac{1}{2}(x dz - z dx)$ ausgedrückt.

80. Anmerkung. Es ist hier nicht der Ort, die Frage vollständig zu beantworten, warum es hier erlaubt ist, den Raum $MNnm$ mit dem Recht-Eck $= z dx$ als einerlei anzusehn; indeſs will ich kurz Folgendes bemerken. Allerdings würde $MNnm$ wenn man es auch nur als Trapez betrachtete $= \frac{1}{2}(z + dz)\,dx$ sein, und noch höhere Potenzen von Differentialen enthalten, wenn man auf die Abweichung der Curve von der Sehne Rücksicht nähme; aber da die gesammte Aenderung einer Function z, die durch $z' - z = \frac{dz}{dx}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{d^2 z}{dx^2}\Delta x^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3 z}{dx^3}\Delta x^3 + \text{etc.}$ strenge genau ausgedrückt wird, durch das erste Glied $\frac{dz}{dx}\Delta x$ so vollständig gegeben ist, daſs man die folgenden Glieder aus diesem ersten als nothwendig folgend entwickeln kann, so reicht dies erste Glied hin, um aus ihm die Function z zu erkennen, das heiſst, um das Integral zu finden. Das erste Glied der Differenzreihe ist aber durch $z dx$ vollständig bekannt, und die durch Integration desselben gefundene Function ist also die von uns gesuchte Gröſse der Fläche.

Beispiel. Für die conische Parabel ist $z^2 = px$, also das Differential der zwischen parallelen Ordinaten abgeschnittenen Fläche $dS = z dx = p^{\frac{1}{2}} . x^{\frac{1}{2}} dx$. Dadurch erhalten wir vermittelst des Taylorschen Theorems, weil $\frac{dS}{dx} = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$; $\frac{d^2 S}{dx^2} = \frac{1}{2} p^{\frac{1}{2}} . x^{-\frac{1}{2}}$, und so ferner ist, den vollständigen Werth von

$$\Delta S = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \Delta x + \frac{1}{4}\frac{p^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}\Delta x^2 - \frac{1}{6} . \frac{1}{4}\frac{p^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}}\Delta x^3 + \text{etc.}$$

und $S = \frac{2}{3} . p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}$ ist die Function, welcher diese Differenz entspricht; diese aber wird sogleich aus $\int p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx$ gefunden.

81. **Beispiele.** 1. Für die Parabel ist also der vom Scheitel bis zu irgend einer Ordinate sich erstreckende Raum $= \frac{2}{3}\sqrt{p.x^3} = \frac{2}{3}zx$. 2. Um den Sector ABC zu bestimmen, (Fig. 26.) wenn A der Scheitel der Parabel, B der Brennpunct ist, haben wir $ABC = \psi$, $BC = r = \frac{p}{4\,Cos^2.\frac{1}{2}\psi}$, also, wenn der Sector $= T$ heifst, $dT = \frac{1}{16}p^2.\frac{d\psi}{2\,Cos^4\frac{1}{2}\psi}$

oder $dT = \frac{1}{16}p^2.\,d.\frac{1}{2}\psi.\,Sec^4.\frac{1}{2}\psi = \frac{1}{16}p^2.\frac{d\psi}{2}.\,Sec^2\frac{\psi}{2}(1 + tg^2\frac{1}{2}\psi)$

oder $dT = \frac{1}{16}p^2\,\{d.\,tang\,\frac{1}{2}\psi + tang^2\,\frac{1}{2}\psi.\,d.\,tang.\,\frac{1}{2}\psi\}$,
woraus $T = \frac{1}{16}p^2\,\{tang.\,\frac{1}{2}\psi + \frac{1}{3}\,tang^3.\,\frac{1}{2}\psi\}$, folgt.

3. Für die Ellipse war $z = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$, also

$zdx = \frac{b\,dx.\sqrt{(a^2 - x^2)}}{a} = dS$. Wenn man hier theilweise integrirt, so ist

$$\int\frac{b\,dx.\sqrt{(a^2 - x^2)}}{a} = \frac{bx.\sqrt{(a^2 - x^2)}}{a} + \frac{b}{a}\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}},$$

oder $\int\frac{b\,dx.\sqrt{(a^2 - x^2)}}{a} = \frac{bx.\sqrt{(a^2 - x^2)}}{a} - \frac{b}{a}\int dx.\sqrt{(a^2 - x^2)}$

$$+ ab\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}},$$

oder $2\,\frac{b}{a}\int dx\sqrt{(a^2 - x^2)} = \frac{bx.\sqrt{(a^2 - x^2)}}{a} + ab.\,Arc.\,Sin\,\frac{x}{a}$,

woraus $S = \frac{1}{2}\,\frac{bx}{a}\,\sqrt{(a^2 - x^2)} + \frac{1}{2}\,ab.\,Arc.\,Sin\,\frac{x}{a}$ folgt.

Zeichnet man (Fig. 27.) den Kreis AE, mit dem Halbmesser $= a$, so ist $DCBE = DCE + ECB = \frac{1}{2}a^2.\,Arc\,Sin\,\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{(a^2 - x^2)}$,

also $S = \frac{b}{a}.\,DCBE = \frac{1}{2}\,ab\,Arc\,Sin\frac{x}{a} + \frac{1}{2}\,\frac{bx}{a}\,\sqrt{(a^2 - x^2)}$.

4. Für die Hyperbel ist $dS = z\,dx = \frac{b}{a}\,dx\,\sqrt{(x^2 - a^2)}$, oder wenn man $x^2 - a^2 = (u - x)^2$, setzt, $dS = \frac{1}{4}\,\frac{b}{a}\,du\,\frac{(u^2 - a^2)^2}{u^3}$,

folglich $S = Const + \frac{1}{8}\,\frac{b}{a}\left(u^2 - \frac{a^4}{u^2}\right) - \frac{1}{2}.\,ab\,log\,u$,

oder wenn das Integral vom Scheitel an, wo $x = a$, also $u = a$ ist, gerechnet wird,

$$S = \frac{1}{8} \cdot \frac{b}{a}\left(\frac{u^4 - a^4}{u^2}\right) - \frac{1}{2} ab. \log \frac{u}{a} = \frac{1}{2} \frac{bx}{a} \sqrt{(x^2 - a^2)} - \frac{1}{2} ab. \log \frac{x + \sqrt{(x^2 - a^2)}}{a}$$

oder $S = \frac{1}{2} zx - \frac{1}{2} ab \log. nat. \left(\frac{x + \sqrt{(x^2 - a^2)}}{a}\right)$.

Der Flächenraum der Hyperbel läſst sich noch bequemer ausdrücken. Nimmt man nämlich (Fig. 28.) auf der einen Asymptote die Abscisse $CA = u$ und mit der andern Asymptote parallel $AB = v$, so ändert sich der Flächenraum $DEAB$ um $- v. du. \sin BAE$, wenn die Abscisse $CA = u$ um du wächst. Nenne ich also $DEAB = U$, und setze $v = \frac{1}{4} \frac{(a^2 + b^2)}{u}$, (nach 1. Th. §. 253.), so ist, weil $\sin BAE = \sin. 2 FCD = \frac{2ba}{(a^2 + b^2)}$ ist,

$dU = - v du. \frac{2ba}{(a^2 + b^2)} = - \frac{1}{2} ab. \frac{du}{u}$ und

$U = Const - \frac{1}{2} ab \log nat. u$. Soll also die Fläche vom Scheitel D an gerechnet werden, wo $CE = \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 + b^2)} = u$ ist, so muſs

$Const = \frac{1}{2} ab. \log. nat. \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 + b^2)}$, und $U = \frac{1}{2} ab. \log. nat \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)}}{2u}$,

sein. Da nun $2u = \frac{x}{\cos FCD} - \frac{z}{\sin FCD} = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)}}{a} . (x - \sqrt{(x^2 - a^2)})$ ist, (1. Th. §. 253.) so wird

$U = \frac{1}{2} ab. \log. nat. \frac{a}{x - \sqrt{(x^2 - a^2)}} = \frac{1}{2} ab. \log. nat. \left(\frac{x + \sqrt{(x^2 - a^2)}}{a}\right)$

Der vorhin gefundene Flächenraum $DBM = S$ ist $S = CBM - ABDE$; es muſs also der Sector BCD eben so groſs als $ABDE$, oder das Drei-Eck $ACB = ECD$ sein. Und in der That ist

$ACB = \frac{1}{2} uv \sin BAE = \frac{1}{2} CE^2. \sin BAE$, indem

$CE^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2) = uv$ ist.

5. Die Cycloide wird, wenn $AU = Z$, $UX = x$ ist, (Fig. 29.)

durch $x = r\ (1 - \cos \phi)$;

$z = r\phi - r \sin \phi$;

ausgedrückt; wenn also AUX der zu suchende Flächenraum $= S$ ist, so haben wir $dS = x dz = rx d\phi\ (1 - \cos \phi)$ oder $dS = r^2 d\phi\ (1 - \cos \phi)^2$, woraus $S = Const + r^2 \phi - 2r^2 \sin \phi + \frac{1}{2} r^2 \phi + \frac{r^2}{2} \cos \phi. \sin \phi$. folgt. Soll diese von $x = 0$ anfangen, wo $\phi = 0$ ist, so haben wir $Const = 0$, also

$$S = \frac{3}{2} r^2 \phi - 2 r^2 \sin \phi + \frac{1}{2} r^2 \cos \phi. \sin \phi.$$

Für $\phi = \pi$ erhält man die Fläche ACB bis dahin, wo $x = 2r$ ist; diese Fläche ist also $= S = \frac{3}{2} r^2 \pi$. Dreimal so groſs, als der halbe Inhalt des wälzenden Kreises.

82. **Beispiel.** Um ein etwas zusammengesetzteres Beispiel zu geben, wollen wir den Inhalt des rundum eingeschlossenen Theiles $AYZA$ der Linie (Fig. 30.), deren Gleichung ist $z^3 + x^2 z + bx^2 - axz = 0$, suchen. (Vergl. 1. Th. §. 404.) Da hier für jeden Werth von $Ax = z$, die Gröfse x einen doppelten Werth hat, nämlich

$$XZ = \frac{az}{2(b+z)} + \frac{\sqrt{\{\frac{1}{4}a^2z^2 - z^3(b+z)\}}}{(b+z)} = x',$$

$$\text{und } XY = \frac{az}{2(b+z)} - \frac{\sqrt{\{\frac{1}{4}a^2z^2 - z^3(b+z)\}}}{b+z} = x'',$$

so würde man $XYyx = x'.\,dz$ und $XZzx = x''dz$ jedes besonders suchen müssen, wenn man den zwischen AX und der Curve eingeschlossenen Raum berechnen wollte. Zugleich aber ist $YZzy$ das Differential des von der Curve rund um umschlossenen Raumes, und wenn man dieses Differentiales Integral von $z = 0$ bis $z = -\frac{1}{2}b + \frac{\sqrt{(a^2+b^2)}}{2}$ nimmt, so hat man den ganzen Inhalt des Raumes $AYZA$.

Nun ist $XYyx = dz.\,YZ = \frac{zdz\sqrt{(a^2 - 4bz - 4z^2)}}{b+z}$

also davon, oder von $\frac{zdz}{b+z}\sqrt{((a^2+b^2) - (b+2z)^2)} = dS$ das Integral zu suchen.

Es sei $a^2 + b^2 = f^2$, und $(f^2 - (b+2z)^2) = w^2(f+b+2z)^2$,

$$\text{also } w^2 = \frac{f-(b+2z)}{f+(b+2z)} \text{ und } b+2z = \frac{f(1-w^2)}{1+w^2},$$

$$f+b+2z = \frac{2f}{1+w^2};\ \sqrt{(f^2-(b+2z)^2)} = \frac{2fw}{1+w^2};$$

$$dz = -\frac{2fwdw}{(1+w^2)^2};\ z = \frac{f-b-(f+b)w^2}{2(1+w^2)},$$

$b+z = \frac{b+f-(f-b)w^2}{2(1+w^2)}$. Hieraus wird

$$\frac{zdz}{b+z}\sqrt{(f^2-(b+2z)^2)} = -\left\{\frac{(f-b)-(f+b)w^2}{(f+b)-(f-b)w^2}\right\}\frac{4f^2w^2dw}{(1+w^2)^3},$$

oder wenn ich $\frac{f+b}{f-b} = h^2$ setze, $dS = -\left(\frac{1-h^2w^2}{h^2-w^2}\right).\frac{4f^2w^2dw}{(1+w^2)^3}.$

Dieser Bruch mufs in fünf einfache Brüche zerlegt werden, und giebt dann

$$dS = -4f^2\left\{\frac{h(1-h^2)}{2(1+h^2)^2}\left(\frac{dw}{h+w} + \frac{dw}{h-w}\right) - \frac{dw}{(1+w^2)^3} + \frac{2h^2}{(1+h^2)}\frac{dw}{(1+w^2)^2} + \frac{h^2(1-h^2)}{(1+h^2)^2}.\frac{dw}{1+w^2}\right\}.$$

woraus

$$S = Const - 2f^2 \frac{h(1-h^2)}{(1+h^2)^2} \log \frac{h+w}{h-w} + \frac{wf^2}{(1+w^2)^2} + \frac{\frac{3}{2} w f^2}{1+w^2}$$

$$+ \tfrac{3}{2} f^2. \; Arc\ tang.\ w - \frac{4f^2h^2}{1+h^2} \left(\frac{w}{1+w^2}\right)$$

$$- \frac{4f^2 h}{1+h^2} Arc\ tang.\ w - \frac{4f^2h^2(1-h^2)}{(1+h^2)^2} Arc\ tg.\ w;$$

folgt, oder

$$S = Const - 2f^2 \frac{h(1-h^2)}{(1+h^2)^2} \log \left(\frac{h+w}{h-w}\right) + \tfrac{5}{2} \frac{wf^2 + \frac{3}{2} w^3 f^2}{(1+w^2)^2}$$

$$- \frac{4f^2h^2w}{(1+h^2)(1+w^2)} + f^2 \frac{(\frac{3}{2} - 5h^2 + \frac{3}{2} h^4)}{(1+h^2)^2} Arc\ tang.\ w.$$

Das Integral soll mit $z = 0$ verschwinden, das ist, wenn

$w = \sqrt{\frac{f-b}{f+b}}$ oder $w = \frac{1}{h}$ ist, also ist

$$Const = 2f^2 h \left(\frac{(1-h^2)}{(1+h^2)^2}\right) \log \left(\frac{h^2+1}{h^2-1}\right) - \frac{(\frac{5}{2} h_3 f^2 + \frac{3}{2} f^2 h)}{(h^2+1)^2}$$

$$+ \frac{4f^2h^3}{(1+h^2)^2} - f^2 \frac{(\frac{3}{2} - 5h^2 + \frac{3}{2} h^4)}{(1+h^2)^2} Arc\ Cotang\ h,$$

oder $Const = 2f^2 h \frac{(1-h^2)}{(1+h^2)^2} \log \left(\frac{h^2+1}{h^2-1}\right) + \frac{3}{2} f^2 h \left(\frac{h^2-1}{(h^2+1)^2}\right)$

$$- f^2 \frac{(h^2-3)(3h^2-1)}{2(1+h^2)^2} Arc\ Cotang\ h.$$

Das Integral erreicht seinen vollen Werth, da wo z seinen gröſsten Werth erreicht, das ist wo $z = -\frac{1}{2} b + \frac{1}{2} f$ ist, da aber wird $w = 0$, also der Werth des Integral der *Constans* gleich.

Da $h^2 = \frac{f+b}{f-b}$ war, so ist auch $1 - h^2 = \frac{-2b}{f-b}$;

$1 + h^2 = \frac{2f}{f-b}$; $h^2 - 3 = \frac{4b-2f}{f-b}$, und $3h^2 - 1 = \frac{2f+4b}{f-b}$

also der Werth der *Const.* oder des ganzen Integrals

$$= -2f^2 \sqrt{\frac{f+b}{f-b}} \cdot \frac{b(f-b)}{2f^2} \log. \left(\frac{f}{b}\right) + \tfrac{3}{2} f^2 \sqrt{\frac{f+b}{f-b}} \cdot \frac{b(f-b)}{2f^2}$$

$$- f^2 \frac{(4b-2f)(2f+4b)}{8f^2} Arc\ Cotang. \sqrt{\frac{f+b}{f-b}}.$$

oder $= -b\sqrt{(f^2-b^2)} \log \frac{f}{b} + \frac{3}{4} b \sqrt{(f^2-b^2)} - \frac{1}{2}(4b^2 - f^2)\ Arc.\ tang. \sqrt{\frac{f-b}{f+b}}$.

Es sei, wie in Fig. 30. $a = 4b$,
also $f = b\sqrt{17}$, so ist des Integrales Werth

$$= -2b^2 \log. 17 + 3b^2 + \tfrac{13}{2} b^2. \text{Arc tang} \frac{\sqrt{17}-1}{4};$$
$$= b^2 \{3 - 5,666427 + \tfrac{13}{2} \text{Arc}. 37^\circ. 58'. 55''\}$$
$$= b^2 (3 - 5,66643 + 4,30891) = 1,6425. b^2.$$

Wenn man $a = b.\sqrt{3}$ annimmt, so verschwindet das von dem Kreisbogen abhängende Glied, und es ist das Integral $= b^2\left(\frac{3\sqrt{3}}{4} - \sqrt{3}.\log.2\right) = 0,09847.\ b^2$

83. Hier würde es weit schwieriger scheinen, den Raum $AUY = zdx$ zu bestimmen, wenn man da z als Function von x ausdrücken wollte; aber da $\int z\,dx = zx - \int x\,dz$ ist, so wird der Flächenraum $AUY = AXYU - AXY$ immer leicht gefunden, wenn man AXY angeben kann, so wie es hier der Fall ist, wo $\int x\,dz = \int \frac{a\,z\,dz}{2(b+z)} - \int \frac{z\,dz}{z} \frac{\sqrt{(a^2 - 4bz - 4z^2)}}{b+z}$ leicht zu finden ist.

Allgemeine Regeln für die Quadratur, wenn die Formeln keine leichte Integration gestatten.

84. Bemerkung. Da die Quadratur der Curven ein so wichtiges Hülfsmittel ist, um die nicht bequem darstellbaren Integrale annähernd zu bestimmen, so verdienen die hiezu dienenden Regeln eine umständlichere Betrachtung. In allen den Fällen, wo $\int z\,dx$ gefunden werden soll und z eine durch x und beständige Gröſse gegebne Function ist, kann man die Werthe von z, welche mit gegebnen Werthen von x zusammen gehören, in Zahlen angeben, also wenn man z als Ordinate einer Curve ansieht, so viele Ordinaten dieser Curve, als man verlangt, berechnen. Wir fragen also, wie man diese berechneten Ordinaten zur annähernden Bestimmung des Flächenraumes anwendet.

85. Aufgabe. Wenn man den Flächenraum $ABDC$ (Fig. 31.) durch Ordinaten, die gleich weit von einander entfernt sind, in Trapeze zerlegt, 1. den Inhalt der Summe dieser Trapeze näherungsweise anzugeben, und 2. die dabei anzubringenden Correctionen zu bestimmen.

Auflösung. 1. Es sei der Theil AC der Abscissenlinie, über welchem sich der zu berechnende Flächenraum befindet, in n gleiche Theile $AX = XX' = \zeta$ getheilt, und für die Mitte jedes Theiles die Ordinate $= z$

berechnet. Dann erhält man einen angenäherten Werth für die Fläche, indem man die Summe aller dieser Ordinaten mit ζ, oder den mittleren Werth aller Ordinaten mit $n\zeta$ multiplicirt.

2. Dieser nur sehr oberflächlich richtige Werth des Flächenraumes wird verbessert, wenn man den Werth von $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{d^3z}{dx^3}$ für beide Endpuncte der zu berechnenden Fläche sucht, und indem man unter $\frac{dz^0}{dx}$, $\frac{d^3z^0}{dx}$ die Werthe für den Anfangspunct, unter $\frac{dz'}{dx}$, $\frac{d^3z'}{dx}$ die Werthe für den Endpunct versteht, zu jenem Werthe die Correctionsglieder $\frac{1}{24}\zeta^2\left(\frac{dz'}{dx}-\frac{dz^0}{dx}\right)-\frac{7}{5760}\zeta^4\left(\frac{d^3z'}{dx^3}-\frac{d^3z^0}{dx^3}\right)$ hinzu addirt.

Beweis. 1. Berechnet man da, wo die Entfernung vom Anfangspuncte $=\frac{1}{2}\zeta$, $=\frac{3}{2}\zeta$, $=\frac{5}{2}\zeta$ und so weiter ist, die Werthe von z und multiplicirt jeden, oder auch die Summe aller mit ζ, so erhält man die Summe des Flächen-Inhalts für die Recht-Ecke $AUzX$, $XVWX'$, $X'V'W'X''$, und so weiter.

2. Um die Correction zu finden, wollen wir folgende Ueberlegung anstellen. Nennt man allgemein $z=f(x)$, um für jeden bestimmten Werth von x durch $f(\frac{1}{2}\zeta)$ den Werth anzudeuten, welchen die Ordinate in T erhält, durch $f(\frac{3}{2}\zeta)$ den Werth, den die Ordinate in S erhält u. s. w., so ist offenbar, dafs der eben bestimmte Flächenraum

$$T=\zeta(f(\tfrac{1}{2}\zeta)+f(\tfrac{3}{2}\zeta)+f(\tfrac{5}{2}\zeta)+++f(n\zeta-\tfrac{1}{2}\zeta))$$

ist. Hätte man noch ein Recht-Eck hinzugefügt, so wäre T um $\zeta.f(n\zeta+\frac{1}{2}\zeta)$ gröfser geworden, und es ist also $\Delta T=\zeta.f(n\zeta+\frac{1}{2}\zeta)$, oder $T=\zeta\Sigma f(n\zeta+\frac{1}{2}\zeta)$. Es sei nun der wahre Werth der krummlinigt begrenzten Fläche $=S=T+\lambda$, oder λ sei die bei T anzubringende Correction, so ist $\Delta S=\Delta T+\Delta\lambda$. Aber es ist $S=\int z dx=\int f(x)\,dx$ und nach dem Taylorschen Lehrsatz

$$\Delta S=\Delta x.f(x)+\tfrac{1}{2}(\Delta x)^2.\frac{d.f(x)}{dx}+\tfrac{1}{6}(\Delta x)^3\frac{d^2f(x)}{dx^2}+\text{etc.}$$

oder wenn man $\Delta x=\zeta$ setzt und alles auf den Endpunct bezieht

$$\Delta S=\zeta.f(n\zeta)+\tfrac{1}{2}\zeta^2.\frac{d.f(n\zeta)}{dx}+\tfrac{1}{6}\zeta^3\frac{d^2f(n\zeta)}{dx^2}+\tfrac{1}{24}\zeta^4\frac{d^3f(n\zeta)}{dx^3}+\text{etc.}$$

Aber auch ΔT läfst sich nach eben dem Lehrsatze in eine Reihe verwandeln und ist

$$\Delta T = \zeta f(n\zeta) + \tfrac{1}{2}\zeta^2 . \frac{d.f(n\zeta)}{dx} + \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{4}\zeta^3 \frac{d^2 f(n\zeta)}{dx^2} + \tfrac{1}{6}.\tfrac{1}{8}\zeta^4 . \frac{d^3 f(n\zeta)}{dx^3}.$$

Der Unterschied beider ist $= \Delta\lambda$, also

$$\Delta\lambda = (\tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8})\zeta^3 \frac{d^2 f(n\zeta)}{dx^2} + (\tfrac{1}{24} - \tfrac{1}{28})\zeta^4 \frac{d^3 f(n\zeta)}{dx^3}$$
$$+ (\tfrac{1}{120} - \tfrac{1}{384})\zeta^5 \frac{d^4 f(n\zeta)}{dx^4} + \text{etc.}$$

Um hieraus λ zu finden, wollen wir es uns in eine Reihe $\lambda = U\zeta^2 + V\zeta^3 + W\zeta^4$ entwickelt denken, und nun $\Delta\lambda$ so suchen, wie es der Aenderung $\Delta x = \zeta$ entspricht; dann ist aber $\Delta U = \zeta \frac{dU}{dx} + \frac{1}{2}\zeta^2 \frac{d^2 U}{dx^2} + \text{etc.}$

und folglich $\Delta\lambda = \begin{cases} \zeta^3 \frac{dU}{dx} + \frac{1}{2}\zeta^4 \frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{1}{6}\zeta^5 \frac{d^3 U}{dx^3} \\ \qquad + \zeta^4 \frac{dV}{dx} + \frac{1}{2}\zeta^5 \frac{d^2 V}{dx^2} \\ \qquad\qquad + \zeta^5 \frac{dW}{dx} \end{cases}$

wenn ich höhere Glieder weglasse. Also durch Vergleichung dieses Werthes mit dem vorigen:

$$dU = (\tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8}) \frac{d^2 f(n\zeta)}{dx} = \tfrac{1}{24} d. \frac{df(n\zeta)}{dx},$$

$U = \frac{1}{24} \frac{df(n\zeta)}{dx} + Const.$ Offenbar wird hier n als veränderlich angesehn, indem ein auf alle Werthe von n passender Werth von λ gesucht wird, und da die Correction, so wie die ganze Flächenberechnung 0 giebt, wenn $n = 0$ ist, so ist $U = \frac{1}{24}$ des Unterschiedes der beiden Werthe, welche $\frac{df(x)}{dx}$ erhält, wenn man $x = n\zeta$ und wenn man $x = 0$ setzt, $U = \frac{1}{24}\left(\frac{dz'}{dx} - \frac{dz^0}{dx}\right)$.

Ferner sollte nun werden $\frac{dV}{dx} + \frac{1}{2} \frac{d^2 U}{dx^2} = \frac{1}{48} \frac{d^3 f(n\zeta)}{dx^3}$,

oder da $\frac{1}{2}.\frac{d^2 U}{dx^2} = \frac{1}{48} \frac{d^3 f(n\zeta)}{dx^3}$ ist, $\frac{dV}{dx} = 0$,

also $V = Const$ oder vielmehr immer $= 0$, da es, wie alle Correctionsglieder für $n = 0$ verschwinden muſs.

Dagegen $\frac{dW}{dx} + \frac{1}{6}\frac{d^3U}{dx^3} = (\frac{1}{120} - \frac{1}{384})\frac{d^4 f(n\zeta)}{dx^4}$,

oder $\frac{dW}{dx} = (\frac{1}{120} - \frac{1}{384} - \frac{1}{144})\frac{d^4 f(n\zeta)}{dx^4}$

$$dW = -\frac{7}{5760} d. \frac{d^3 f(n\zeta)}{dx^3},$$

$$W = -\frac{7}{5760}\left(\frac{d^3 z'}{dx^3} - \frac{d^3 z^0}{dx^3}\right).$$

Damit sind die oben angegebenen Correctionsglieder gerechtfertiget. *)

86. **Beispiel.** Es sei $\int \frac{dx}{1+x^2} = S$ von $x=1$ bis $x=2$ zu finden. Da dieses Integral bekannt und zwischen jenen Grenzen = *Arc. tang.* 2 — *Arc. tang.* 1. = 63°. 26′ 5″, 8 — 45°. 0′. = 18°. 26′. 5″, 8 = 0, 32175053, ist, so können wir dies Beispiel gebrauchen, um die Genauigkeit unsrer Annäherung zu prüfen. Es sei $\zeta = \frac{1}{3}$, so ist der Flächenraum in drei Trapeze getheilt, und die Höhen für die Mitte sind

für $x = \frac{7}{6}$, $z = \frac{36}{36+49} = 0,42352\ 941$,

für $x = \frac{3}{2}$, $z = \frac{4}{9+4} = 0,30769\ 231$.

für $x = \frac{11}{6}$, $z = \frac{36}{36+121} = 0,22929\ 936$.

Die Summe der hieraus bestimmten Recht-Ecke

$$= \frac{0,96052\ 108}{3} = 0,32017\ 369.$$

Für die Correctionsglieder erhalten wir

$$z = \frac{1}{1+x^2},\ \frac{dz}{dx} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2},\ \text{also für } x=1,\ \frac{dz^0}{dx} = -\frac{1}{2},$$

für $x=2$, $\frac{dz'}{dx} = -\frac{4}{25} = -0,16$,

erstes Correctionsglied $= \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{9}\cdot(0,5 - 0,16) = 0,00157\ 407$

*) Ich theile diese Entwickelung hier mit, nicht bloss um Legendre's Methode in den Exercices de calcul integral zu erläutern, sondern auch weil man sich gern an die einfache Zerlegung in Trapeze zu halten pflegt und dann diese Bestimmungen viele Bequemlichkeit gewähren, wenn gleich die folgende Methode in andrer Hinsicht grosse Vorzüge hat.

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{-2(1+x^2)+8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{-2+6x^2}{(1+x^2)^3};$$

$$\frac{d^3 z}{dx^3} = \frac{(12x)(1+x^2)+(2-6x^2)6x}{(1+x^2)^4} = \frac{24x-24x^3}{(1+x^2)^4}$$

$$\frac{d^3 z^0}{dx^3} = 0;\ \frac{d^3 z'}{dx^3} = \frac{-144}{625}.$$

Das zweite Correctionsglied $= \frac{1}{5760} \cdot \frac{1}{81} \cdot \frac{144}{625}$
$= 0, 00000\ 346.$

Das annähernd gefundene Integral also

$$= \begin{Bmatrix} 0,\ 32017\ \ 369 \\ 0,\ 00157\ \ 407 \\ 0,\ 00000\ \ 346 \end{Bmatrix} = 0,\ 32175122.$$

erst in der sechsten Decimalstelle von dem wahren Werthe abweichend.

87. Beispiel. Den Werth des Integrals $\int \frac{dx}{\log x}$ von $x = 100$ bis $x = 200$ zu bestimmen.

Wir wollen uns den Flächenraum der Curve, deren Ordinate $z = \frac{1}{\log x}$ ist, zwischen $x = 100$ und $x = 200$ in vier Trapeze zerlegt denken, so ist für die Mitte dieser Trapeze

für $x = 112, 5 \ldots$ $z = 0, 21173\ \ 193.$
$x = 137, 5.$ $z = 0, 20310\ \ 243.$
$x = 162, 5.$ $z = 0, 19643\ \ 749.$
$x = 187, 5.$ $z = 0, 19106\ \ 654.$

also der Inhalt der Recht-Ecke $= 25. (0,80233\ \ 839)$
$= 20,05845\ \ 97.$

Da $z = \frac{1}{\log x}$, so ist $\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x(\log x)^2}$,

also das erste Correctionsglied $= \frac{1}{24} \cdot 25^2 \left\{ \frac{0,01}{(\log 100)^2} - \frac{0,005}{(\log 200)^2} \right\}$
$= 0\,0076411;$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = + \frac{1}{x^2(\log x)^2} + \frac{2}{x^2(\log x)^3};$$

$$\frac{d^3 z}{dx^3} = - \frac{2}{x^3(\log x)^2} - \frac{6}{x^3(\log x)^3} - \frac{6}{x^3(\log x)^4};$$

also das zweite Correctionsglied =

$$- \tfrac{7}{5760} \cdot 25^4 \cdot \left\{ \frac{2}{100^3 (\log 100)^2} - \frac{2}{200^3 . (\log 200)^2} + \frac{6}{100^3 . (\log 100)^3} - \frac{6}{200^3 . (\log 200)^3} + \frac{6}{100^3 . (\log 100)^4} - \frac{6}{200^3 . (\log 200)^4} \right\},$$

$= - 0{,}0000731,$

$$\text{unser Integral} = \left\{ \begin{array}{r} 20{,}058\ 4597 \\ 0{,}007\ 6410 \\ -\ 0{,}000\ 0731 \end{array} \right\} = 20{,}066\ 0276.$$

Der wahre Werth ist nach Soldner = 20,066 029, also in der sechsten Decimalstelle um eine Einheit gröſser *).

88. Aufgabe. Die Regeln der Quadratur anzugeben, wenn man jedes durch drei auf einander folgende Ordinaten bestimmte Stück der Curve als parabolisch ansieht.

Auflösung. Soll der Flächenraum von $x = g$ bis $x = g + 2\zeta$ gefunden werden und gehört für $x = g$ die Ordinate $z = z'$, für $x = g + \zeta$, die Ordinate $= z''$, für $x = g + 2\zeta$ die Ordinate $= z'''$, so ist der Näherungswerth des Integrals $\int z\,dx$ zwischen diesen Grenzen $= \zeta\,(\tfrac{1}{3} z' + \tfrac{4}{3} z'' + \tfrac{1}{3} z''')$.

Beweis. Wäre (Fig. 42.) AGC ein Parabelbogen, $DE = DF = \zeta$, und folglich die Sehne in L halbirt, so würde $LC^2 = GL.P.$ sein, wenn P der diesem Durchmesser zugehörige Parameter ist, und der Flächenraum

$$AGCA = 2\int LC.\ \mathrm{Sin}\ L.\ d.\ GL = \tfrac{4}{3} P.^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{Sin}\ L.\ (GL)^{\frac{3}{2}} = \tfrac{4}{3} LC.\ GL.\ \mathrm{Sin}\ L$$

$= \tfrac{4}{3} GL.\,\zeta$. Das Trapez $EACF$ ist $= (z' + z''')\,\zeta$, und folglich da $GL = z'' - \tfrac{1}{2}(z' + z''')$ also $\tfrac{4}{3}\zeta.\ GL = \tfrac{4}{3}\zeta z'' - \tfrac{2}{3}\zeta (z' + z''')$ ist, der ganze von der Curve und ihren Ordinaten begrenzte Flächenraum $= (\tfrac{1}{3} z' + \tfrac{4}{3} z'' + \tfrac{1}{3} z''')\,\zeta$.

89. Beispiel. Wenn man für $\int \frac{dx}{1 + x^2}$ von $x = 1$ bis $x = 2$ genommen, drei Werthe von $\frac{1}{1 + x^2} = z$ berechnet, nämlich

für $x = 1$, $z' = 0{,}5$;
für $x = \tfrac{3}{2}$, $z'' = 0{,}3076923$;
für $x = 2$, $z''' = 0{,}2$;

so ist $(\tfrac{1}{3}(z' + z''') + \tfrac{4}{3} z'')\,\zeta = 0{,}32179487$,
ein Werth der erst in der fünften Decimalstelle unrichtig ist.

*) Vergl. Soldner théorie et tables d'une nouvelle fonction transscendante (à Munic 1809.).

Hätte man dagegen fünf Ordinaten berechnet

für $x = 1$, $z' = 0{,}5$;

$x = \frac{5}{4}$; $z'' = 0{,}39024390$;

$x = \frac{3}{2}$; $z''' = 0{,}30769231$;

$x = \frac{3}{4}$; $z^{\text{iv}} = 0{,}24615385$;

$x = 2$; $z^{\text{v}} = 0{,}2$;

so würde die erste Hälfte des Flächenraums hier durch:

$\zeta(\frac{1}{3}z' + \frac{4}{3}z'' + \frac{1}{3}z'''$;

die zweite Hälfte durch $\zeta(\qquad \frac{1}{3}z''' + \frac{4}{3}z^{\text{iv}} + \frac{1}{3}z^{\text{v}})$

also der ganze Raum durch $\zeta(\frac{1}{3}z' + \frac{4}{3}z'' + \frac{2}{3}z''' + \frac{4}{3}z^{\text{iv}} + \frac{1}{3}z^{\text{v}})$

angegeben und da $\zeta = \frac{1}{4}$ ist, $= 0{,}3217479$, also in der sechsten Decimale nur um 3 Einheiten fehlerhaft.

90. Aufgabe. Es sind fünf gleich weit von einander entfernte Ordinaten der Curve gegeben; man sucht den dadurch bestimmten Flächenraum durch eine andre Annäherungs-Methode.

Auflösung. Es sei das zwischen jeden zwei Ordinaten abgeschnittene Stück der Abscissenlinie $= \zeta$, also das zwischen der ersten und letzten abgeschnittene Stück $= 4\zeta$; es gehöre ferner zu $x = g$ die Ordinate $= z'$; zu $x = g + \zeta$ die Ordinate $= z''$; zu $x = g + 2\zeta$, die Ord. $= z'''$, zu $x = g + 3\zeta$ die Ord. $= z^{\text{iv}}$; zu $x = g + 4\zeta$ die Ord. $= z^{\text{v}}$, so ist der Flächenraum $= 4\zeta \{\frac{7}{90}(z' + z^{\text{v}}) + \frac{16}{45}(z'' + z^{\text{iv}}) + \frac{2}{15}z'''\}$.

Beweis. Wir denken uns eine Curve, welche durch die gegebnen fünf Puncte geht: deren Ordinate Z also so bestimmt sein muſs, daſs für $x = g$, $Z = z'$, für $x = g + \zeta$, $Z = z''$ und so ferner werde. Setzt man allgemein $x = g + t.4\zeta$, so erstreckt sich der zu quadrirende Theil der Curve von $t = 0$ bis $t = 1$ und t kann jeden zwischen diesen Grenzen liegenden Werth erhalten; die Ordinate Z aber thut den fünf Bedingungen Genüge, wenn man

$$Z = z' \frac{(4t-1)\,(4t-2)\,(4t-3)\,(4t-4)}{(-1).\;(-2)\,.\,(-3).\;(-4)} + z'' \frac{(4t)\,(4t-2)\,(4t-3)\,(4t-4)}{1.\;(-1)\,.\,(-2)\,.\,(-3)}$$

$$+ z''' \frac{(4t).(4t-1)\,(4t-3)\,(4t-4)}{2.\;1.\;(-1)\;(-2)} + z^{\text{iv}} \frac{(4t).\;(4t-1)\;(4t-2)\;(4t-4)}{3.\;2.\;1.\;(-1)}$$

$$+ z^{\text{v}} \frac{(4t)\;(4t-1)\;(4t-2)\;(4t-3)}{4.\;3.\;2.\;1};$$

setzt; denn dieser Werth giebt z' für $t = 0$; giebt z'' für $t = \frac{1}{4}$ und so weiter, indem alle Glieder auſser dem ersten verschwinden, wenn $t = 0$ ist, alle Glieder auſser dem zweiten verschwinden, wenn $t = \frac{1}{4}$ ist und so weiter.

Entwickelt man diesen Werth so ist er:

$$
\begin{aligned}
Z = 4^4 . t^4 & \left\{ \frac{z'}{24} - \frac{z''}{6} + \frac{z'''}{4} - \frac{z^{iv}}{6} + \frac{z^{v}}{24} \right\} \\
- 4^3 . t^3 . & \left\{ \frac{10 z'}{24} - \frac{9 z''}{6} + \frac{8 z'''}{4} - \frac{7}{6} z^{iv} + \frac{6}{24} z^{v} \right\} \\
+ 4^2 . t^2 & \left\{ \frac{35 . z'}{24} - \frac{26 z''}{6} + \frac{19 z'''}{4} - \frac{14}{6} z^{iv} + \frac{11}{24} z^{v} \right\} \\
- 4 . t & \left\{ \frac{50 z'}{24} - \frac{24 z''}{6} + \frac{12}{4} z''' - \frac{8}{6} z^{iv} + \frac{6}{24} z^{v} \right\} \\
+ & \frac{24}{24} . z' ;
\end{aligned}
$$

und dieses ist die Ordinate einer Curve der vierten Ordnung, welche unsre Curve in den fünf gegebnen Puncten schneidet, und deren Flächenraum also von $t = 0$ bis $t = 1$, sehr nahe mit $\int z dx$ verwechselt werden darf. Dieser Flächenraum ist $= \int Z dx$, aber $\int Z dt = \int \frac{Z dx}{4 \zeta}$ von $t = 0$ bis $t = 1$ genommen, giebt vermöge des so eben entwickelten Werthes

$$
\begin{aligned}
= & \frac{4^4}{5} \left(\frac{z'}{24} - \frac{z''}{6} + \frac{z'''}{4} - \frac{z^{v}}{6} + \frac{z^{v}}{24} \right) \\
- & \frac{4^3}{4} \left(\frac{10 . z'}{24} - \frac{9 z''}{6} + \frac{8 z'''}{4} - \frac{7}{6} z^{iv} + \frac{6}{24} z^{v} \right) \\
+ & \frac{4^2}{3} \left(\frac{35 . z'}{24} - \frac{26 . z''}{6} + \frac{19 . z'''}{4} - \frac{14}{6} z^{iv} + \frac{11}{24} z^{v} \right) \\
- & \frac{4}{2} \left(\frac{50 z'}{24} - \frac{24 . z''}{6} + \frac{12}{4} z''' - \frac{8 z^{iv}}{6} + \frac{6}{24} z^{v} \right) \\
+ & \; z'
\end{aligned}
$$

und folglich ist $\int Z dx$, welches wir als mit $\int z dx$ gleich bedeutend ansehn,

$$= 4 \zeta . \left\{ \tfrac{7}{90} (z' + z^{v}) + \tfrac{16}{45} (z'' + z^{iv}) + \tfrac{2}{15} z''' \right\} .$$

91. **Beispiel.** Für $\int \frac{dx}{1 + x^2}$ haben wir schon oben (§. 89.) die fünf mit $x = 1$, $x = 1,25$, $x = 1,5$, $x = 1,75$, $x = 2$, zusammen gehörenden Ordinaten berechnet; nach diesen Werthen ist

$$
\begin{aligned}
\tfrac{7}{90} (z' + z^{v}) &= 0,054\ 444\ 444 \\
\tfrac{16}{45} (z'' + z^{iv}) &= 0,226\ 274\ 756 \\
\tfrac{2}{15} z''' &= 0,041\ 025\ 641
\end{aligned}
$$

also das Integral $=0,321\ 74484$, welches nicht völlig so genau ist, als wir es in §. 89. durch eben so viel Ordinaten fanden, die wir als zwei Parabeln zugehörig ansehn.

92. Aufgabe. Die Correction zu bestimmen, die man der zuletzt gelehrten Bestimmung der Fläche noch beizufügen hat.

Auflösung. Wenn fünf gleich weit von einander entfernte Ordinaten ganz so wie in §. 90. gegeben sind, und daraus der Flächenraum, so wie dort, berechnet ist, so ist die

$$\text{Correction} = -\frac{(4\zeta)^6}{2688}\cdot\frac{1}{1.2.3.4.5.6}\cdot\frac{d^6 z}{dx^6} - \frac{(4\zeta)^7}{768}\cdot\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}\cdot\frac{d^7 z}{dx^7},$$

wenn man die höhern Glieder wegläſst, und für die Differentiale den Werth setzt, welchen sie für $x=g$ erhalten.

Beweis. Da z eine gegebne Function von x ist, so können wir es auch als eine gegebne Function von t ansehn, weil $x=g+4\zeta.t$ war. Wir denken uns daher diese Function in eine nach t geordnete Reihe entwickelt,

$$z = K + K't + K''t^2 + K'''t^3 + K^{\text{iv}}t^4 + K^{\text{v}}t^5 + K^{\text{vi}}t^6 + K^{\text{vii}}t^7 +$$

und erhalten hieraus den Werth von $4\zeta\int z\,dt$ von $t=0$ bis $t=1$,

$$= 4\zeta\left\{K + \frac{K'}{2} + \frac{K''}{3} + \frac{K'''}{4} + \frac{K^{\text{iv}}}{5} + \frac{K^{\text{v}}}{6} + \frac{K^{\text{vi}}}{7} + \frac{K^{\text{vii}}}{8} + \right\}$$

und dies wäre der wahre Werth unsers Integrals. Dagegen war das genäherte Integral $=4\zeta\left\{\frac{7}{90}(z'+z^{\text{v}}) + \frac{16}{45}(z''+z^{\text{iv}}) + \frac{2}{15}z'''\right\}$. und hier kann man z', z'' u. s. w. durch den eben angenommenen Werth von z ausdrücken, wenn man $t=0$, $t=\frac{1}{4}$ und so ferner setzt. Es ist nämlich

$$z' = K$$

$$z'' = K + \frac{K'}{4} + \frac{K''}{16} + \frac{K'''}{64} + \frac{K^{\text{iv}}}{256} + \frac{K^{\text{v}}}{1024} + \frac{K^{\text{vi}}}{4096} + \frac{K^{\text{vii}}}{16384} +$$

$$z''' = K + \frac{2K'}{4} + \frac{4K''}{16} + \frac{8K'''}{64} + \frac{16K^{\text{iv}}}{256} + \frac{32K^{\text{v}}}{1024} + \frac{64K^{\text{vi}}}{4096} + \frac{128K^{\text{vii}}}{16384} +$$

$$z^{\text{iv}} = K + \frac{3K'}{4} + \frac{9K''}{16} + \frac{27K'''}{64} + \frac{81K^{\text{iv}}}{256} + \frac{243K^{\text{v}}}{1024} + \frac{729K^{\text{vi}}}{4096} + \frac{2187K^{\text{vii}}}{16384} +$$

$$z^{\text{v}} = K + K' + K'' + K''' + K^{\text{iv}} + K^{\text{v}} + K^{\text{vi}} + K^{\text{vii}} +$$

Das genäherte Integral wird also

$$= 4\zeta\left\{K + \frac{K'}{2} + \frac{K''}{3} + \frac{K'''}{4} + \frac{K^{\text{iv}}}{5} + \frac{K^{\text{v}}}{6} + \frac{55.K^{\text{vi}}}{384} + \frac{97K^{\text{vii}}}{768} + \right\}$$

das richtige Integral

$$= 4\zeta\left\{K + \frac{K'}{2} + \frac{K''}{3} + \frac{K'''}{4} + \frac{K^{\text{iv}}}{5} + \frac{K^{\text{v}}}{6} + \frac{K^{\text{vi}}}{7} + \frac{K^{\text{vii}}}{8} + \right\}$$

und man erhält das letztere, wenn man dem erstern die Correction

$(\frac{1}{7} - \frac{55}{384}) K^{\text{vi}} + (\frac{1}{8} - \frac{97}{768}) K^{\text{vii}} = - \frac{K^{\text{vi}}}{2688} - \frac{K^{\text{vii}}}{768}$ beifügt. Aber offenbar ist, wenn man sechs Mal nach einander differentiirt

$$\frac{d^6 z}{dt^6} = 6.5.4.3.2.1.\ K^{\text{vi}} + 7.6.5.4.3.2.\ K^{\text{vii}} t + \text{etc.}$$

also für $t = 0$, der Werth von $\frac{1}{1.2.3.4.5.6.} \cdot \frac{d^6 z}{dt^6} = \text{K}^{\text{vi}}$

oder da $dt = \frac{dx}{4\zeta}$ $\frac{1}{1.2.3.4.5.6} \cdot (4\zeta)^6 \cdot \frac{d^6 z}{dx^6} = \text{K}^{\text{vi}}$, und so erhellt, da der Werth von K^{vii} eben so gefunden wird, die Richtigkeit der Correction.

93. Bemerkung. Es erhellt leicht, dafs man genau eben so Curven höherer Ordnungen statt der gegebnen Curve substituiren und ihren Flächen-Inhalt bestimmen könnte, wenn noch mehr Ordinaten in gleichen Abständen gegeben sind. Roger Cotes hat diese Methode schon in seiner Harmonia mensurarum gelehrt, und Gaufs hat ihre Resultate in seiner Abh. Nova methodus integralium valores proxime inveniendi, als Vorbereitung zu seiner neuen Methode angeführt, und die in jedem Falle den einzelnen Ordinaten beizufügenden Coefficienten entwickelt. Ich will jetzt von der in jener Abh. gelehrten neuen Methode einen Begriff geben.

94. Aufgabe. Für eine Curve sind vier Ordinaten gegeben, man sucht einen allgemeinen Näherungs-Ausdruck für den Flächenraum.

Auflösung. Es sind für den zu berechnenden, von $x = g$ bis $x = g + \zeta$ sich erstreckenden Flächenraum vier Ordinaten gegeben, nämlich
für die Abscisse $= x + \zeta a'$, die Ordinate $= z'$,
für die Abscisse $= x + \zeta a''$, die Ordinate $= z''$,
für die Abscisse $= x + \zeta a'''$, die Ordinate $= z'''$,
für die Abscisse $= x + \zeta a^{\text{iv}}$, die Ordinate $= z^{\text{iv}}$.

Um hier den Flächenraum annähernd zu finden

berechnet man $R' = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{3}(a'' + a''' + a^{\text{iv}}) + \frac{1}{2}(a''a''' + a''a^{\text{iv}} + a'''a^{\text{iv}}) - a''a'''a^{\text{iv}}}{(a' - a'')(a' - a''')(a' - a^{\text{iv}})}$;

$$R'' = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{3}(a' + a''' + a^{\text{iv}}) + \frac{1}{2}(a'a''' + a'a^{\text{iv}} + a'''a^{\text{iv}}) - a'a'''a^{\text{iv}}}{(a'' - a')(a'' - a''')(a'' - a^{\text{iv}})},$$

$$R''' = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{3}(a' + a'' + a^{\text{iv}}) + \frac{1}{2}(a'a'' + a'a^{\text{iv}} + a''a^{\text{iv}}) - a'a''a^{\text{iv}}}{(a''' - a')(a''' - a'')(a''' - a^{\text{iv}})};$$

$$R^{\text{iv}} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{3}(a' + a'' + a''') + \frac{1}{2}(a'a'' + a'a''' + a''a''') - a'a''a'''}{(a^{\text{iv}} - a')(a^{\text{iv}} - a'')(a^{\text{iv}} - a''')};$$

und dann ist $\zeta\ \{R'z' + R''z'' + R'''z''' + R^{\text{iv}}z^{\text{iv}}\}$
der genäherte Werth für den Flächenraum.

Beweis. Statt der gegebnen Curve nehmen wir eine andre an, welche mit jener in den vier gegebnen Puncten zusammentrifft, und für diese ist offenbar, wenn man allgemein $x = g + \zeta t$ setzt, die Ordinate

$$Z = z' \frac{(t-a'')(t-a''')(t-a^{iv})}{(a'-a'')(a'-a''')(a'-a^{iv})} + z'' \frac{(t-a')(t-a''')(t-a^{iv})}{(a''-a')(a''-a''')(a''-a^{iv})}$$
$$+ z''' \frac{(t-a')(t-a'')(t-a^{iv})}{(a'''-a')(a'''-a'')(a'''-a^{iv})} + z^{iv} \frac{(t-a')(t-a'')(t-a''')}{(a^{iv}-a')(a^{iv}-a'')(a^{iv}-a''')}$$

welche nämlich für $t = a'$, $Z = z'$ und so weiter wird. Das Integral, welches wir hier statt $\int z\,dx$ suchen, ist $\int Z\,dx = \zeta \int Z\,dt$, und um dieses zu finden, haben wir nur eines der Glieder von Z zu betrachten nöthig, da die übrigen genau eben so gebildet sind. Das erste Glied aber giebt entwickelt;

$$z' \left\{ \frac{t^3 - (a''+a'''+a^{iv})\,t^2 + (a''a'''+a''a^{iv}+a'''a^{iv})\,t - a''a'''a^{iv}}{(a'-a'')(a'-a''')(a'-a^{iv})} \right\}$$

und folglich, wenn es mit dt multiplicirt und integrirt wird, das erste Glied des Integrals $\int Z\,dt$ von $t = 0$ bis $t = 1$ genommen

$$= R'z' = z' \frac{\{\frac{1}{4} - \frac{1}{3}(a''+a'''+a^{iv}) + \frac{1}{2}(a''a'''+a''a^{iv}+a'''a^{iv}) - a''a'''a^{iv}\}}{(a'-a'')(a'-a''')(a'-a^{iv})}$$

Ganz ebenso werden die Werthe von R'', R''', R^{iv} gefunden.

95. **Aufgabe.** Die ersten Correctionsglieder zu bestimmen, welche man dem eben durch vier Ordinaten gefundenen Näherungswerthe beifügen muſs.

Auflösung. Wenn man, mit Beibehaltung der vorigen Bezeichnungen annimmt, daſs der Werth von z in eine Reihe

$$z = K + K't + K''t^2 + K'''t^3 + K^{iv}t^4 + \text{etc.}$$

entwickelt sei, so sind die vier ersten Correctionsglieder folgende:

$$K^{iv}\,(\tfrac{1}{5} - R'a'^4 - R''a''^4 - R'''a'''^4 - R^{iv}a^{iv4});$$
$$K^{v}\,(\tfrac{1}{6} - R'a'^5 - R''a''^5 - R'''a'''^5 - R^{iv}a^{iv5});$$
$$K^{vi}\,(\tfrac{1}{7} - R'a'^6 - R''a''^6 - R'''a'''^6 - R^{iv}a^{iv6});$$
$$K^{vii}\,(\tfrac{1}{8} - R'a'^7 - R''a''^7 - R'''a'''^7 - R^{iv}a^{iv7}).$$

Beweis. Da z eine Function von x ist, also nach dem **Taylorschen** Lehrsatz durch eine nach den Potenzen von t fortlaufende Reihe dargestellt werden kann, so sei

$$z = K + K't + K''t^2 + K'''t^3 + K^{iv}t^4 + \text{etc.}$$

wo also K der Werth von z ist für $x = g$, und wenn man auch die Differentiale auf eben den Werth von x bezieht,

$$K' = \frac{dz}{dt} = \zeta\,\frac{dz}{dx};\ K'' = \tfrac{1}{2}\zeta^2\,\frac{d^2z}{dx^2}$$ und so ferner.

Dieser Werth giebt z', wenn man $t = a'$, z'', wenn man $t = a''$ setzt u. s. w.; es ist also

$$z' = K + K'a' + K''a'^2 + K'''a'^3 + K^{iv}a'^4 + \text{etc.}$$
$$z'' = K + K'a'' + K''a''^2 + K'''a''^3 + K^{iv}a''^4 + \text{etc.}$$
$$z''' = K + K'a''' + K''a'''^2 + K'''a'''^3 + K^{iv}a'''^4 + \text{etc.}$$
$$z^{iv} = K + K'a^{iv} + K''a^{iv2} + K'''a^{iv3} + K^{iv}a^{iv4} + \text{etc.}$$

und unser in §. 94. angegebner Näherungswerth für $\int z\,dt$ wird also

$$= K(R' + R'' + R''' + R^{iv}) + K'(R'a' + R''a'' + R'''a''' + R^{iv}a^{iv})$$
$$+ K''(R'a'^2 + R''a''^2 + R'''a'''^2 + R^{iv}a^{iv2}) + K'''(R'a'^3 + R''a''^3 + R'''a'''^3 + R^{iv}a^{iv3})$$
$$+ \text{etc.}$$

Aber wenn man den entwickelten Werth von z mit dt multiplicirt und das Integral von $t = 0$ bis $t = 1$ nimmt, so ist das genaue Integral

$$= \int z\,dt = K + \tfrac{1}{2}K' + \tfrac{1}{3}K'' + \tfrac{1}{4}K''' + \tfrac{1}{5}K^{iv} + \tfrac{1}{6}K^{v} + \text{etc.}$$

Der Unterschied zwischen beiden Werthen ist also die an dem Näherungswerthe anzubringende Correction. Aber da die Entwickelung der Werthe von R', R'', R''', R^{iv} zeigt, daſs

$$R' + R'' + R''' + R^{iv} = 1;\; R'a' + R''a'' + R'''a''' + R^{iv}a^{iv} = \tfrac{1}{2};$$
$$R'a'^2 + R''a''^2 + R'''a'''^2 + R^{iv}a^{iv2} = \tfrac{1}{3};\; R'a'^3 + R''a''^3 + R'''a'''^3 + R^{iv}a^{iv3} = \tfrac{1}{4};$$

ist, so fallen die Correctionsglieder ganz weg, in welchen K, K', K'', K''' enthalten sein sollten, und die nächsten Glieder werden so ausgedrückt, wie wir sie in der Auflösung angegeben haben.

96. Daſs $R' + R'' + R''' + R^{iv} = 1$ ist, läſst sich zeigen, wenn man die einzelnen übereinstimmenden Glieder zusammen nimmt; es ist nämlich

$$\tfrac{1}{4}\left\{\frac{1}{(a'-a'')(a'-a''')(a'-a^{iv})} + \frac{1}{(a''-a')(a''-a''')(a''-a^{iv})}\right.$$
$$\left.+ \frac{1}{(a'''-a')(a'''-a'')(a'''-a^{iv})} + \frac{1}{(a^{iv}-a')(a^{iv}-a'')(a^{iv}-a''')}\right\} = 0;$$

denn wenn man alles auf einen gemeinschaftlichen Nenner bringt, so ist die Summe der Zähler

$$= \tfrac{1}{4}\{(a''-a''')(a''-a^{iv})(a'''-a^{iv}) - (a'-a''')(a'-a^{iv})(a'''-a^{iv})$$
$$+ (a'-a'')(a'-a^{iv})(a''-a^{iv}) - (a'-a'')(a'-a''')(a''-a''')\} = 0.$$

Eben so müssen die andern Theile betrachtet werden, welches ich hier, da es bloſs eine leichte Buchstabenrechnung fordert, übergehe. Allgemeine Theoreme, die sich auf ähnliche Entwickelungen beziehn, findet man in Posselt de functionibus quibusdam symmetricis (Gottingae. 1818.)

Für unsern Zweck können wir uns die Betrachtung etwas erleichtern, indem wir statt der ganz unbestimmten Werthe die man den Gröſsen a', a'', a''', a^{iv} geben dürfte, die jedoch hier alle zwischen 0 und 1 sein müssen, annehmen,

es solle a^{IV} ebensoviel über $\frac{1}{2}$, als a' unter $\frac{1}{2}$, und a''' ebensoviel über $\frac{1}{2}$, als a'' unter $\frac{1}{2}$ sein. Nehmen wir diese Voraussetzung an, so können wir

$$a' = \tfrac{1}{2} - w,\quad a^{\mathrm{IV}} = \tfrac{1}{2} + w;$$

$$a'' = \tfrac{1}{2} - w';\quad a''' = \tfrac{1}{2} + w',$$ setzen

und erhalten so

$$R' = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2} + w\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - w'^2 + \frac{1}{2} + w\right) - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4}w - \frac{1}{2}w'^2 - w.\,w'^2\right)}{(w' - w)\,(-w - w')\,(-2w)}$$

$$R^{\mathrm{IV}} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2} - w\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - w'^2 + \frac{1}{2} - w\right) - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}w + \frac{1}{2}w'^2 + w.\,w'^2\right)}{(w - w')\,(w + w')\,(2w)},$$

oder $R' = R^{\mathrm{IV}} = \dfrac{\frac{1}{12}w - w.\,w'^2}{2w\,(w^2 - w'^2)} = \dfrac{\frac{1}{12} - w'^2}{2\,(w^2 - w'^2)}$;

und ebenso $R'' = R''' = \dfrac{\frac{1}{12} - w^2}{2\,(w'^2 - w^2)}$;

Hiedurch wird offenbar $R' + R'' + R''' + R^{\mathrm{IV}} = \dfrac{w^2 - w'^2}{w^2 - w'^2}$;

$$\begin{aligned}
R'a' + R''a'' + R'''a''' + R^{\mathrm{IV}}a^{\mathrm{IV}} &= R'(a' + a^{\mathrm{IV}}) + R''(a'' + a''') \\
&= R' + R'' = \tfrac{1}{2};\\
R'a'^2 + R''a''^2 + R'''a'''^2 + R^{\mathrm{IV}}a^{\mathrm{IV}2} &= R'(a'^2 + a^{\mathrm{IV}2}) + R''(a''^2 + a'''^2),\\
&= R'(\tfrac{1}{2} + 2w^2) + R''(\tfrac{1}{2} + 2w'^2),\\
&= \tfrac{1}{2}(R' + R'') + 2(R'w^2 + R''w'^2),\\
&= \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{12} = \tfrac{1}{3};\\
R'a'^3 + R''a''^3 + R'''a'''^3 + R^{\mathrm{IV}}a^{\mathrm{IV}3} &= R'(a'^3 + a^{\mathrm{IV}3}) + R''(a''^3 + a'''^3),\\
&= R'(\tfrac{1}{4} + 3w^2) + R''(\tfrac{1}{4} + 3w'^2),\\
&= \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Die folgenden Glieder, welche in §. 95. wirkliche Correctionsglieder geben, lassen sich nun auch leichter ausdrücken.

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{5} - R'a'^4 - R''a''^4 - R'''a'''^4 - R^{\mathrm{IV}}a^{\mathrm{IV}4} =\\
&\qquad = \tfrac{1}{5} - R'(\tfrac{1}{8} + 3w^2 + 2w^4) - R''(\tfrac{1}{8} + 3w'^2 + 2w'^4),\\
&\qquad = \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{16} - \tfrac{2}{16} - \tfrac{1}{12}(w^2 + w'^2) + w^2.\,w'^2;\\
&\qquad = \tfrac{1}{80} - \tfrac{1}{12}(w^2 + w'^2) + w^2.\,w'^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{6} - R'.a'^5 - R''a''^5 - R'''a'''^5 - R^{\mathrm{IV}}a^{\mathrm{IV}5} = \tfrac{1}{6} - R'(\tfrac{1}{16} + \tfrac{5}{2}w^2 + 5w^4) - R''(\tfrac{1}{16} + \tfrac{5}{2}w'^2 + 5w'^4)\\
&\qquad = \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{32} - \tfrac{5}{2}.\tfrac{1}{24} - 5.\tfrac{1}{24}(w^2 + w'^2) + \tfrac{5}{2}w'^2.\,w^2;\\
&\qquad = \tfrac{1}{32} - \tfrac{5}{24}(w^2 + w'^2) + \tfrac{5}{2}w^2.\,w'^2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{7} - R'.a'^6 - R''a''^6 - R'''a'''^6 - R^{\mathrm{IV}}.\,a^{\mathrm{IV}6} =\\
&\qquad = \tfrac{1}{7} - R'(\tfrac{1}{32} + \tfrac{15}{8}w^2 + \tfrac{15}{2}w^4 + 2w^6) - R''(\tfrac{1}{32} + \tfrac{15}{8}w'^2 + \tfrac{15}{2}w'^4 + 2w'^6);\\
&\qquad = \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{64} - \tfrac{15}{8}.\tfrac{1}{24} - \tfrac{15}{2}\left(\tfrac{1}{24}(w^2 + w'^2) - \tfrac{1}{2}w^2.\,w'^2\right) - \tfrac{1}{12}(w^4 + w^2w'^2 + w'^4)\\
&\qquad\qquad + w^2.\,w'^2(w^2 + w'^2);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{8} - R'a'^7 - R''a''^7 - R'''a'''^7 - R^{\mathrm{IV}}.\,a^{\mathrm{IV}7} =\\
&\qquad = \tfrac{1}{8} - R'(\tfrac{1}{64} + \tfrac{21}{16}w^2 + \tfrac{35}{4}w^4 + 7.\,w^6) - R''(\tfrac{1}{64} + \tfrac{21}{16}w'^2 + \tfrac{35}{4}w'^4 + 7.\,w'^6);\\
&\qquad = \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{128} - \tfrac{21}{16}.\tfrac{1}{24} - \tfrac{35}{4}\left(\tfrac{1}{24}(w^2 + w'^2) - \tfrac{1}{2}w^2.\,w'^2\right)\\
&\qquad\qquad - 7\left(\tfrac{1}{24}(w^4 + w^2w'^2 + w'^4) - \tfrac{1}{2}w^2.\,w'^2(w^2 + w'^2)\right).
\end{aligned}$$

Die folgenden Glieder darzustellen, hat für unsern Zweck keinen weitern Werth.

97. Bemerkung. Die vorigen Betrachtungen könnten allgemein dienen, um die Quadratur und ihre Correction für alle gegebnen Werthe von a', a'', a''', a^{iv} zu finden. Die Correction wird aber, wenn die Reihen-Entwickelung gut angeordnet ist, desto geringer, je mehrere der ersten Correctionsglieder wegfallen, und es steht offenbar in unsrer Gewalt die sämmtlichen vier Glieder, die in §. 95. aufgeführt sind, verschwinden zu machen, da wir zu Bestimmung der vier Gröſsen a' a'' a''' a^{iv} vier Gleichungen erhalten, wenn wir die Coefficienten von K in diesen Gliedern $= 0$ setzen. Die so bestimmten Werthe von a', a'', a''', a^{iv} sind offenbar die vortheilhaftesten, indem dann K^{viii} das erste Correctionsglied giebt, und die in andern Fällen bedeutendern Correctionsglieder hier verschwinden.

98. Aufgabe. Es sollen so wie in §. 94. vier Ordinaten gegeben sein, man sucht die vortheilhaftesten Werthe von a', a'', a''', a^{iv}.

Auflösung. Wenn ich $w^2 + w'^2 = u$ und $w^2 . w'^2 = v^2$ nenne, so wird $u = \frac{3}{14}$; $v^2 = \frac{3}{560}$,

$(w + w')^2 = 0{,}36067\ 0724$; $(w - w')^2 = 0{,}06790\ 0704$.

$w = 0{,}43056\ \ 816$; $w' = 0{,}16999\ \ 052$.

Also $a' = 0{,}06943\ 184$; $a'' = 0{,}33000\ 948$.

$a''' = 0{,}66999\ 052$; $a^{\text{iv}} = 0{,}93056\ 816$.

Beweis. Um die vortheilhaftesten Werthe von a', a'', a''', a^{iv} zu finden, muſsten wir so viele der höchsten Correctionsglieder gleich 0 setzen, als die Zahl der unbestimmten Gröſsen a', a'', a''', a^{iv} betrug. Das giebt in unserm Falle, mit Hülfe der schon gebrauchten Substitutionen folgende vier Gleichungen.

I. $0 = \frac{1}{80} - \frac{1}{12}(w^2 + w'^2) + w^2 . w'^2$;

II. $0 = \frac{1}{32} - \frac{5}{24}(w^2 + w'^2) + \frac{5}{2} . w^2 . w'^2$;

III. $0 = \frac{11}{224} - \frac{5}{16}(w^2 + w'^2) + \frac{15}{4} w^2 . w'^2 - \frac{1}{12}(w^4 + w^2 w'^2 + w'^4)$
$+ w^2 . w'^2 (w^2 + w'^2)$;

IV. $0 = \frac{1}{16} - \frac{35}{96}(w^2 + w'^2) + \frac{35}{8} w^2 . w'^2 - \frac{7}{24}(w^4 + w^2 w'^2 + w'^4)$
$+ \frac{7}{2} . w^2 . w'^2 (w^2 + w'^2)$;

Die erste ist mit der zweiten einerlei, da jene mit $\frac{5}{2}$ multiplicirt diese giebt; wir wollen daher aus der ersten Gleichung den Werth
$w^2 . w'^2 = \frac{1}{12}(w^2 + w'^2) - \frac{1}{80}$., in die dritte setzen, und endlich sehn, ob die vierte Gleichung eben die Werthe wie die dritte giebt. Ich setze
$w^2 + w'^2 = u$ und $w^2 . w'^2 = v^2$, also
$v^2 = \frac{1}{12} u - \frac{1}{80}$; und aus der dritten
Gleichung $0 = \frac{11}{224} - \frac{5}{16} u + \frac{15}{4} v^2 - \frac{1}{12}(u^2 - v^2) + v^2 u$;
oder $0 = \frac{11}{224} - \frac{5}{16} u + \frac{15}{4}\left(\frac{1}{12} u - \frac{1}{80}\right) - \frac{1}{12} u^2 + \frac{u}{144} - \frac{1}{960} + \frac{1}{12} u^2 - \frac{1}{80} u$;

das ist $0 = \frac{11}{224} - \frac{3}{64} + \frac{1}{144} u - \frac{1}{960} - \frac{1}{80} u$,
oder $0 = \frac{1}{8 \cdot 7 \cdot 15} - \frac{1}{5 \cdot 9 \cdot 4} \cdot u$,
$u = \frac{3}{14}$;
also $v^2 = \frac{1}{56} - \frac{1}{80} = \frac{3}{560}$.

Eben diese Werthe findet man aus der vierten Gleichung, wenn man sie mit der ersten verbindet, und da sich also zeigt, dafs diese beiden Werthe von u und v allen vier Gleichungen Genüge thun, so erhellt, dafs unsre, vielleicht etwas willkürlich scheinende Voraussetzung, dafs a' eben so viel unter $\frac{1}{2}$, als a^{iv} über $\frac{1}{2}$ sein solle, und eben so $a'' + a'''$ die Summe $= 1$ geben solle, ein glücklicher Kunstgriff war, um die hier gesuchten Werthe zu bestimmen. Wir haben also nun, da $w^2 + w'^2 = \frac{3}{14}$, $w . w' = \sqrt{\frac{3}{560}}$ ist,

$w + w' = \sqrt{\left\{\frac{3}{14} + \sqrt{\frac{3}{140}}\right\}}$,
$w - w' = \sqrt{\left\{\frac{3}{14} - \sqrt{\frac{3}{140}}\right\}}$.

Hieraus ergeben sich die in der Auflösung angegebnen Werthe, da $a' = \frac{1}{2} - w$; $a'' = \frac{1}{2} - w'$; $a''' = \frac{1}{2} + w'$; $a^{\text{iv}} = \frac{1}{2} + w$ ist.

99. Bemerkung. Die hier gelehrte Bestimmung derjenigen Werthe von a', a'' etc., welche für eine festgesetzte Anzahl von Coordinaten die vortheilhaftesten sind, ist der Hauptsache nach aus Gaufs trefflicher Abhandlung: nova methodus integralium valores proxime inveniendi genommen. Da ich, um den wesentlichsten Zweck dieser Methode ins Licht zu stellen, nur ein leichtes Beispiel gewählt habe, so war es mir möglich, ohne die schwierigen Kunstgriffe, die Gaufs bei der ganz allgemeinen Entwickelung anwendet, zum Zwecke zu gelangen, und ich glaube dadurch genug gethan zu haben, um zum Studium jener Abh. vorzubereiten.

Ich theile nun nur noch aus jener Abh. folgende Zahlenbestimmungen mit, die sich dort noch auf mehr Decimalstellen berechnet finden.

Wenn nur zwei Ordinaten gegeben sein sollen, so mufs man

$a' = 0{,}21132\ \ 487$
$a'' = 0{,}78867\ \ 513$,

und $R' = R'' = 0{,}5$ nehmen.

Wenn drei Ordinaten gegeben sein sollen, so mufs man

$a' = 0{,}11270\ \ 167$
$a'' = 0{,}5$.
$a''' = 0{,}88729\ \ 833$

und $R' = R''' = \frac{5}{18}$, $R'' = \frac{4}{9}$ nehmen.

Wenn vier Ordinaten gegeben sind, so mufs

$a' = 0{,}06943\ \ 184$; $a'' = 0{,}33000\ \ 948$;
$a''' = 0{,}66999\ \ 052$; $a^{\text{iv}} = 0{,}93056\ \ 816$,

sein, und dann ist $R' = R^{\text{iv}} = 0{,}17392\ \ 742$;
$R'' = R''' = 0{,}32607\ \ 258$.

Wenn fünf Ordinaten gegeben sind, so mufs man

$a' = 0{,}04691\ 008;\ a'' = 0{,}23076\ 534;$

$a''' = 0{,}5;$

$a^{iv} = 0{,}76923\ 466;\ a^{v} = 0{,}95308\ 992,$

sein, und folglich $R' = R^{v} = 0{,}11846\ 344;$

$R'' = R^{iv} = 0{,}23931\ 434;$

$R''' = 0{,}28444\ 444.$

Für sechs Ordinaten

$a' = 0{,}03376\ 524;\quad a'' = 0{,}16939\ 531;$

$a''' = 0{,}38069\ 041;\quad a^{iv} = 0{,}61930\ 959;$

$a^{v} = 0{,}83060\ 469;\quad a^{vi} = 0{,}96623\ 476,$

$R' = R^{vi} = 0{,}08566\ 224;$

$R'' = R^{v} = 0{,}18038\ 079;$

$R''' = R^{iv} = 0{,}23395\ 697.$

Für sieben Ordinaten

$a' = 0{,}02544\ 604;\quad a'' = 0{,}12923\ 441;$

$a''' = 0{,}29707\ 742;\quad a^{iv} = 0{,}5.$

$a^{v} = 0{,}70292\ 258;\quad a^{vi} = 0{,}87076\ 559.$

$a^{vii} = 0{,}97455\ 396.$

$R' = R^{vii} = 0{,}06474\ 248;$

$R'' = R^{vi} = 0{,}13985\ 270;$

$R''' = R^{v} = 0{,}19091\ 503.$

$R^{iv} = 0{,}20897\ 959.$

100. Beispiel. Das Integral von $d\phi\sqrt{(1 - \frac{1}{4} Sin^2 \phi)}$ von $\phi = 0$ bis $\phi = 45°$ zu bestimmen.

1. Durch zwei aufs vortheilhafteste gewählte Ordinaten. Da ζ hier 45° ist, so mufs für diese Ordinate

$\zeta a' = 45.\ 0{,}21132\ 487 = 9°,\ 50962 = 9°.\ 30'.\ 34'',632.$

$\zeta a'' = 35°.\ 29'.\ 25{,}368.$

genommen werden, woraus sich $z' = 0 = 0{,}9965808.$

$z'' = 0 = 0{,}9569407.$

also $R'(z' + z'') = 0{,}9767607;\quad \zeta = 45° = 0{,}7853982.$

$\zeta.\ R'(z' + z'') = 0{,}767146.$

2. Durch drei am vortheilhaftesten gewählte Ordinaten.

$\zeta a' = 5°.\ 4', 17'', 67.$

$\zeta a'' = 22°.\ 30'.$

$\zeta a''' = 39.\ 55'.\ 42'', 33.$

$z' = 0{,}9990225.\qquad z'' = 0{,}9815228;\qquad z''' = 0{,}9471078.$

$R'(z' + z''') + R''z'' = \frac{5}{18}.\ 1{,}9461303 + \frac{4}{9}.\ 0{,}9815228 = 0{,}9768241.$

und $\zeta(R'z' + R''z'' + R'''z''') = 0{,}767196.$

3. Durch vier am vortheilhaftesten gewählte Ordinaten.

$\zeta a' = 3^\circ.\ 7'.\ 27'',96.$ $\zeta a'' = 14^\circ.\ 51'.\ 1'',54$

$\zeta a''' = 30^\circ.\ 8'\ 58'',46.$ $\zeta a^{\text{IV}} = 41^\circ.\ 52'.\ 32'',04.$

$z' = 0{,}9996286.$ $z'' = 0{,}9917553.$

$z''' = 0{,}9679532.$ $z^{\text{IV}} = 0{,}9426591.$

$$R'(z' + z^{\text{IV}}) + R''(z'' + z''') = 0{,}3378171 + 0{,}6390072.$$

$$\zeta(R'z' + R''z'' + R''z''' + R'z^{\text{IV}}) = 0{,}767196.$$

Da diese Rechnung mit der vorigen übereinstimmt, so können wir sicher sein, schon mit drei Ordinaten bis auf 6 Decimalen genau gerechnet zu haben.

4. Ich füge noch eben das Integral von $\phi = 45^\circ$ bis $\phi = 90^\circ$, durch vier Ordinaten berechnet hinzu.

$\zeta.\ a' = 48^\circ.\ 7'.\ 27'',96$ $\zeta.\ a'' = 59^\circ.\ 51'.\ 1'',54.$

$\zeta.\ a''' = 75^\circ.\ 8'.\ 58'',46.$ $\zeta.\ a^{\text{IV}} = 86^\circ.\ 52'.\ 32'',04.$

$z' = 0{,}9281135.$ $z'' = 0{,}9017018.$

$z''' = 0{,}8754554.$ $z^{\text{IV}} = 0{,}8664542.$

$$R'(z' + z^{\text{IV}}) + R''(z'' + z''') = 0{,}3121244 + 0{,}579482232$$

$$\zeta(R'z' + R''z'' + R''z''' + R'z^{\text{IV}}) = 0{,}700266.$$

5. Das ganze Integral von $\phi = 0$ bis $\phi = 90$ Grad ist also $= 1{,}467462.$ — Nach Legendre soll es $= 1{,}467463.$ sein.

Dieses ganze Integral stellt die Länge des Quadranten einer Ellipse dar, deren halbe grosse Axe $= 1$, die halbe kleine Axe $= \frac{\sqrt{3}}{2}$ ist.

6. Um uns noch näher von der Brauchbarkeit dieser Methode zu überzeugen, wollen wir nun das ganze Integral von $\phi = 0$ bis $= 90^\circ$ durch vier Ordinaten berechnen, und sehen, welchen Grad von Genauigkeit wir da erhalten.

$\zeta a' = 6^\circ.\ 14'.\ 55'',92;$ $\zeta.\ a'' = 29^\circ.\ 42'.\ 3'',08.;$

$\zeta a''' = 60^\circ.\ 17'\ 56'',92;$ $\zeta\ a^{\text{IV}} = 83^\circ.\ 45'\ 4'',08$

$z' = 0{,}9985182;$ $z'' = 0{,}9688277,$

$z''' = 0{,}9007625;$ $z^{\text{IV}} = 0{,}8677338,$

$$R'(z' + z^{\text{IV}}) + R''(z'' + z''') = 0{,}3245924 + 0{,}6096221.$$

$$\zeta(R'z' + R''z'' + R'''z''' + R^{\text{IV}}z^{\text{IV}}) = 1{,}4674607,$$

also nur in der sechsten Decimalstelle um 2 Einheiten fehlerhaft.

101. Bemerkung. Diese und alle ähnliche Methoden finden eine Schwierigkeit da, wo die Ordinate oder die in dx multiplicirte Function von x unendlich wird. In den Fällen, wo das geschieht, kann nun entweder der Flächenraum gleichfalls unendlich werden, und dann ist offenbar von seiner Bestimmung nicht die Rede, (wie bei dem Raume zwischen der conischen Hyperbel und ihren Asymptoten), oder er wird endlich, und alsdann muss man Mittel suchen, den der Asymptote zunächst liegenden Raum durch eine wirkliche Integration zu bestimmen.

102. **Aufgabe.** Die Berechnung des Flächenraums einer Curve vermittelst berechneter Ordinaten da anzuwenden, wo die Ordinate zur Asymptote wird.

Auflösung. Wenn man auch den vollständigen Werth von $\int z\,dx$ nicht bequem darstellen kann, so läſst sich dies doch in den meisten Fällen für den schmalen Raum erreichen, der zwischen der Asymptote und einer Ordinate, deren Werth schon nicht mehr so ungemein groſs wird, liegt: diesen schmalen Raum sucht man also durch Integration und rechnet dann von dieser Ordinate an durch Hülfe mehrerer berechneter Ordinaten weiter.

103. **Beispiel.** $\int \frac{a\,dx}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}}$ von $x=0$ bis $x=a$ zu finden.

Da hier, für $x=a$, der Werth von $z=\frac{a}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}}$ unendlich wird, so kann man nicht erwarten, daſs durch berechnete Ordinaten der Raum genau zu bestimmen sei. Es ist daher nothwendig, hier durch Ordinaten nur bis dahin etwa zu rechnen, wo $x=0{,}999.a$ ist, und das übrige durch die ersten Glieder einer Reihe zu suchen. Es sei $x=a-ua$ also

$$\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{3}}=(2u-u^2)^{-\frac{1}{3}}=(2u)^{-\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}\,\frac{u^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{16}}+\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}}{2}\,\frac{u^{\frac{5}{3}}}{\sqrt[3]{2.4}}+\text{etc.}$$

setzen; dann wird von $u=0{,}001$ bis $u=0$, das Integral

$$\int\frac{-du}{(2u-u^2)^{\frac{1}{3}}}=\frac{\frac{3}{2}.0{,}01}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{3.2.\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{3}{5}\,0{,}00001+\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{0{,}00000001}{\sqrt[3]{2}};$$

der übrige Theil des Integrals läſst sich aber durch Ordinaten sehr wohl berechnen, jedoch ist es vortheilhafter den Theil, wo $\frac{1}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}}$ sich langsam ändert, etwa von $x=0$ bis $x=0{,}9$ abgesondert zu berechnen, und von $x=0{,}9$ bis $x=0{,}999$. wieder abgesondert zu berechnen.

Noch einige merkwürdige Quadraturen.

104. **Aufgabe.** Den Flächenraum der durch die Gleichung $z=\frac{a}{\log\frac{x}{a}}$ dargestellten Linie zu finden.

Auflösung. Wenn ich $a = 1$ setze, so ist $\int \frac{dx}{\log x}$ der verlangte Flächenraum, auf dessen Bestimmung es ankömmt.

Fig. 1. zeigt, dafs von C oder von $x = 0$ an die Fläche zuerst einen negativen Werth erhält; sie ist $= - \infty$ für $x = CA = 1$; aber wenn $x > 1$ ist, kömmt zu diesem negativen Werthe ein positiver, und es läfst sich, wie wir sehn werden, der Werth von x angeben, bei welchem der positive Theil der Fläche dem negativen gleich ist, wo also die Summe der von C an gerechneten Flächen $= 0$ ist. Das geschieht ungefähr bei X, und wenn dieser Punct einmal bekannt ist, so hat die weitere Berechnung keine so grofse Schwierigkeit und die Fläche ist von hier an positiv. Um die Rechnung bequemer zu führen, setze ich $\log x = u$, $x = e^u$; $dx = e^u . du$; also

$$\frac{dx}{\log x} = \frac{e^u\, du}{u} = \frac{du}{u} + du + \tfrac{1}{2}\, u\, du + \frac{1}{1.2.3}\, u^2 du + \frac{u^3\, du}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

und $$\int \frac{dx}{\log x} = Const + \log . u + u + \frac{u^2}{1.2.2} + \frac{u^3}{1.2.3.3.} + \frac{u^4}{1.2.3.4.4} + \text{etc.}$$

Um die *Constans* zu bestimmen, sollten wir hier es so einrichten, dafs der Werth des Integrals $= 0$ ist für $x = 0$, aber mit $x = 0$ gehört $u = - \infty$ zusammen, und der Werth der *Constans* scheint daher aus der Gleichung

$$0 = Const + \log (- \infty) - \infty + \frac{\infty^2}{2} - \text{etc.}$$

nicht bestimmt zu werden. Bei einer etwas nähern Betrachtung der Reihe wird sich aber ergeben, dafs ihr Werth keineswegs unendlich ist, wenn x bis auf 0 abnimmt, sondern dafs er sich einem bestimmten Werthe nähert, je kleiner x wird.

Es sei $x = \frac{1}{v}$ ein kleiner Bruch; $dx = \frac{-dv}{v^2}$

$\log x = - \log v$, $\frac{dx}{\log x} = \frac{dv}{v^2 \log v}$. Setze ich jetzt $w = \log . v$, $v = e^w$, $dv = e^w dw$, so ist

$$\frac{dx}{\log x} = \frac{e^{-w} . dw}{w} = \frac{dw}{w} - dw + \frac{1}{1.2.}\, w\, dw - \frac{w^2\, dw}{1.2.3} + \frac{w^3\, dw}{1.2.3.4} - \frac{w^4\, dw}{1.2.3.4.5} + \text{etc.}$$

$$\int \frac{dx}{\log x} = Const . + \log . w - w + \frac{w^2}{1.2.2.} - \frac{w^3}{1.2.3.3.} + \frac{w^4}{1.2.3.4.4.} - \text{etc.}$$

Nimmt man hier für v sehr grofse Werthe an, so bemerkt man bald, dafs die Reihe sich einem beständigen Werthe nähert; es kömmt also nur darauf an zu finden, welchen Werth der Fläche Cuw die Reihe für einen kleinen Werth von $x = Cu$ giebt, und diesen mit der auf andrem Wege gefundenen Fläche zu vergleichen, so hat man die *Constans*. Die folgende ausgeführte Berechnung zeigt dieses.

Es sei $w = 10$, $v = e^{10} = 22026{,}4657948067$, $x = \frac{1}{22026{,}4657948067}$; so läſst sich die Fläche Cuw, die einem so kleinen Werthe von x entspricht, mit ziemlicher Genauigkeit finden; den Werth der Reihe setze ich umständlich ausgerechnet hieher:

$log.\ nat.\ 10 = 2{,}30258\ 50929\ 94.$	$- w = - 10{,}00000\ 00000\ 00.$
$\frac{1}{4} w^2 = 25{,}00000\ 00000\ 00.$	$- \frac{1}{18} w^3 = - 55{,}55555\ 55555\ 55.$
$\frac{1}{1....4.4} w^4 = 104{,}16666\ 66666\ 66.$	$- \frac{1}{1....5.5} w^5 = -166{,}66666\ 66666\ 66.$
$\frac{1}{1....6.6.} w^6 = 231{,}48148\ 14814\ 81.$	$- \frac{1}{1....7.7} w^7 = -283{,}44671\ 20181\ 41.$
$\frac{1}{1....8.8} w^8 = 310{,}01984\ 12698\ 41.$	$- \frac{1}{1....9.9} w^9 = -306{,}19243\ 58220\ 65.$
$\frac{1}{1....10.10} w^{10} = 275{,}57319\ 22398\ 59.$	$- \frac{1}{1....11.11.} w^{11} = -227{,}74643\ 98676\ 52.$
$\frac{1}{1....12.12} w^{12} = 173{,}97297\ 48989\ 01.$	$- \frac{1}{1....13.13} w^{13} = -123{,}53110\ 64370\ 89.$
$\frac{1}{1....14.14} w^{14} = 81{,}93389\ 71266\ 41.$	$- \frac{1}{1....15.15} w^{15} = - 50{,}98109\ 15454\ 65.$
$\frac{1}{1....16.16} w^{16} = 29{,}87173\ 33274\ 21.$	$- \frac{1}{1....17.17} w^{17} = - 16{,}53798\ 38490\ 91.$
$\frac{1}{1....18.18} w^{18} = 8{,}67733\ 72047\ 70.$	$- \frac{1}{1....19.19} w^{19} = - 4{,}32665\ 01298\ 02.$
$\frac{1}{1....20.20} w^{20} = 2{,}05515\ 88116\ 56.$	$- \frac{1}{1....21.21} w^{21} = - 0{,}93204\ 48125\ 42.$
$\frac{1}{1....22.22} w^{22} = 0{,}40439\ 96087\ 48.$	$- \frac{1}{1....23.23} w^{23} = - 0{,}16818\ 13117\ 67.$
$\frac{1}{1....24.24} w^{24} = 0{,}06715\ 57321\ 29.$	$- \frac{1}{1....25.25} w^{25} = - 0{,}02578\ 78011\ 37.$
$\frac{1}{1....26.26} w^{26} = 0{,}00953\ 69087\ 05.$	$- \frac{1}{1....27.27} w^{27} = - 0{,}00340\ 13666\ 16.$
$\frac{1}{1....28.28} w^{28} = 0{,}00117\ 13890\ 13.$	$- \frac{1}{1....29.29} w^{29} = - 0{,}00038\ 99987\ 20.$
$\frac{1}{1....30.30} w^{30} = 0{,}00012\ 56662\ 54.$	$- \frac{1}{1....31.31} w^{31} = - 0{,}00003\ 92298\ 40.$
$\frac{1}{1....32.32} w^{32} = 0{,}00001\ 18762\ 21.$	$- \frac{1}{1....33.33} w^{33} = - 0{,}00000\ 34897\ 99.$

$\frac{1}{1....34.34}w^{34} =$ 0,00000 09962 23.	$-\frac{1}{1....35.35}w^{35} = -$ 0,00000 02765 03.
$\frac{1}{1....36.36}w^{36} =$ 0,00000 00746 73.	$-\frac{1}{1....37.37}w^{37} = -$ 0,00000 00196 36.
$\frac{1}{1....38.38}w^{38} =$ 0,00000 00050 31.	$-\frac{1}{1....39.39}w^{39} = -$ 0,00000 00012 57.
$\frac{1}{1....40.40}w^{40} =$ 0,00000 00003 06.	$-\frac{1}{1....41.41}w^{41} = -$ 0,00000 00000 73.
$\frac{1}{1....42.42}w^{42} =$ 0,00000 00000 17.	$-\frac{1}{1....43.43}w^{43} = -$ 0,00000 00000 04.
$\frac{1}{1....44.44}w^{44} =$ 0,00000 00000 01.	

Die Summe dieser Glieder ist

0,57721 98218 69,

also die Fläche, welche sich von $x = 0$ bis an

$$x = \frac{1}{22026,4657948067} = 0,00004 \quad 53998 \quad 84$$

erstreckt, ist = 0,57721 98218 69 — *Const.*
Die *Const* also nicht viel von 0,577 verschieden.

Da zu dem eben angegebnen Werthe von x oder zu $x = \frac{1}{e^{10}}$, die Ordinate $= \frac{1}{log\ x} = \frac{1}{10}$ gehört, so ist auf jeden Fall der Flächenraum *Cuw* (Fig. 1.) kleiner als das Parallelogramm = 0,1. (0,00004 53998 84), aber größser als eine Parabel, deren Scheitel in *C* läge, also gröſser als $\frac{2}{3}$. 0,1. 0,00004 53998 84; und dadurch ist der Werth der *Constans* schon zwischen die beiden Grenzen 0,57721 98218 69 — 0,00000 4539988
und 0,57721 98218 69 — 0,00000 3026659.
oder zwischen 0,57721 52818 81,
und 0,57721 67952 10.
beschränkt; wir können ihn aber noch genauer finden.

Berechne ich nämlich den Flächenraum von
$x = 0,00000 \quad 03998 \quad 84$, bis
$x = 0,00004 \quad 53998 \quad 84$, nach Gauſs's Methode durch fünf Ordinaten, so ist $\zeta = 0,000045$;

$a'\,\zeta = 0,00000\ 2110953$; $a''\,\zeta = 0,0000\ 1038\ 4440$.
$a'''\,\zeta = 0,0000225$. $a^{\text{iv}}\,\zeta = 0,00003\ 4615\ 560$;
$a^{\text{v}}\,\zeta = 0,00004\ 28890\ 47$.

Die Abscissen zu denen die Werthe der Ordinaten berechnet werden müssen, sind 0,00000 03998 84 + $\zeta a'$, und so ferner,

also = 0,00000 25108 37; 0,00001 07843 24;
0,00002 28998 84; 0,00003 50154 44;
und 0,00004 3288931.

Für diese wird $z' = 0{,}07755\ 0073$. $z'' = 0{,}08743\ 2334$.
$z''' = 0{,}09359\ 4586$. $z^{iv} = 0{,}09741\ 0079$.
6 8540

$z^{v} = 0{,}09952\ 6119$.
32 02

$\zeta(R'(z' + z^{v}) + R''(z'' + z^{iv}) + R'''z''') = 0{,}00000\ 41325\ 84. = T$

Zu diesem Flächenraum, der sich von $x = 0{,}00000\ 03998\ 84$. an erstreckt, kömmt noch der zwischen 0 und diesem Werthe von x liegende, der wenig von

0,00000 03998 84. 0,06788 = 0,00000 0027144,

verschieden ist, da für $x = 0{,}00000\ 0399884$, $z = 0{,}06788$ ist, und die Curve sich so ungemein nahe an die Senkrechte anschließt. Die ganze Fläche ist also etwas kleiner als 0,00000 41603 46 und die *Const.* ist also etwas größer als 0,57721 9821869 — 0,00000 41603 46 oder 0,57721 56615

Dieser Werth der *Const.* ist bis zur achten Decimalstelle genau, indem genauere Rechnungen sie = 0,57721 56649 0153 geben *); um ihn noch genauer zu erhalten, müßte man besonders das kleine zwischen $x = 0$ und $x = 0{,}00000\ 0399884$ liegende Stück, welches offenbar kleiner als ein Parallelogramm ist, sorgfältiger berechnen; hier aber genügt es, gezeigt zu haben, wie man sie bestimmen kann.

Hat man einmal die *Const.* bestimmt, so läßt sich das Integral $\int \frac{dx}{\log x}$ oder der Integrallogarithme von x für andre Werthe von x finden. Diese Integrallogarithmen haben von $x = 0$ bis $x = 1$ negative, bis ins Unendliche wachsende Werthe; für $x > 1$ sind sie negativ und abnehmend, bis für $x = 1{,}451369\ldots$ **) der Integrallogarithme = 0, wird, und für größere Werthe immerfort wachsend positiv.

105. Aufgabe. Den Flächenraum der Curve zu finden, für welche

$$z = \frac{a^2 . \operatorname{Sin} \frac{x}{a}}{x} \text{ ist.}$$

*) Mascheroni in s. adnotationes ad calculum integralem Euleri und Soldner in s. théorie et tables d'une nouvelle fonction transscendante haben die Constans auf anderem Wege genauer gefunden, gleichwohl schien es mir der Mühe nicht unwerth, zu zeigen, wie man auf diesem so einfachen Wege zu dieser Bestimmung gelangen könnte.

**) Königsberger Archiv für Naturwissensch. u. Mathem. p. 1.

Auflösung. 1. Für ziemlich kleine Werthe von x giebt die Reihe für $Sin\, x$ gut convergirend, wenn ich $a = 1$ setze,

$$\int \frac{dx \,.\, Sin\, x}{x} = \int dx \left\{ 1 - \frac{1 \,.\, x^2}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4.5} - \frac{x^6}{1.2\ldots.7} + \text{etc.} \right\}$$

$$= x - \frac{x^3}{1.2.3.3.} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7.7} + \frac{x^9}{1.2\ldots.9.9} - \text{etc.}$$

2. Wenn man auf diese Weise den Werth des Integrals bis zum Beispiel $x = \frac{1}{2} = 28^\circ.38'.52''$ berechnet hat, so kann man für gröfsere Werthe $x = \alpha + u$ also $\frac{dx.\, Sin\, x}{x} = \frac{du\, Sin\, \alpha.\, Cos\, u + du\, Cos\, \alpha\, Sin\, u}{\alpha + u}$ setzen, welches sich leicht in eine nach den Potenzen von u fortgehende Reihe entwickeln läfst, die, wenn man das Integral bis zu $x = \alpha$ berechnet hat, durch Integration die Zunahme jenes für $x = \alpha$ gefundenen Werthes angiebt.

3. Noch leichter würde man aber auch hier durch die Gaufsische Methode seinen Zweck erreichen, die hier um so mehr vortheilhaft anzuwenden ist, da keines der höhern Differentiale unendlich wird, also die anzubringenden Correctionen nie sehr erheblich werden können.

106. In Fig. 32. ist diese Curve dargestellt. Sie giebt $z = 1$ für $x = 0$; sie schneidet die Abscissenlinie da, wo $x = \pi$, $x = 2\pi$ u. s. w. ist, und schmiegt sich immer näher an die Abscissenlinie an, je gröfser x wird.

Da aus $z = \frac{Sin\, x}{x}$, folgt $\frac{dz}{dx} = \frac{x\, Cos\, x - Sin\, x}{x^2}$;
so ist die Curve mit x parallel, da wo $x = tang.\, x$ ist, also für $x = 0$, $x = 257^\circ.27'.$ $x = 442^\circ.38'$ und so weiter.

Ferner ist $\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{Sin\, x\, (2 - x^2) - 2x\, Cos\, x}{x^3}$, also liegen da Wendungspuncte, wo $tang\, x = \frac{2x}{2 - x^2}$ ist, das ist wo $x = 120^\circ$ ungefehr ist u. s. w.

In welcher Beziehung der Ausdruck für $\int \frac{dx\, Sin\, x}{x}$ mit den Integrallogarithmen stehe, hat Bessel im Königsberger Archiv gezeigt; auch die Reihe §. 105. Nr. 1. läfst es schon übersehn.

Vierter Abschnitt.

Von der Rectification der krummen Linien.

107. **Erklärung.** Eine krumme Linie **rectificiren**, heifst, die Länge eines Bogens derselben bestimmen.

108. **Aufgabe.** Einen Ausdruck für das Differential des Bogens zu finden.

Auflösung. 1. Es sei die Curve durch senkrechte Coordinaten $AX = x$, $XZ = z$ (Fig. 33.) bestimmt, so ist offenbar die Sehne $ZW = \sqrt{(dx^2 + dz^2)}$ desto näher mit dem Bogen einerlei, je kleiner sie ist, und folglich $ds = \sqrt{(dx^2 + dz^2)}$ gleich dem Differential des Bogens.

2. Wenn (Fig. 34.) die Curve durch den veränderlichen Winkel $BAU = \varphi$, und Abstand $AU = r$ bestimmt ist, so denke man sich mit dem Halbmesser AU den Kreisbogen $WU = r\,d\varphi$ beschrieben, und $WV = dr$, wird die Aenderung von r sein, die mit der Aenderung von φ zusammen gehört; der Bogen $UV = ds$ der Curve kann alsdann angesehen werden als die dritte Seite des bei W rechtwinklichen unendlich kleinen Drei-Eckes, und es ist $ds = \sqrt{(dr^2 + r^2 d\varphi^2)}$.

109. **Aufgabe.** Den Bogen der Parabel zu finden.

Auflösung. Da für die gewöhnliche Parabel $z = p^{\frac{1}{2}} . x^{\frac{1}{2}}$,

$dz = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}}.dx$ ist, so wird $ds = \sqrt{(dx^2 + dz^2)} = dx\sqrt{\left(1 + \frac{p}{4x}\right)}$.

Es sei $\frac{4x+p}{4x} = w^2$; so ist $x = \frac{p}{4(w^2-1)}$; $dx = -\frac{pw\,dw}{2(w^2-1)^2}$,

$$ds = -\frac{pw^2 dw}{2(w^2-1)^2} = -\tfrac{1}{2}p\left\{\frac{\frac{1}{4}dw}{(w+1)^2} + \frac{\frac{1}{4}dw}{(w-1)^2} - \frac{\frac{1}{4}dw}{w+1} + \frac{\frac{1}{4}dw}{w-1}\right\},$$

$$S = Const + \tfrac{1}{8}p\left\{\frac{1}{w+1} + \frac{1}{w-1} + log\,\frac{w+1}{w-1}\right\},$$

$$\text{oder } S = Const + \tfrac{1}{2}\sqrt{(px + 4x^2)} + \tfrac{1}{8}p\,log\,\frac{\sqrt{(4x+p)} + \sqrt{(4x)}}{\sqrt{(4x+p)} - \sqrt{(4x)}},$$

wo die $Const = 0$ ist, wenn der Bogen vom Scheitel an soll gerechnet werden, oder wenn $S = 0$ sein soll für $x = 0$.

Unter dieser Voraussetzung ist also

$$S = \sqrt{(\tfrac{1}{4}z^2 + x^2)} + \tfrac{1}{4}p\,log\left(\sqrt{\frac{4x}{p}} + \sqrt{\left(1 + \frac{4x}{p}\right)}\right),$$

$$\text{oder } = \sqrt{(\tfrac{1}{4}z^2 + x^2)} + \tfrac{1}{4}p.\,log\left(\frac{2z}{p} + \sqrt{\left(1 + \frac{4z^2}{p^2}\right)}\right).$$

110. Für $x=\frac{1}{4}p$, $z=\frac{1}{2}p$ ist also der Bogen $=\frac{1}{4}p\{\sqrt{2}+log.nat(1+\sqrt{2})\}$.
Für $x=z=p$ ist der Bogen $=\frac{1}{2}p\sqrt{5}+\frac{1}{4}p.\,log\,(2+\sqrt{5})$.

111. Aufgabe. Den Bogen der Ellipse zu finden.

Auflösung. 1. Aus der Gleichung $y=\frac{b}{a}\sqrt{(a^2-x^2)}$ folgt

$$dy=\frac{-b}{a}\frac{x\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}},\ ds=\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\frac{dx\sqrt{\left(a^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2\right)}}{\sqrt{(a^2-x^2)}}.$$

Ein Ausdruck wie dieser, worin zwei Quadratwurzeln aus Gröfsen die x^2 enthalten, vorkommen, läfst sich durch keine Substitution rational machen, und daher nur durch Reihen integriren. Diese Integration wird aber bequemer durch folgende Substitution.

2. Es sei $x=a\,Sin\,\phi$, so wird zu Folge der Gleichung für die Ellipse $y^2=b^2-b^2\,Sin^2\,\phi$, also $y=b\,Cos\,\phi$,

$$\sqrt{(dx^2+dy^2)}=a\,d\phi.\sqrt{\left(1-\frac{a^2-b^2}{a^2}Sin^2\,\phi\right)}=ds.$$

Diese Formel läfst sich zwar ebenfalls nur durch Reihen integriren; sie bietet aber eine leichtere Rechnung dar, wenn man für verschiedene Werthe von ϕ, Werthe von $a.\sqrt{\left(1-\frac{a^2-b^2}{a^2}Sin^2\phi\right)}=$

$$=a\sqrt{\left\{1-\frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{a}Sin\,\phi\right\}}\sqrt{\left\{1+\frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{a}Sin\,\phi\right\}}$$

durch Logarithmen berechnen will.

Da, wie es mir scheint, die genäherten Integralwerthe besser nach Gaufs's Methode als durch Reihen gefunden werden, so theile ich die Entwickelung in Reihen nicht mit. Ein Beispiel für die Bestimmung des Werthes dieses Integrals kömmt im vorigen Abschnitt §. 100. vor.

112. Die Integrale von der Form $\int\frac{dx\sqrt{(f^2-g^2x^2)}}{\sqrt{(h^2-k^2x^2)}}$ kommen sehr häufig vor und lassen sich alle auf elliptische Bogen zurückführen. Es ist nämlich $\frac{\sqrt{(f^2-g^2x^2)}}{\sqrt{(h^2-k^2x^2)}}=\frac{f}{h}\frac{\sqrt{\left(\frac{h^2}{k^2}-\frac{g^2h^2}{f^2k^2}x^2\right)}}{\sqrt{\left(\frac{h^2}{k^2}-x^2\right)}}$ wenn man also $\frac{h}{k}=a$ und $\frac{gh}{fk}=\frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{a}$ setzt, so drückt das Integral den mit $\frac{f}{h}$ multiplicirten Bogen einer Ellipse aus, deren beide halbe Axen $=a$ und $=b$ sind.

Alle diese Formeln lassen sich auch auf die Form $\int d\phi \sqrt{(1-c^2 \, Sin^2\phi)}$ zurückführen, und es wäre also nothwendig, Tafeln zu haben, die für jedes Verhältnifs der Axen, wodurch zugleich c gegeben wäre, die Länge der zu jedem Werth von ϕ gehörigen elliptischen Bögen angäben. Besäfsen wir solche Tafeln, so würden für Integrale von der angegebnen Form sich die Zahlenwerthe eben so leicht angeben lassen, wie wir die Logarithmen durch Aufschlagen der Tafeln anzugeben gewohnt sind.

113. Aufgabe. Den Bogen der Hyperbel zu finden.

Auflösung. Da $z = \frac{b}{a}\sqrt{(x^2 - a^2)}$; $ds = \sqrt{(dx^2 + dz^2)}$

$$= \frac{dx \sqrt{\left(\frac{a^2+b^2}{a^2} x^2 - a^2\right)}}{\sqrt{(x^2-a^2)}}$$

so müfste hier $\int \frac{dx \sqrt{\left(\frac{a^2+b^2}{a^2} x^2 - a^2\right)}}{\sqrt{(x^2-a^2)}}$ gesucht werden, wozu man sich ebenfalls der Näherungs-Methoden bedienen könnte.

114. Aufgabe. Den Bogen der Cycloide zu finden.

Auflösung. Nach den Formeln im 1. Th. §. 610. ist für die Cycloide $x = r - r \, Cos\, \phi$, $z = r\phi - r \, Sin\, \phi$

also $ds = \sqrt{(dx^2 + dz^2)} = r.\sqrt{2}.\, d\phi.\sqrt{(1 - Cos\,\phi)} = \frac{r.\sqrt{2}.\, d\phi.\, Sin\,\phi}{\sqrt{(1 + Cos\,\phi)}}$,

oder da $dx = r\, d\phi\, Sin\,\phi$, und $1 + Cos\,\phi = \frac{2r-x}{r}$ ist,

$$ds = \frac{\sqrt{2r}.\, dx}{\sqrt{(2r-x)}}; \quad s = -2\sqrt{(4r^2 - 2rx)} + Const.$$

Soll der Bogen also von da an gerechnet werden, wo $x = 2r$ ist, so wird die $Const = 0$, und man erhält die ganze Hälfte eines stetig fortgehenden Theiles der Cycloide $= 4r$, als den bei einer halben Umwälzung des Kreises beschriebenen Bogen.

Vergleichungen zwischen verschiedenen auf der Lemniscata, oder der Ellipse oder der Hyperbel abgeschnittenen Bögen.

115. Bemerkung. Obgleich die Integrale, welche die Bögen der Lemniscata, der Ellipse und der Hyperbel ausdrücken, nicht in algebraischer Form gefunden werden können, so lassen sich dennoch auf jeder dieser Curven

Bögen angeben, die entweder eine gegebne Summe machen, oder sonst auf eine bestimmte Weise durch einander gegeben werden.

116. Bemerkung. Die Gleichung, welche wir (1. Th. §. 391.) für die Lemniscata durch rechtwinkliche Coordinaten ausgedrückt fanden, war

$$(z^2+x^2)^2 = 2a^2\,(x^2-z^2);$$

nennen wir hier (Fig. 35.) die Sehne $CU = \sqrt{(x^2+z^2)} = u$, so ist

$$u^4 = 2\,a^2\,(2x^2-u^2),$$

$$x^2 = \frac{u^4}{4a^2} + \tfrac{1}{2}u^2;$$

$$\text{also } z^2 = \tfrac{1}{2}u^2 - \frac{u^4}{4a^2},$$

oder wenn ich $CA = a\sqrt{2} = c$ setze,

$$x^2 = u^2\left(\frac{u^2}{2c^2}+\tfrac{1}{2}\right) \text{ und } z^2 = u^2\left(\tfrac{1}{2}-\frac{u^2}{2c^2}\right).$$

Das Differential des Bogens $= ds = \sqrt{(dx^2+dz^2)}$ läſst sich bequem durch u ausdrücken; denn es ist

$$dx^2 = \frac{du^2\,(c^2+2u^2)^2}{2c^2\,(u^2+c^2)};\quad dz^2 = \frac{du^2\,(c^2-2u^2)^2}{2c^2\,(c^2-u^2)};$$

$ds = \sqrt{(dx^2+dz^2)} = \dfrac{c^2\,du}{\sqrt{(c^4-u^4)}}$. Eine Formel, die sich nicht anders als durch Reihen integriren läſst.

117. Aufgabe. Es ist von C aus (Fig. 35.) eine Sehne CU gezogen; man soll eine zweite Sehne CV so ziehen, daſs der Bogen CU mit dem Bogen CV zusammengenommen, gleich dem Quadranten CA der Lemniscata sei.

Auflösung. 1. Wenn man vom Mittelpuncte C aus die Sehne CU zieht und sie $= u$ nennt, so muſs $CV = u' = c\sqrt{\dfrac{c^2-u^2}{c^2+u^2}}$ genommen werden, damit der Bogen CV gleich dem Bogen AU sei.

2. Wenn man in A die Senkrechte AS errichtet und auf ihr $AT = CU$ nimmt, so trifft die grade Linie CT den Bogen der Lemniscata in V so, daſs Bogen CU + Bogen CV = Bogen $CUVA$ ist.

Beweis. 1. Es sei die Sehne $CU = u$, die Sehne $CV = u'$,
der Bogen $CU = s$, der Bogen $CV = s'$,

so ist $s = \displaystyle\int\frac{c^2\,du}{\sqrt{(c^4-u^4)}}$ und $s' = \displaystyle\int\frac{c^2\,du'}{\sqrt{(c^4-u'^4)}}$, und damit $s+s'=b$ sei,

$$\text{muſs } b = \int\frac{c^2\,du}{\sqrt{(c^4-u^4)}} + \int\frac{c^2\,du'}{\sqrt{(c^4-u'^4)}}$$

$$\text{oder } 0 = \frac{du}{\sqrt{(c^4-u^4)}} + \frac{du'}{\sqrt{(c^4-u'^4)}}, \text{ sein.}$$

Diese Forderung erfüllt der angegebne Werth von u', indem er

$$du' = \frac{-cudu}{\sqrt{(c^2+u^2)}\sqrt{(c^2-u^2)}} - \frac{cudu\sqrt{(c^2-u^2)}}{\sqrt{(c^2+u^2)^3}} = \frac{-2c^3udu}{(c^2+u^2)\sqrt{(c^4-u^4)}}$$

und $\sqrt{(c^4-u'^4)} = c^3 . \frac{2u}{c^2+u^2}$, also $\frac{c^2du'}{\sqrt{(c^4-u'^4)}} = -\frac{c^2du}{\sqrt{(c^4-u^4)}}$,

giebt. Dadurch würde aber bloſs allgemein $s+s' = Const$ angegeben; daſs diese $Const = CUVA = b$ sei, erhellt daraus, weil für $u = c = CA$, $u' = 0$ wird, und also unter den Fällen, wo CU und CV sich zu einem immer gleichen Bogen ergänzen, hier der eine Fall, wo ihre Summe $= b$ wird, gegeben ist.

2. Es sei $AT = CU = u$, so ist $tang\ TCA = \frac{u}{c} = \frac{QV}{CQ} = \frac{z'}{x'}$

aber es war (§. 116.), $x'^2 = u'^2 \left(\frac{u'^2}{2c^2} + \frac{1}{2}\right)$

$$z'^2 = u'^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{u'^2}{2c^2}\right)$$

also $\frac{z'}{x'}$ allemal $= \sqrt{\left(\frac{c^2-u'^2}{c^2+u'^2}\right)}$ und folglich hier,

wo $u'^2 = \frac{c^2(c^2-u^2)}{(c^2+u^2)}$; $\frac{z'}{x'} = \frac{u}{c}$.

Auf diese Weise kann man also unzählige gleiche Bögen auf der Lemniscata, den einen von C aus, den andern von A aus auftragen.

118. Um die Gleichung $\frac{du}{\sqrt{(c^4-u^4)}} + \frac{du'}{\sqrt{(c^4-u'^4)}} = 0$ vollständig zu integriren, dient die Bemerkung, daſs

$$c^4(u^2+u'^2-f^2) + 2uu'g^2c^2 + f^2u^2u'^2 = 0$$

$$\frac{du}{(c^4u' + f^2u^2.u' + ug^2c^2)} = \frac{-du'}{(c^4u + f^2u'^2u + u'g^2c^2)}$$

giebt, und daſs zugleich aus eben der Gleichung

$$c^4u' + u'f^2u^2 + ug^2c^2 = c^2\sqrt{(c^4f^2 + u^2(g^4+f^4-c^4) - f^2u^4)},$$
$$c^4u + uf^2u'^2 + u'g^2c^2 = c^2\sqrt{(c^4f^2 + u'^2(g^4+f^4-c^4) - f^2u'^4)},$$

folgt, also die Differentialgleichung auch

$$\frac{du}{c^2\sqrt{(c^4f^2 + u^2(g^4+f^4-c^4) - f^2u^4)}} + \frac{-du'}{c^2\sqrt{(c^4f^2+u'^2(g^4+f^4-c^4)-f^2u'^4)}}$$

wird. Diese geht aber in $\frac{du}{\sqrt{(c^4-u^4)}} + \frac{du'}{\sqrt{(c^4-u'^4)}} = 0$

über, wenn $g^2 = \sqrt{(c^4-f^4)}$ ist, und folglich ist die zu Anfang dieser Betrachtung angenommene Gleichung, wenn man darin $g^2 = \pm\sqrt{(c^4-f^4)}$ setzt,

das Integral von $\frac{du}{\surd(c^4 - u^4)} + \frac{du'}{\surd(c^4 - u'^4)} = 0$, und dieses Integral ist also: $c^4(u^2 + u'^2 - f^2) + f^2 u^2 u'^2 + 2uu'c^2 \surd(c^4 - f^4) = 0$.
Dafs dieses ein vollständiges Integral ist, erhellt, weil die unbestimmte *Constans* $= f^2$ darin vorkömmt.

119. Aufgabe. Es ist eine willkührliche Sehne $CU = h$ in der Lemniscata gezogen, man verlangt zwei Bögen zu bestimmen, deren Summe = Bogen CU sei.

Auflösung. Wenn die eine Sehne $u' = 0$ wird, so mufs offenbar die andre $= h$ sein, also ist nach der eben gefundenen Integralformel $f^2 = h^2$, und die Gleichnng $c^4(u^2 + u'^2 - h^2) + h^2 u^2 u'^2 + 2uu'c^2 \surd(c^4 - h^4) = 0$, giebt an, wie u' durch u bestimmt wird, dafs nämlich

$$u' = -\frac{c^2 \{u\surd(c^4 - h^4) + h\surd(c^4 - u^4)\}}{c^4 + h^2 u^2}$$

sein mufs.

120. Ist hier $h = c$, so ist $u' = c\surd\left(\frac{c^2 - u^2}{c^2 + u^2}\right)$, wie in §. 117.

121. Aufgabe. Einen gegebnen Bogen der Lemniscata in zwei gleiche Hälften zu theilen.

Auflösung. Wenn die Sehne h des ganzen Bogens gegeben ist, so müfste man $u' = u$, also (§. 119.)

$$c^4 u + h^2 u^3 = c^2 u\surd(c^4 - h^4) + c^2 h\surd(c^4 - u^4),$$

haben, damit u die Sehne sei, welche der Hälfte des Bogens zugehört.

Wenn man diese Gleichung rational in Beziehung auf u macht, so ist sie

$$0 = (c^4 + h^2 u^2)\{u^4 h^2 - 2u^2 c^2(\surd(c^4 - h^4) - c^2) - c^4 h^2\},$$

also mufs, da der erste Factor unmögliche Werthe für u giebt,

$$u^2 = \frac{c^2}{h^2}\surd(c^4 - h^4) - \frac{c^4}{h^2} \pm \surd\{2c^4 - 2c^2\surd(c^4 - h^4)\}\frac{c^2}{h^2},$$

oder $u^2 = \frac{c^2}{h^2}\{-c^2 + \surd(c^4 - h^4) + c\surd 2 . \surd(c^2 - \surd(c^4 - h^4))\}$ sein.

Wenn hier $c = h$ ist oder der Quadrant der Lemniscata halbirt werden soll, so ist in diesem Falle $u^2 = c^2(\surd 2 - 1)$; $u = CL = c\surd 0{,}414214 = c.\ 0{,}6436$.

122. Aufgabe. Einen gegebnen Bogen der Lemniscata zu verdoppeln.

Auflösung. Es sei u die Sehne des einfachen, h die Sehne des doppelten Bogens, so läfst sich h aus der Gleichung

$$c^4 u + h^2 u^3 - c^2 h\surd(c^4 - u^4) = c^2 u\surd(c^4 - h^4)$$

bestimmen. Sie giebt nämlich quadrirt

$$h^4 u^6 + c^4 h^2 u^4 + c^8 h^2 - (2c^2 h^3 x^3 + 2c^6 uh)\surd(c^4 - u^4) + c^4 u^2 h^4 = 0.$$

oder da diese Gleichung sich mit $u^2 h^2 + c^4$ dividiren läſst

$$h = \frac{2c^2 u \sqrt{(c^4 - u^4)}}{c^4 + u^4} = CM, \text{ wenn } u = CU \text{ ist.}$$

123. **Bemerkung.** Es lassen sich noch mehrere Vergleichungen zwischen Bögen der Lemniscata anstellen *), um aber die Verbindung dieser Bestimmungen mit denen für die Ellipse besser zu übersehn, will ich die Gleichung anders darstellen **).

Es sei $u = c \, Cos \, \phi$ so ist $\frac{c^2 du}{\sqrt{(c^4 - u^4)}} = \frac{-c d\phi . Sin \, \phi}{\sqrt{(1 - Cos^4 \phi)}} = \frac{-c d\phi}{\sqrt{(1 + Cos^2 \phi)}}$

$$= \frac{-c d\phi}{\sqrt{2} . \sqrt{(1 - \frac{1}{2} Sin^2 \phi)}}$$

und es käme nun auf die Vergleichung der Integrale $\int \frac{d\phi}{\sqrt{(1 - \frac{1}{2} Sin^2 \phi)}}$ an.

124. **Lehrsatz.** Wenn $\int \frac{d\phi}{\sqrt{(1 - \frac{1}{2} Sin^2 \phi)}} + \int \frac{d\phi'}{\sqrt{(1 - \frac{1}{2} Sin^2 \phi')}}$

$$= \int \frac{d\mu}{\sqrt{(1 - \frac{1}{2} Sin^2 \mu)}}$$

sein soll, oder wenn zwei Bögen der Lemniscata von C ausgehend gesucht werden, deren Sehnen $u = c \, Cos \, \phi$ und $u' = c \, Cos \, \phi'$ sind, und deren Summe gleich dem Bogen sein soll, welcher der Sehne $= c \, Cos \, \mu$ zugehört: so muſs man einen der drei Winkel so annehmen, daſs der Gleichung

$Cos \, \phi \, Cos \, \phi' - Sin \, \phi . Sin \, \phi' . \sqrt{(1 - \frac{1}{2} Sin^2 \mu)} = Cos \, \mu$ Genüge geschehe.

Beweis. Diese Gleichung $Cotang \, \phi . Cotang . \phi' - \frac{Cos \, \mu}{Sin \, \phi . Sin \, \phi'}$

$$= \sqrt{\left(1 - \frac{Sin^2 \mu}{2}\right)}$$

giebt differentiirt $\frac{d\phi}{Sin \, \phi} (Cos \, \phi' - Cos \, \phi \, Cos \, \mu) + \frac{d\phi'}{Sin \, \phi'} (Cos \, \phi - Cos \, \phi' \, Cos \, \mu) = 0$

und eben jene Gleichung läſst sich auf die zwei, ihr gleichgeltenden Formen

$$Cos \, \mu \, Cos \, \phi + Sin \, \mu \, Sin \, \phi \sqrt{(1 - \frac{1}{2} Sin^2 \phi')} = Cos \, \phi'$$
$$Cos \, \mu \, Cos \, \phi' + Sin \, \mu \, Sin \, \phi' \sqrt{(1 - \frac{1}{2} Sin^2 \phi)} = Cos \, \phi$$

bringen, die quadrirt einerlei Resultat geben; die eben gefundne Differentialgleichung giebt daher

$$d\phi . Sin \, \mu . \sqrt{(1 - \frac{1}{2} Sin^2 \phi')} + d\phi' . Sin \, \mu \sqrt{(1 - \frac{1}{2} Sin^2 \phi)} = 0,$$

diese Gleichung ist einerlei mit dem Differential von

*) Die zum Theil schon von Fagnani entdeckt und von Euler näher erörtert sind, besonders in d. Abh. de comparatione arcuum irrectificabilium. (Novi Commentarii acad. Petropolitanae. Tom. VI.)

**) Nach Legendre Exercices du calcul intégral. — Prem. Part.

$$\int \frac{d\phi}{\sqrt{\left(1-\frac{Sin^2\phi}{2}\right)}} + \int \frac{d\phi'}{\sqrt{(1-\frac{1}{2}\,Sin^2\phi')}} = \int \frac{d\mu}{\sqrt{(1-\frac{1}{2}\,Sin^2\mu)}},$$

wenn man hier den letzteren Bogen als constant ansieht, wie es offenbar geschehen mufs, wenn jene beiden Bogen eine bestimmte Summe ausmachen sollen.

125. Jene drei Gleichungen, die völlig gleichbedeutend sind, geben

$$\frac{Cos\,\phi.\,Cos\,\phi' - Cos\,\mu}{Sin\,\phi\,Sin\,\phi'} = \sqrt{(1-\tfrac{1}{2}\,Sin^2\mu)};$$

$$\frac{Cos\,\phi' - Cos\,\mu\,Cos\,\phi}{Sin\,\mu.\,Sin\,\phi} = \sqrt{(1-\tfrac{1}{2}\,Sin^2\phi')};$$

$$\frac{Cos\,\phi - Cos\,\mu\,Cos\,\phi'}{Sin\,\mu.\,Sin\,\phi'} = \sqrt{(1-\tfrac{1}{2}\,Sin^2\phi)}.$$

Da nun bekanntlich im sphärischen Drei-Ecke, dessen Seiten ϕ, ϕ', μ sind, der *Cosinus* des der Seite ϕ gegenüberstehenden Winkels Φ, $Cos\,\Phi = \dfrac{Cos\,\phi - Cos\,\phi'\,Cos\,\mu}{Sin\,\phi'\,Sin\,\mu}$ ist, so hat man, wenn die drei Winkel des sphärischen DreiEcks Φ, Φ', M heifsen

$$-\,Cos\,M = \sqrt{(1-\tfrac{1}{2}\,Sin^2\mu)},$$
$$+\,Cos\,\Phi = \sqrt{(1-\tfrac{1}{2}\,Sin^2\phi)},$$
$$+\,Cos\,\Phi' = \sqrt{(1-\tfrac{1}{2}\,Sin^2\phi')}.$$

Eine merkwürdige Relation, die zwischen den Werthen von μ, ϕ, ϕ' statt findet.

126. Die Gleichung $Cos\,\phi' = Cos\,\mu\,Cos\,\phi + Sin\,\mu\,Sin\,\phi\,\sqrt{(1-\frac{1}{2}\,Sin^2\phi')}$, giebt aufgelöst $Cos\,\phi' = \dfrac{Cos\,\phi\,Cos\,\mu + Sin\,\phi\,Sin\,\mu\,\sqrt{(1-\frac{1}{2}\,Sin^2\mu)}.\sqrt{(1-\frac{1}{2}\,Sin^2\phi)}}{1-\frac{1}{2}\,Sin^2\phi\,Sin^2\mu}$

Soll also $\mu = 90$ Grad sein, so ist $Cos\,\phi' = \dfrac{Sin\,\phi\,\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(1-\frac{1}{2}\,Sin^2\phi)}}$

oder $tang\,\phi' = \dfrac{Cos\,\phi}{Sin\,\phi\,\sqrt{\frac{1}{2}}}$;

$tang\,\phi'.\,tang\,\phi.\,\sqrt{\tfrac{1}{2}} = 1.$

127. Ganz ähnliche Formeln finden statt, wenn auch die Differentialformeln allgemeiner $= \dfrac{d\phi}{\sqrt{(1-f^2\,Sin^2\phi)}}$ wären, alsdann nämlich ist, damit

$$\int \frac{d\phi}{\sqrt{(1-f^2\,Sin^2\phi)}} + \int \frac{d\phi'}{\sqrt{(1-f^2\,Sin^2\phi')}} = \int \frac{d\mu}{\sqrt{(1-f^2\,Sin^2\mu)}}$$

werde $Cos\,\mu = Cos\,\phi.\,Cos\,\phi' - Sin\,\phi.\,Sin\,\phi'\,\sqrt{(1-f^2\,Sin^2\mu)}$, ferner für $\mu = 90°$, $tang\,\phi.\,tang\,\phi'.\,\sqrt{(1-f^2)}. = 1.$ und so weiter.

128. Bemerkung. Wir haben schon oben (§. 111.) gesehen, daſs der Bogen der Ellipse durch $s = a\int d\varphi . \sqrt{\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot Sin^2\varphi\right)}$, ausgedrückt wird, wenn die Abscisse $x = a\, Sin\, \varphi$, die Ordinate $y = b\, Cos\, \varphi$ ist. Die so angegebnen Bögen werden von der kleinen Axe $= b$ an gerechnet, wenn sie mit $\varphi = 0$ verschwinden sollen, und umfassen den ganzen Quadranten der Ellipse, wenn $\varphi = 90$ Grad ist. Nennen wir nun die Bögen der Ellipse $= s$, $= s'$, $= s''$, wenn sie dem Werthe $= \varphi$, $= \varphi'$, $= \varphi''$ entsprechen, und S den Bogen der einem constanten Werthe des Winkels $= \mu$ entspricht, so ergeben sich folgende Sätze.

129. Lehrsatz. Wenn der Winkel μ so genommen wird, daſs $Cos\,\mu = Cos\,\varphi\; Cos\,\varphi' - Sin\,\varphi . Sin\,\varphi' . \sqrt{\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} Sin^2\mu\right)}$ so ist für die Bögen der Ellipse S, s, s', die zu den Werthen von φ, $= \mu$, $= \varphi$, $= \varphi'$ gehören,

$$s + s' - S = \frac{a^2 - b^2}{a} Sin\,\varphi . Sin\,\varphi' . Sin\,\mu .$$

Beweis. Da μ eine beständige Gröſse und folglich S den gleichfalls unveränderlichen, dazu gehörenden Bogen der Ellipse bedeuten soll, so giebt unsre Gleichung differentiirt $ds + ds' = \left(\frac{a^2 - b^2}{a}\right) Sin\,\mu\, (d\varphi\; Cos\,\varphi\; Sin\,\varphi'$
$+ d\varphi'\; Cos\,\varphi'\; Sin\,\varphi)$
und die Richtigkeit dieser Gleichung muſs erwiesen werden. Es ist aber

$$ds + ds' = a\,d\varphi \sqrt{\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} Sin^2\varphi\right)} + a\,d\varphi' . \sqrt{\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} Sin^2\varphi'\right)}$$

oder weil die Gleichung

$$Cos\,\mu = Cos\,\varphi\; Cos\,\varphi' - Sin\,\varphi . Sin\,\varphi' \sqrt{\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} Sin^2\mu\right)},$$

auch giebt,

$$\sqrt{\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} Sin^2\varphi\right)} = \frac{Cos\,\varphi - Cos\,\mu\; Cos\,\varphi'}{Sin\,\mu\; Sin\,\varphi'},$$

$$\text{und } \sqrt{\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} Sin^2\varphi'\right)} = \frac{Cos\,\varphi' - Cos\,\mu\; Cos\,\varphi}{Sin\,\mu\; Sin\,\varphi},$$

$$\text{auch } ds + ds' = a \left\{\frac{d\varphi\; Cos\,\varphi - d\varphi\; Cos\,\mu\; Cos\,\varphi'}{Sin\,\mu\; Sin\,\varphi'} + \frac{d\varphi'\; Cos\,\varphi' - d\varphi'\; Cos\,\mu\; Cos\,\varphi}{Sin\,\mu\; Sin\,\varphi}\right\}$$

$$\text{oder} = a\, \frac{\{d\varphi . Sin\,\varphi\; Cos\,\varphi + d\varphi'\; Sin\,\varphi'\; Cos\,\varphi' + Cos\,\mu\; d.(Cos\,\varphi\; Cos\,\varphi')}{Sin\,\mu . Sin\,\varphi . Sin\,\varphi'};$$

$$\text{oder} = a . \frac{d. \left(\frac{1}{2} Sin^2\varphi + \frac{1}{2} Sin^2\varphi' + Cos\,\mu\; Cos\,\varphi\; Cos\,\varphi'\right)}{Sin\,\mu . Sin\,\varphi . Sin\,\varphi'}.$$

Daſs aber dieses mit $\frac{a^2-b^2}{a}$ $Sin\,\mu.\, d\,(Sin\,\varphi\; Sin\,\varphi')$ einerlei ist, erhellt leicht; denn

$$Cos\,\varphi\; Cos\,\varphi' - Cos\,\mu = Sin\,\varphi\; Sin\,\varphi' \sqrt{\left(1 - \frac{a^2-b^2}{a^2}\, Sin^2\,\mu\right)},$$

giebt: $Cos^2.\varphi.\; Cos^2\,\varphi' - 2\; Cos\,\mu\; Cos\,\varphi\; Cos\,\varphi' + Cos^2\,\mu$

$$= Sin^2\,\varphi\; Sin^2\,\varphi' - \frac{(a^2-b^2)}{a^2}\, Sin^2\,\mu\; Sin^2\,\varphi.\; Sin^2\,\varphi';$$

oder $1 + Cos^2\,\mu - Sin^2\,\varphi - Sin^2\,\varphi' - 2\; Cos\,\mu\; Cos\,\varphi.\; Cos\,\varphi'$

$$= -\frac{a^2-b^2}{a^2}\, Sin^2\,\mu\; Sin^2\,\varphi\; Sin^2\,\varphi';$$

und folglich $-\,d\,(Sin^2\,\varphi + Sin^2\,\varphi' + 2\; Cos\,\mu\; Cos\,\varphi\; Cos\,\varphi')$

$$= -\,2.\,\frac{a^2-b^2}{a^2}\, d.\,(Sin\,\varphi\; Sin\,\varphi')\; Sin^2\,\mu\; Sin\,\varphi'.\,Sin\,\varphi,$$

wie es nach unserm Lehrsatz sein sollte.

130. Soll $\mu = 90°$ sein, so ist φ' durch φ vermittelst der Gleichung $tang.\,\varphi' = \frac{a}{b}\; Cotang\,\varphi$ bestimmt, und dann Bogen s + Bogen s' — Bogen S

$$= \frac{a^2-b^2}{a}\; Sin\,\varphi.\; Sin\,\varphi'.$$

$$= \frac{a^2-b^2}{a}\; Sin\,\varphi.\,\frac{a}{b}\; \frac{Cotg\,\varphi}{\sqrt{\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\, Cotg^2\,\varphi\right)}}$$

$$= (a^2-b^2)\cdot\frac{Cos\,\varphi\; Sin\,\varphi}{\sqrt{(b^2\, Sin^2\,\varphi + a^2\; Cos^2\,\varphi)}}.$$

131. **Bemerkung.** Wenn man um den Mittelpunct C der Ellipse (Fig. 36.) mit dem Halbmesser $CA = a$ einen Kreisquadranten AD beschreibt, und in irgend einem Puncte X der Haupt-Axe die Senkrechte XY errichtet, so ist $YCD = \varphi$, wenn $CX = x$ ist. Unter $\int \frac{a\,d\varphi}{\sqrt{\left(1 - \frac{a^2-b^2}{a^2}\, Sin^2\,\varphi\right)}}$ muſs man also den Bogen BZ der Ellipse verstehen, und unsre vorigen Sätze lassen sich nun so darstellen:

1. Wenn man $\mu = 90$ Grad, also S gleich dem Quadranten der Ellipse nimmt, so erhält man zwei Bögen, BZ, BI, deren Summe den Quadranten der Ellipse um die Gröſse $\frac{a^2-b^2}{a}.\; Sin\,\varphi.\; Sin\,\varphi'$ übertrifft, wenn man die Winkel $\varphi = DCY$, $\varphi' = DCG$, so nimmt, daſs $tang.\,\varphi' = \frac{a}{b}\; Cotang\,\varphi$ ist. —

Das heifst: Man zeichnet den willkührlichen Winkel $DCY = \varphi$, zieht von da wo CY den Kreis schneidet, die Senkrechte YX auf die Haupt-Axe, um durch sie den Endpunct Z des einen Bogens BZ, der von dem Endpuncte B der kleinen Axe anfängt, zu bestimmen. Man zieht dann in den Endpuncten beider Axen die Berührungslinien BE und AF, nimmt auf der letztern das Stück AF so grofs als das durch CY auf der erstern abgeschnittene Stück BE, und zieht CF, um den Punct G des Kreises abzuschneiden, welchem der in derselben Ordinate liegende Endpunct I des andern Bogens BI entspricht; denn nun ist $AF = a\ Cotang.\ \varphi' = BE = b.\ tang\ \varphi$. Und diese Bögen sind es nun deren Summe = dem Quadranten $+ \frac{a^2 - b^2}{a} Sin\ \varphi.\ Sin\ \varphi'$ ist.

2. Aber auch, wenn ein andrer Winkel $DCG = \mu$ und durch ihn ein Bogen $BI = S$ gegeben wird, so läfst sich zu dem willkürlich angenommenen Bogen BZ, der durch den Winkel $= DCY = \varphi$ bestimmt ist, ein andrer Bogen BK vermittelst des Winkels $DCM = \varphi'$ finden, so dafs Bogen $BZ +$ Bogen $BK =$ Bogen $BI + \frac{a^2 - b^2}{a}.\ Sin\ \varphi.\ Sin\ \varphi'.\ Sin\ \mu$ ist, wenn μ gegen φ und φ' so bestimmt ist, wie §. 129. angiebt.

132. Lehrsatz. Wenn man die beiden Winkel $DCY = \varphi$ und $DCF = \varphi'$ so nimmt, dafs $a\ Cotang\ \varphi' = b\ tang\ \varphi$ ist, und dadurch auf der Ellipse die Endpuncte der Bögen BZ, BI bestimmt; wenn man an den durch einen dieser Winkel bestimmten Punct Z der Ellipse die Tangente ZU zieht und auf ihr durch eine vom Mittelpuncte C herabgefällte Senkrechte das Stück ZU abschneidet: so ist die Summe der Bögen BZ, BI gleich dem Quadranten der Ellipse $+ ZU$.

Beweis. Nach §. 131. 1. haben wir nur nöthig zu beweisen, dafs

$$ZU = \frac{a^2 - b^2}{a} Sin\ \varphi.\ Sin\ \varphi' = \frac{(a^2 - b^2)\ Sin\ \varphi.\ Cos\ \varphi}{\sqrt{(a^2\ Cos^2\ \varphi + b^2\ Sin^2\ \varphi)}} \text{ ist.}$$

Wir hatten aber $a\ Sin\ \varphi = x$, $b\ Cos\ \varphi = z$,

$$a\,d\varphi\ Cos\ \varphi = dx,\ -\ b\,d\varphi\ Sin\ \varphi = dz,$$

also $a^2\ Cos^2\ \varphi + b^2\ Sin^2\ \varphi = \frac{dx^2 + dz^2}{d\varphi^2}$, und es ist also zu beweisen dafs

$ZU = \frac{(a^2 - b^2)\ x\,dx}{a^2 . \sqrt{(dx^2 + dz^2)}}$ sei. Zieht man die Normallinie ZN, so ist

$ZU = NV = CN.\ Cos\ CNV = CN.\ \frac{dx}{\sqrt{(dx^2 + dz^2)}}$ und es ist, weil die Subnormallinie $= - \frac{z\,dz}{dx}, = \frac{b^2}{a^2} x$ ist, $CN = x - \frac{b^2}{a^2} x = x \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)$, also

$ZU = \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) \frac{x\,dx}{\sqrt{(dx^2 + dz^2)}}$ und damit die Richtigkeit des Satzes gerechtfertiget. Es ist auch $ZU = IW$, wenn DCG nach den vorigen Regeln aus DCY bestimmt und IW die Tangente in I ebenso begrenzt ist.

133. Nimmt man also die Puncte Z und I so, daſs das auf den an sie gezognen Tangenten vermittelst der von C aus gezognen Senkrechten abgeschnittene Stück gleich groſs ausfällt, so ist dieses Stück der *Tangente* $= BZ - AI$, weil es $= BZ + BI - BZIA$ war.

134. **Lehrsatz.** Wenn man den Winkel μ so nimmt, daſs $Cos\,\mu = Cos^2\,\varphi'' - Sin^2\,\varphi''.\sqrt{\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\,Sin^2\,\mu\right)}$ ist, so ist der doppelte mit φ'' zusammengehörende Bogen der Ellipse um so viel gröſser als der mit μ zusammengehörende Bogen der Ellipse, als der Ausdruck $\frac{a^2 - b^2}{a}\,Sin^2\,\varphi''.Sin\,\mu$ angiebt.

Beweis. Dies ist eine bloſse Folgerung aus §. 129. wenn man dort $s = s'$ und $\varphi = \varphi'$ hier $= \varphi''$ setzt.

135. **Lehrsatz.** Nimmt man $DCQ = \varphi''$ so, daſs $Cotang^2\,\varphi'' = \frac{b}{a}$, so ist der zugehörige Bogen BP der Ellipse verdoppelt gleich dem Quadranten $+ (a - b)$.

Beweis. Nehmen wir im vorigen §. $\mu = 90°$, so ergäbe sich $tang\,\varphi^{2''} = \frac{a}{b}$, und der zu φ'' gehörige Bogen BP der Ellipse giebt alsdann doppelt genommen so viel als der Quadrant der Ellipse, zusammen genommen mit dem durch die Senkrechte auf der Tangente abgeschnittenen Stücke. Aber der allgemeine Werth von ZU §. 132. ist nun $= \frac{a^2 - b^2}{a}\,Sin^2\,\varphi'' = (a - b)$, und es ist folglich $2\,BP = BPA + PR, = BPA + a - b$,

wenn $tang\,DCQ = \sqrt{\frac{a}{b}}$ ist.

136. **Aufgabe.** Einen Bogen auf der Ellipse anzugeben, der genau gleich dem halben Quadranten sei.

Auflösung. Ist sein einer Endpunct durch den Winkel φ, der andre durch den Winkel μ bestimmt, so muſs man diese Winkel so nehmen, daſs

$$Cos\,(\mu - \varphi) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{b} + \sqrt{a}}{\sqrt{(a + b)}}\right),$$

$$Cos\,(\mu + \varphi) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{(a + b)}}\right)\ \text{ist.}$$

Beweis. Nehmen wir einen dritten Winkel ϕ' so an, dafs $Cos\, \phi' = Cos\, \mu\, Cos\, \phi + Sin\, \phi .\, Sin\, \mu \sqrt{\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} Sin^2\, \phi'\right)}$ ist, so wird (§. 129., vergl. mit §. 124.)

$$S - s = s' - \frac{a^2 - b^2}{a}\, Sin\, \mu .\, Sin\, \phi .\, Sin\, \phi',$$

wenn S, s, s' die mit μ, ϕ, ϕ' zusammengehörenden Bögen der Ellipse sind. Aber die in der Auflösung angegebnen Werthe für $Cos\, (\mu - \phi)$ und $Cos\, (\mu + \phi)$ geben $Cos\, \mu\, Cos\, \phi = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{b}}{\sqrt{(a+b)}}$;

$$Sin\, \mu\, Sin\, \phi . = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{a}}{\sqrt{(a+b)}},$$

$$Cos\, \phi' = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{b} + \frac{1}{2}\sqrt{a}\sqrt{\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} Sin^2\, \phi'\right)}}{\sqrt{(a+b)}}$$

also $Cos\, \phi' = \sqrt{\frac{b}{a+b}}$; $Sin\, \phi' = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{(a+b)}}$

und $S - s = s' - \frac{1}{2}(a - b)$.

Der so bestimmte Bogen s' ist aber eben der, von welchem §. 135. erwiesen wurde, dafs

$$2\, s' = \text{dem Quadr. d. Ellipse} + (a - b)$$

$$\text{also } s' - \tfrac{1}{2}(a - b) = \tfrac{1}{2}.\ \text{Quadr. d. Ellipse}$$

sei. Mithin ist $S - s =$ dem halben Quadranten der Ellipse, wenn die Endpuncte dieser Bögen so bestimmt sind, wie es die Auflösung fordert. In Fig. 36. ist ST dieser Bogen.

137. Bemerkung. Auch die Bögen der Hyperbel erlauben eine ähnliche Vergleichung. Setzt man in der Gleichung für die Hyperbel $z^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$, $x = \frac{a}{Cos\, \phi}$, so ist $z = b\, tang.\, \phi$ und das Differential des Bogens $\sqrt{(dx^2 + dz^2)} = d\phi \frac{\sqrt{(b^2 + a^2 Sin^2\, \phi)}}{Cos^2\, \phi} = ds.$

oder $ds = \sqrt{(a^2 + b^2)} . \frac{d\phi}{Cos^2\, \phi} \sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{a^2 + b^2} Cos^2\, \phi\right)}$.

Dies giebt durch theilweises Integriren

$$s = \sqrt{(a^2 + b^2)} .\, tang\, \phi . \sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{a^2 + b^2} Cos^2\, \phi\right)} - \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} . \int \frac{Sin^2\, \phi .\, d\phi}{\sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{a^2 + b^2} Cos^2\, \phi\right)}};$$

oder $s = \sqrt{(a^2+b^2} \Big\{ tang\,\varphi . \sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{a^2+b^2} Cos^2\,\varphi\right)} + \frac{b^2}{a^2+b^2} .$

$$\int \frac{d\,\varphi}{\sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{a^2+b^2} Cos^2\,\varphi\right)}} - \int d\varphi . \sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{a^2+b^2} Cos^2\,\varphi\right)} \Big\}$$

so daſs der Hyperbelbogen durch die zwei Integrale

$$\int d\varphi . \sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{a^2+b^2} Cos^2\,\varphi\right)} \text{ und } \int \frac{d\,\varphi}{\sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{a^2+b^4} Cos^2\,\varphi\right)}}$$

kann ausgedrückt werden.

138. Hieraus folgt offenbar wieder, daſs wenn man drei Winkel μ, φ, φ' so annimmt, daſs

$$Sin\,\mu = Sin\,\varphi . Sin\,\varphi' - Cos\,\varphi\, Cos\,\varphi' . \sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{a^2+b^2} Cos^2\,\mu\right)},$$

ist, die zu φ und φ' gehörenden Bögen um eine algebraisch ausgedrückte Differenz von dem zu μ gehörenden Bogen verschieden sind. Es ist nämlich der zu φ gehörende Bogen

$$s = \sqrt{(a^2+b^2)} \Big\{ tang.\,\varphi . \sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{a^2+b^2} Cos^2\,\varphi\right)} + \frac{b^2}{a^2+b^2} .$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{a^2+b^2} Cos^2\,\varphi\right)}} - \int d\varphi \sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{a^2+b^2} Cos^2\,\varphi\right)} \Big\};$$

der zu φ' gehörende Bogen

$$s' = \sqrt{(a^2+b^2)} \Big\{ tang\,\varphi' \sqrt{\left(1 - \frac{a^2\, Cos^2\,\varphi'}{a^2+b^2}\right)} + \frac{b^2}{a^2+b^2} .$$

$$\int \frac{d\,\varphi}{\sqrt{\left(1 - \frac{a^2\, Cos^2\,\varphi'}{a^2+b^2}\right)}} - \int d\,\varphi' \sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{a^2+b^2} Cos^2\,\varphi'\right)} \Big\}$$

der zu μ gehörende Bogen S

$$= \sqrt{(a^2+b^2)} \Big\{ tang\,\mu \sqrt{\left(1 - \frac{a^2\, Cos^2\,\mu}{a^2+b^2}\right)} + \frac{b^2}{a^2+b^2} \int \frac{d\,\mu}{\sqrt{\left(1 - \frac{a^2\, Cos^2\,\mu}{a^2+b^2}\right)}}$$

$$- \int d\mu \sqrt{\left(1 - \frac{a^2\, Cos^2\,\mu}{a^2+b^2}\right)} \Big\}.$$

Aber nach §. 127. ist bei dem vorausgesetzten Werthe von μ,

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{\left(1 - \frac{a^2\, Cos^2\,\varphi}{a^2+b^2}\right)}} + \int \frac{d\varphi'}{\sqrt{\left(1 - \frac{a^2\, Cos^2\,\varphi'}{a^2+b^2}\right)}} - \int \frac{d\mu}{\sqrt{\left(1 - \frac{a^2\, Cos^2\mu}{a^2+b^2}\right)}} = 0;$$

und nach §. 129.

$$\int d\varphi . \sqrt{\left(1 - \frac{a^2 \, Cos^2 \, \varphi}{a^2 + b^2}\right)} + \int d\varphi' \sqrt{\left(1 - \frac{a^2 \, Cos^2 \, \varphi'}{a^2 + b^2}\right)}$$

$$- \int d\mu \sqrt{\left(1 - \frac{a^2 \, Cos^2 \, \mu}{a^2 + b^2}\right)} = \frac{a^2}{(a^2 + b^2)} Cos \, \mu \, Cos \, \varphi . \, Cos \, \varphi' ;$$

also wird $s + s' - S' = \sqrt{(a^2 + b^2)} \left\{ tang \, \varphi . \sqrt{\left(1 - \frac{a^2 \, Cos^2 \, \varphi}{a^2 + b^2}\right)} \right.$

$$\left. + \, tang \, \varphi' \sqrt{\left(1 - \frac{a^2 \, Cos^2 \, \varphi'}{a^2 + b^2}\right)} - tang \, \mu \sqrt{\left(1 - \frac{a^2 \, Cos^2 \, \mu}{a^2 + b^2}\right)} \right\}$$

$$+ \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} Cos \, \mu \, Cos \, \varphi \, Cos \, \varphi' .$$

Ein algebraischer Ausdruck, der aber viel minder bequem ist, als bei der Ellipse.

Anmerkung. Diese letzten Sätze über die Ellipse und Hyperbel sind aus Legendre entlehnt, in dessen Exercices du calcul intégral eine ausführliche Untersuchung über diese Bögen der Ellipse, der Lemniscata und Hyperbel, (sur les fonctions elliptiques) vorkömmt. Diese Untersuchungen sind höchst belehrend, und wenn man gleich die Tafeln für diese Integrale wohl leichter berechnen könnte, so bleiben doch die dort entwickelten gegenseitigen Bestimmungen, die vielen Anwendungen dieser elliptischen Functionen u. s. w. von der gröſsten Wichtigkeit.

Fünfter Abschnitt.

Bestimmung krummer Linien aus Eigenschaften, die zu Differentialgleichungen führen.

1. *Beispiele solcher Bestimmungen, die auf Differentialgleichungen vom ersten Grade führen.*

138. Bemerkung. Es läſst sich im Allgemeinen übersehen, daſs hieher alle die Fälle gehören, wo für die Tangente oder Subtangente, Normale oder Subnormale u. s. w. Bedingungen gegeben sind; auch Bedingungen für die Länge des Bogens, oder die Gröſse des Flächenraums und ähnliche können zu solchen Bestimmungen führen. Ich will hier alles auf senkrechte Coordinaten beziehn, und durch die Abscissenlinie die Tangente und Normale begrenzen.

139. **Aufgabe.** Die Curve zu bestimmen, deren Normallinie unveränderlich $= a$ ist.

Auflösung. Wenn die Curve auf senkrechte Coordinaten x, z, bezogen wird, so ist die Normallinie, wenn man das auf ihr durch die Abscissenlinie, (die Linie der x,) abgeschnittene Stück nimmt $= \frac{z.\sqrt{(dx^2 + dz^2)}}{dx}$;

also $\frac{z\sqrt{(dx^2 + dz^2)}}{dx} = a$; oder $z^2 + z^2 \frac{dz^2}{dx^2} = a^2$,

oder $\frac{z\,dz}{\pm\sqrt{(a^2 - z^2)}} = dx$; $x = C \mp \sqrt{(a^2 - z^2)}$.

Diese Gleichung gehört dem Kreise vom Halbmesser $= a$, und die unbestimmte beständige Gröfse C giebt der Gleichung keine gröfsere Allgemeinheit, sondern sagt nur, dafs der Anfangspunct der x nach Willkür kann genommen werden.

140. **Aufgabe.** Die Curve zu bestimmen, deren Subnormallinie unveränderlich ist.

Auflösung. Die Subnormallinie $= \frac{z\,dz}{dx} = b$; z giebt $z^2 = C + 2\,bx$;

eine Parabel, deren Scheitel da liegt, wo $x = -\frac{C}{2b}$ und deren Parameter $= 2.b$ ist. (vergl. 1. Theil. §. 147.)

141. **Aufgabe.** Die Curve zu bestimmen, deren Subtangente unveränderlich ist.

Auflösung. Da die Subtangente $= \frac{z\,dx}{dz} = c$ sein soll, so ist

$log\ \frac{z}{C} = \frac{x}{c}$; die Curve also keine andre, als die im 1. Th. §. 583. betrachtete logarithmische Curve.

142. **Aufgabe.** Die Curve zu bestimmen, deren Tangente unveränderlich ist.

Auflösung. Die Tangente $= \frac{z.\sqrt{(dx^2 + dz^2)}}{dz} = f$, giebt

$z^2 \frac{dx^2}{dz^2} = f^2 - z^2$; also $dx = \sqrt{} \frac{(f^2 - z^2)\,dz}{z}$, woraus

$x = C + \sqrt{(f^2 - z^2)} - f.\,log.\,nat.\,\frac{f + \sqrt{(f^2 - z^2)}}{z}$,

folgt.

Setzt man nämlich $f^2 - z^2 = u^2$,

so ist $z\,dz = -u\,du$, und $\frac{z\,dz}{z^2} = \frac{-u\,du}{(f^2 - u^2)}$,

$$dx = \frac{-u^2\,du}{f^2-u^2} = du - \frac{f^2\,du}{f^2-u^2};$$

also $x = C + u - \frac{1}{2} f \log \frac{f+u}{f-u} = C + \surd(f^2 - z^2) - f \log \frac{f+\surd(f^2-z^2)}{z}$ Eine Gleichung für die Curve, die wir im ersten Abschnitt §. 9. betrachtet haben.

143. Wenn man sich einen Faden ZU (Fig. 2.) vorstellt, dessen Ende U auf der graden Linie VU fortbewegt wird, um dadurch einen am andern Ende befestigten schweren Punct (oder kleinen Körper) z fortzuziehn, so bewegt sich z auf einer krummen Linie, deren Tangente ZU unveränderlich $= f = AB$ ist. Aus diesem Grunde heisst die eben betrachtete Linie die Zuglinie. (*tractoria.*)

144. Aufgabe. Die Curve zu finden, deren Subtangente gleich der mfachen Abscisse ist.

Auflösung. Nach der Forderung der Aufgabe soll $\frac{z\,dx}{dz} = mx$, also $\frac{m\,dz}{z} = \frac{dx}{x}$ sein oder $m \log z - \log C = \log x$, das ist $z^m = Cx$. Die Linie eine Parabel der mten Ordnung.

Für $m = 2$ ist es die gewöhnliche Parabel, wie schon aus 1. Th. §. 145. bekannt ist.

145. Aufgabe. Eine Curve zu bestimmen, wo das Quadrat der Subtangente der Abscisse proportional ist.

Auflösung. $\frac{z\,dx}{dz} = \surd ax$, giebt $\frac{dx}{\surd x} = \frac{dz.\surd a}{z}$,

oder $a \log \frac{Z}{C} = \pm 2\surd ax$. Die Curve ist also eine Art logarithmischer Curve, die nur für positive x mögliche Werthe der z giebt. Für $x = 0$ wird $z = C$; für irgend einen andern positiven Werth von x, ist der Werth von $\log \frac{z}{C}$ ein doppelter, oder der Werth von $z = C.e^{\pm 2\surd\frac{x}{a}}$ entweder $= Ce^{2\surd\frac{x}{a}}$ oder $= \frac{C}{e^{2\surd\frac{x}{a}}}$.

146. Aufgabe. Die Curve zu bestimmen, deren Subnormallinie der Quadratwurzel der Abscisse proportional ist.

Auflösung. $z\,dz = dx.\surd ax$ giebt $\frac{1}{2} z^2 = \frac{2}{3}\surd ax^3$, oder $\frac{9}{16} z^4 = ax^3$.

147. Aufgabe. Die Curve zu finden, deren Bogen die mittlere Proportionallinie zwischen der doppelten Abscisse und der Ordinate seines Endpunctes sei.

Auflösung. Heifst der Bogen s, so soll $s^2 = 2xz$,

$$sds = xdz + zdx \text{ sein, oder } \sqrt{(dx^2 + dz^2)} = \frac{xdz + zdx}{\sqrt{2xz}}.$$

Diese Gleichung ist homogen und kann also dadurch dafs man $z = wx$ setzt, zur Integration vorbereitet werden.

Man erhält nämlich dann schon aus der Gleichung

$$\sqrt{(dx^2 + dz^2)} = \frac{xdz + zdx}{\sqrt{2xz}},$$

$$\sqrt{\left(1 + \frac{dz^2}{dx^2}\right)} = \frac{\left(\frac{dz}{dx} + w\right)}{\sqrt{2w}} \text{ oder } w^2 + 2w.\frac{dz}{dx} + \frac{dz^2}{dx^2} = 2w + \frac{2wdz^2}{dx^2}.$$

woraus $\frac{dz}{dx} = \frac{w + (1-w)\sqrt{2w}}{2w-1}$ folgt.

Aber im Allgemeinen führt die Substitution $z = wx$

auf $\frac{dx}{x} = \frac{dw}{\frac{dz}{dx} - w}$ und hier also, wo

$$\frac{dz}{dx} - w = \frac{2w(1-w) \pm (1-w)\sqrt{2w}}{2w-1} = \pm\left(\frac{1-w}{2w-1}\right)(1 \pm \sqrt{2w})\sqrt{2w}$$

$$\text{oder} = \mp \frac{(1-w)\sqrt{2w}}{1 \mp \sqrt{2w}}$$

wird $\frac{dx}{x} = \frac{dw}{\pm\sqrt{2w}.(1-w)} + \frac{dw}{1-w}$. Hieraus folgt

$$\log x = \log C - \log(1-w) + \int\frac{dw}{\sqrt{2w}\,(1-w)},$$

$$\text{oder } \log x = \log C - \log(1-w) + \frac{1}{\sqrt{2}}\ \log.\ \frac{1+\sqrt{w}}{1-\sqrt{w}}.$$

Da $w = \frac{z}{x}$ war, so ist auch hieraus

$$x = \frac{C}{1-w}\left(\frac{1+\sqrt{w}}{1-\sqrt{w}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{Cx}{x-z}\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{z}}{\sqrt{x}-\sqrt{z}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}},$$

$$\text{oder } x - z = C\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{z}}{\sqrt{x}-\sqrt{z}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

oder $(\sqrt{x} - \sqrt{z})^{\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = C. (\sqrt{x} + \sqrt{z})^{\frac{1}{\sqrt{2}}-1}$
Die Curve ist also die im 1. Th. §. 574. Fig. 156. dargestellte.

148. Aufgabe. Eine Curve anzugeben, deren Bogen der Quadratwurzel aus der Abscisse proportional ist.

Auflösung. $s = \sqrt{ax}$, $ds = \sqrt{(dx^2 + dz^2)} = \frac{1}{2} dx \sqrt{\frac{a}{x}}$

$$\text{also } dz = dx \sqrt{\left(\frac{a - 4x}{4x}\right)}.$$

Es sei $\sqrt{\left(\frac{a-4x}{4x}\right)} = u$, oder $4x = \frac{a}{u^2+1}$; $dx = \frac{-\frac{a}{2} u\,du}{(u^2+1)^2}$,

$$dz = \frac{-\frac{a}{2} u^2 du}{(u^2+1)^2} = + \frac{\frac{a}{2} du}{(1+u^2)^2} - \frac{\frac{a}{2} du}{(1+u^2)};$$

$$z = C + \frac{\frac{1}{4} ua}{1+u^2} - \frac{a}{4} \, Arc\, tang\, u$$

$$\text{oder } z - C = \tfrac{1}{2} \sqrt{(ax - 4x^2)} - \tfrac{1}{4} a \; Arc.\, tang \sqrt{\left(\frac{a-4x}{4x}\right)},$$

oder wenn ich $Arc.\, tang \sqrt{\left(\frac{a-4x}{4x}\right)} = \varphi$ nenne, $Sin\, \varphi = \frac{\sqrt{(a-4x)}}{\sqrt{a}}$;

$Cos\, \varphi = 2 \sqrt{\frac{x}{a}}$

also $Sin.\, 2\varphi = \frac{4\sqrt{(ax - 4x^2)}}{a}$, auch

$$z - C = \tfrac{1}{8} a \, Sin.\, 2\varphi - \tfrac{1}{4} a \varphi,$$

Die Curve ist also die Cycloide. (1. Th. §. 611.)

Dies stimmt mit §. 114. überein, wenn man dort den Anfangspunct der Abcissen so verlegt, dafs die Abscisse $w = 2r - x$ wird, dann ist dort $S = 2\sqrt{2rw}$.

149. Aufgabe. Eine Curve zu finden, die ihrer Evolute ähnlich ist, und zugleich eine mit ihr übereinstimmende Lage hat.

Auflösung. Die logarithmische Spirallinie und diese allein hat die verlangte Eigenschaft.

Beweis. Damit zwei Curven einander ähnlich genannt werden können, müssen sie so beschaffen sein, dafs die Bögen, welche man nehmen mufs, um bestimmte Aenderungen in der Lage der Tangente zu erhalten, allemal auf der einen m mal so grofs, als auf der andern werden. Stellt nun (Fig. 37.) AB den Theil der Evolute vor, der mit dem Bogen CD der Curve zusammen-

gehört, so ist die Aenderung der Lage der Tangente für diese Bögen allemal gleich, weil die Tangenten an A und B zugleich die Normallinien der Puncte C und D sind; eine Curve ist also ihrer Evolute oder der Linie ihrer Krümmungsmittelpuncte ähnlich, wenn sich die Länge der zu einander gehörigen Bögen beider allemal wie $1 : m$ verhält. Rechnet man die Bögen beider Curven von einem gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte E an, so ist bekanntlich der Bogen $EA =$ dem Krümmungshalbmesser CA; und folglich wenn der Bogen $EC = s$ heifst, der Winkel $CFG = \varphi$, $CA = \frac{ds}{d\varphi}$, als Krümmungshalbmesser so soll hier $ms = \frac{ds}{d\varphi}$; $d\varphi = \frac{ds}{ms}$ sein. Es sei nun ein Punct C der Curve CD durch Coordinaten $EX = x$, $XC = z$ bestimmt, so ist $tang\ \varphi = \frac{dz}{dx}$, und $Sin\ \varphi = \frac{dz}{ds}$, $Cos\ \varphi = \frac{dx}{ds}$, also hier, wo $d\varphi = \frac{ds}{ms}$, $m\varphi = log\ \frac{s}{a}$ sein soll,

$$dz = ds.\ Sin\ \varphi = ds.\ Sin\left(\frac{1}{m}\ log\ \frac{s}{a}\right);$$

$$dx = ds\ Cos\ \varphi = ds\ Cos\left(\frac{1}{m}\ log\ \frac{s}{a}\right).$$

Es sei $log\ \frac{s}{a} = w$, also $ds = s\,dw = a.\ dw.\ e^w$,

so ist $z = a\int dw.\ e^w.\ Sin\ \frac{w}{m} = ae^w.\ Sin\ \frac{w}{m} - a\int e^w.\ \frac{dw}{m}\ Cos\ \frac{w}{m}$;

$$= ae^w.\ Sin\ \frac{w}{m} - \frac{ae^w}{m}\ Cos\ \frac{w}{m} - \frac{a}{m^2}\int e^w\, dw\ Sin\ \frac{w}{m},$$

also $z = \frac{ae^w.\ m^2}{1+m^2}\left\{Sin\ \frac{w}{m} - \frac{1}{m}\ Cos\ \frac{w}{m}\right\}$,

und ebenso $x = a\int dw.\ e^w\ Cos\ \frac{w}{m} = \frac{ae^w m^2}{1+m^2}\left\{Cos\ \frac{w}{m} + \frac{1}{m}\ Sin\ \frac{w}{m}\right\}$.

Die beizufügenden beständigen Gröfsen kann man $= 0$ setzen, da sie blofs den hier ganz willkürlichen Anfangspunct der Coordinaten bestimmen. Diese Gleichungen geben:

$$z^2 + x^2 = \frac{a^2 e^{2w} m^4}{(1+m^2)^2}\left\{1 + \frac{1}{m^2}\right\} = \frac{a^2 e^{2w}.\ m^2}{1+m^2},$$

$$\text{und } \frac{z}{x} = \frac{tang\frac{w}{m} - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m} tang\frac{w}{m}}, \text{ oder}$$

$$tang\frac{w}{m} = \frac{\left(\frac{1}{m} + \frac{z}{x}\right)}{\left(1 - \frac{1}{m} . \frac{z}{x}\right)}.$$

$$\text{Das ist } \frac{w}{m} = Arc\ tang\left(\frac{x + m\,z}{m\,x - z}\right),$$

$$\text{und auch } e^w = \frac{\sqrt{(1 + m^2)} . \sqrt{(x^2 + z^2)}}{a\,m};$$

$$\text{oder } \frac{w}{m} = \frac{1}{m} \ log \left\{\frac{\sqrt{(x^2 + z^2)} . \sqrt{(1 + m^2)}}{a.\ m}\right\}.$$

Diese beiden Werthe für $\frac{w}{m}$ gleich gesetzt, geben eine Gleichung zwischen x und z. Um diese bequemer auszudrücken sei $\frac{z}{x} = tang\,\psi$, und $x^2 + z^2 = y^2$,

$$\text{so ist } Arc.\ tang\left[\frac{\frac{1}{m} + tang\ \psi}{1 - \frac{1}{m}\ tang\ \psi}\right] = \frac{1}{m}\ log. \left\{\frac{y}{a} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{m^2}\right)}\right\},$$

oder wenn ich einen Winkel $= \alpha$ annehme, dessen Tangente

$tang\ \alpha = \frac{1}{m}$, $Sec\ \alpha = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{m^2}\right)}$ ist,

$$\text{so wird } tang\ (\alpha + \psi) = \frac{\frac{1}{m} + tang\ \psi}{1 - \frac{1}{m}\ tang\ \psi},$$

$$\alpha + \psi = \frac{1}{m}\ log. \frac{y\ Sec\ \alpha}{a}.$$

Dieses ist die Gleichung für die logarithmische Spirallinie, indem $\sqrt{(x^2 + z^2)} = y$ der Abstand irgend eines Punctes vom Anfangspuncte ist, und ψ der Winkel, den diese Abstandslinie mit den Abscissen x macht. (Vergl. 1. Th. §. 606. 607.). Der Winkel α, dessen Tangente $= \frac{1}{m}$, ist zugleich der Winkel, den jeder Radius der Curve mit der an demselben Puncte gezognen

Tangente macht. Die logarithmische Spirallinie wird ihrer Evolute ganz gleich, wenn $m = 1$, $\alpha = 45$ Grad ist.

150. Aufgabe. Die Curven anzugeben, die ihrer Evolute ähnlich sind, aber eine der Evolute entgegengesetzte Lage haben.

Erläuterung. Wenn (Fig. 38.) AEB die Evolute ist und E der Punct, welchem F in der Curve zugehört; wenn man ferner zwei Puncte G, H auf der Evolute so nimmt, dafs die Krümmung von E bis G ebensoviel als von E bis H betrage, oder die von den Normallinien eingeschlossenen Winkel GLE, EMH gleich sind: so ist auch auf der Curve AFK deren Krümmungs-Mittelpuncte die AGH enthält, die Krümmung der Bögen FI, FK gleich, wenn IG, FE, KH die Krümmungshalbmesser in I, F, K sind. Könnte nun eine Curve gefunden werden, in welcher $FI = m.EH$, $FK = m.EG$ für alle von E und F an gerechnete Bögen wäre, so hätte diese Curve die verlangte Eigenschaft.

Auflösung. Wenn $m = 1$ ist, so ist es die Cycloide welche die verlangte Eigenschaft hat. Wenn m einen andern Werth hat, so ist diejenige Epicycloide, für welche $m = \frac{2\varrho' + \varrho}{\varrho}$ ist oder diejenige Hypocycloide, für welche $m = \frac{\varrho - 2\varrho'}{\varrho}$, die verlangte Curve, wenn ϱ' der Halbmesser des wälzenden Kreises und ϱ der Halbmesser des Kreises ist, auf welchem die Wälzung geschieht.

Beweis. 1. Es sei für den Punct F der Krümmungshalbmesser $FE = R$, und der von irgend einem Anfangspuncte gerechnete, in F sich endigende Bogen $= A$; es sei ferner $FK = s - A$ und $FI = A - s'$, der Krümmungshalbmesser in K sei $= r$, in I aber $= r'$, so ist bekanntlich der Bogen $GE = R - r'$ und der Bogen $EH = r - R$. Hier soll nun

$$FK = m.\,GE, \text{ oder } s - A = m\,(R - r');$$
$$FI = m.\,EH, \text{ oder } A - s' = m.\,(r - R),$$

sein, und da zugleich immerfort die Krümmung des Bogens $s - A$ gleich der Krümmung des Bogens $A - s'$ sein soll, so müssen ihre Aenderungen so sein, dafs das Differential des Krümmungswinkels gleich grofs oder dafs $\frac{ds}{r} = \frac{-ds'}{r'} = d\varphi$ sei; denn r, r' sind die Krümmungshalbmesser in den Endpuncten dieser Bögen.

So haben wir also $\frac{ds}{r} = \frac{-ds'}{R - \left(\frac{s - A}{m}\right)} = \frac{m\,dr}{R - \left(\frac{s - A}{m}\right)}$,

weil $A - s' = mr - mR$, $-ds' = m\,dr$ war. Also

$\left(R+\frac{A}{m}\right) ds - \frac{s\,ds}{m} = m\,r\,dr$; das ist $m r^2 = C + 2s\left(R+\frac{A}{m}\right) - \frac{s^2}{m}$ wo C so bestimmt wird, daſs $r = R$ ist, wenn $s = A$ ist. Dies ist eine allgemeine Gleichung für alle Curven, denen die angegebne Eigenschaft zukommen soll.

2. Es sei nun zuerst $m = 1$, also die eben gefundene Gleichung $r^2 = 2.s.(R+A) - s^2 + C$ oder nach gehöriger Bestimmung der *Constans*

$$r^2 = R^2 - 2AR - A^2 + 2s(R+A) - s^2;$$
$$\text{oder } r^2 = 2R^2 - (R+A-s)^2.$$

Da nun r. der Krümmungshalbmesser allemal an der Stelle ist, wo der Bogen s sich endigt, so ist der Krümmungswinkel

$$d\varphi = \frac{ds}{r} = \frac{ds}{\sqrt{(2R^2 - (R+A-s)^2)}},$$
$$\text{und } \varphi = Arc.\,Cos.\,\frac{R+A-s}{R.\sqrt{2}} + C.$$

$Cos\,(\varphi - C) = \frac{R+A-s}{R\sqrt{2}}$; und $ds = R.\sqrt{2}\,(Sin\,(\varphi - C).\,d\varphi)$

Denken wir uns die Linie PQ als diejenige, mit welcher die Tangente HP der Evolute den Winkel $\varphi - C$ macht, und auf ihr Abscissen $= x$ und senkrechte Ordinaten $= z$ genommen, so ist

$$dx = ds.\,Cos\,(\varphi - C) = R.\sqrt{2}.\,d\varphi.\,Sin\,(\varphi - C)\,Cos\,(\varphi - C);$$
$$dz = ds\;Sin\,(\varphi - C) = R.\sqrt{2}.\,d\varphi.\,Sin^2\,(\varphi - C);$$

also $x = \frac{R}{\sqrt{2}}.\,Sin^2\,(\varphi - C)$; $z = \frac{R}{\sqrt{2}}(\varphi - C - Sin\,(\varphi - C)\,Cos\,(\varphi - C))$.

Es sei $\varphi - C = \frac{1}{2}\psi$, so ist

$$x = \frac{R}{\sqrt{2}}.\,\frac{(1 - Cos\,\psi)}{2} \text{ und } z = \frac{R}{\sqrt{2}}.\,\frac{\{\psi - Sin\,\psi\}}{2}.$$

Dies sind offenbar die Gleichungen für die Cycloide, die durch Wälzung eines Kreises vom Halbmesser $= \frac{R}{2\sqrt{2}}$ entsteht.

3. Für andre Fälle, wo nicht $m = 1$ ist, hatten wir $m^2 r^2 = C + 2s(mR + A) - s^2$, oder da $r = R$ werden soll für

$$s = A,\; m^2(r^2 - R^2) = 2(s - A)(mR + A) - (s^2 - A^2)$$
$$\text{oder } r^2 = R^2 + \left(\frac{s-A}{m^2}\right)(2mR + A - s)$$

Aber auch hier ist $d\varphi = \frac{ds}{r} = \frac{m\,ds}{\sqrt{\{m^2 R^2 + 2mR(s-A) - (s-A)^2\}}}$

$$\text{oder } d\varphi = \frac{m\,ds}{\sqrt{\{2m^2 R^2 - (mR - s + A)^2\}}},$$

woraus $\varphi = m.\ Arc.\ Cos\left(\frac{mR + A - s}{mR\sqrt{2}}\right)$ folgt, da man eine *Constans* beizufügen nicht nöthig hat, weil $\varphi - C$ statt φ setzen, doch nur heifst, den Anfangsschenkel der φ, der ganz unbestimmt ist, anders annehmen.

Wir haben also $Cos\,\frac{\varphi}{m} = \frac{mR + A - s}{mR.\sqrt{2}}$, und folglich

$$dx = ds\ Cos\,\varphi = R\sqrt{2}.\ Sin\,\frac{\varphi}{m}.\ Cos\,\varphi.\ d\varphi$$

$$dz = ds\ Sin\,\varphi = R\sqrt{2}.\ Sin\,\frac{\varphi}{m}\ Sin\,\varphi.\ d\varphi.$$

Da nun $\int d\varphi.\ Cos\,\varphi.\ Sin\,\frac{\varphi}{m} = Sin\,\varphi.\ Sin\,\frac{\varphi}{m} - \frac{1}{m}\int d\varphi.\ Cos\frac{\varphi}{m}.\ Sin\,\varphi,$

$$= Sin\,\varphi.\ Sin\,\frac{\varphi}{m} + \frac{1}{m}\,Cos\,\varphi.\ Cos\frac{\varphi}{m} + \frac{1}{m^2}\int d\varphi\ Cos\,\varphi\ Sin\,\frac{\varphi}{m}$$

$$= \frac{m^2}{m^2-1}\left(Sin\,\varphi.\ Sin\,\frac{\varphi}{m} + \frac{1}{m}\,Cos\,\varphi.\ Cos\frac{\varphi}{m}\right),$$

und $\int d\varphi\ Sin\,\varphi\ Sin\,\frac{\varphi}{m} = -\ Cos\,\varphi\ Sin\frac{\varphi}{m} + \frac{1}{m}\int d\varphi\,Cos\,\varphi.\ Cos\frac{\varphi}{m}$

$$= -\ Cos\,\varphi\ Sin\,\frac{\varphi}{m} + \frac{1}{m}\ Sin\,\varphi\ Cos\frac{\varphi}{m} + \frac{1}{m^2}\int d\,\varphi\ Sin\,\varphi\ Sin\,\frac{\varphi}{m}$$

$$= \frac{m^2}{m^2-1}\left\{-\,Cos\,\varphi\ Sin\frac{\varphi}{m} + \frac{1}{m}\,Sin\,\varphi.\ Cos\frac{\varphi}{m}\right\},$$

so ist $x = \frac{Rm^2\sqrt{2}}{m^2-1}\left\{Sin\,\varphi.\ Sin\,\frac{\varphi}{m} + \frac{1}{m}\ Cos\,\varphi.\ Cos\frac{\varphi}{m}\right\},$

$$z = \frac{Rm^2\sqrt{2}}{m^2-1}\left\{-\,Cos\,\varphi.\ Sin\frac{\varphi}{m} + \frac{1}{m}\,Sin\,\varphi\ Cos\,\frac{\varphi}{m}\right\},$$

$$x^2 + z^2 = \frac{2m^4R^2}{(m^2-1)^2}\left\{Sin^2\frac{\varphi}{m} + \frac{1}{m^2}\ Cos^2\,\frac{\varphi}{m}\right\} = \frac{2m^4R^2}{(m^2-1)^2}\left\{1 - \frac{m^2-1}{m^2}\,Cos^2.\frac{\varphi}{m}\right\},$$

oder $x^2 + z^2 = \frac{2m^4R^2}{(m^2-1)^2}\left\{1 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{m^2-1}{m^2}\right) - \tfrac{1}{2}\left(\frac{m^2-1}{m^2}\right)\ Cos.\ \frac{2\varphi}{m}\right\},$

$$= \frac{m^2R^2}{m^2-1}\left\{\frac{m^2+1}{(m^2-1)} - Cos\ \frac{2\varphi}{m}\right\}.$$

Diese Gleichung ist offenbar der ganz ähnlich, welche wir im **1. Th. §. 628.** für die Epicycloide fanden, und derjenigen, welche sich auch für die Hypocycloide im 1. Th. §. 637. ergeben würde. Nenne ich nämlich ϱ den Halbmesser des Kreises, auf welchem die Wälzung geschieht und ϱ' den Halbmesser des wälzenden Kreises, so ist nach 1. Th. §. 628. für die Epicycloide

$$x^2+z^2=(\varrho+\varrho)+\varrho'^2-2\varrho'(\varrho+\varrho')\ Cos\,\frac{\varrho}{\varrho'}\,\psi.$$

und es müſste hier

$$(\varrho+\varrho')+\varrho'^2=\frac{m^2(m^2+1)R^2}{(m^2-1)^2}$$

$$2\varrho'(\varrho+\varrho')=\frac{m^2R^2}{(m-1)}$$

$$\text{also } \varrho+2\varrho'=\frac{R.m^2.\sqrt{2}}{m^2-1}$$

$$\varrho=\frac{R.m\sqrt{2}}{(m^2-1)}$$

folglich $m=\frac{\varrho+2\varrho'}{\varrho}$ sein; damit aber dann

$\frac{\varrho}{\varrho'}\psi=\frac{2\phi}{m}=\frac{2\varrho}{\varrho+2\varrho'}\phi$ werde, muſs $\phi=\psi\left(\frac{\varrho+2\varrho'}{2\varrho'}\right)$ sein.

Für die Hypocycloide hat die Gleichung die Form (**1. Th. §. 637.**)

$$x^2+z^2=(\varrho-\varrho')^2+\varrho'^2+2\varrho'(\varrho-\varrho')\ Cos\,\frac{\varrho}{\varrho'}\,\psi,$$

und da muſs also $(\varrho-\varrho')^2+\varrho'^2=\frac{R^2m^2(m^2+1)}{(m^2-1)^2}$

$$2\varrho'(\varrho-\varrho')=\frac{-m^2R^2}{(m^2-1)};$$

oder $\varrho=\frac{Rm\sqrt{2}}{(m^2-1)}$ und $(\varrho-2\varrho')=\frac{m^2R\sqrt{2}}{(m^2-1)}$,

das ist $m=\frac{\varrho-2\varrho'}{\varrho}$ sein, und $\frac{2}{m}\phi=\frac{\varrho}{\varrho'}\psi$, oder

$\phi=\frac{\varrho-2\varrho'}{2\varrho'}\psi$ sein.

151. Die Cycloide ist also nicht bloſs ihrer Evolute ähnlich, sondern gleich, da für sie $m=1$ ist. Heiſst für sie ϱ der Halbmesser des wälzenden Kreises, so ist der Krümmungshalbmesser (§. 60.)

$=2\varrho\sqrt{2}.\sqrt{(1-Cos\,\psi)},=2\sqrt{2\varrho x}$, und der Bogen der Cycloide ist (§. 114.) $=2\sqrt{2\varrho(2\varrho-x)}$; Bogen und Krüm-

BAYERISCHE STAATS-BIBLIOTHEK MUENCHEN

mungshalbmesser werden also da gleich, wo $x = 2\varrho - x$; $x = \varrho$ ist, und da wird der Krümmungshalbmesser $R = 2\varrho\sqrt{2}$, welches der Werth ist, den wir im vorigen §. Nr. 2. fanden.

152. Wenn bei der Epicycloide der Winkel, um welchen der wälzende Kreis fortgerückt ist $= \psi$ heifst, so ist (1. Th. §. 633.) der Winkel, den die Berührungslinie mit der Abscissenlinie macht, $= \left(\frac{\varrho + 2\varrho'}{2\varrho'}\right)\psi$, also ist φ im vorigen §. der Winkel der Berührungslinie mit dem Radius, auf welchem sich die Spitze der Epicycloide befindet, und nun läfst sich leicht der Punct bestimmen, von wo an man die Bögen $s - A$ rechnen mufs. Für diesen Anfangspunct mufs nämlich der Bogen $A = mR$ gleich dem mfachen Krümmungshalbmesser sein, und wenn wir die allgemeinen Ausdrücke für den Bogen und Krümmungshalbmesser suchen, so erhalten wir Folgendes.

Nach 1. Th. §. 628. ist $x = (\varrho + \varrho')\, Cos\, \psi - \varrho'\, Cos\, \frac{(\varrho + \varrho')\,\psi}{\varrho'}$,

$$z = (\varrho + \varrho')\, Sin\, \psi - \varrho'\, Sin\, \frac{(\varrho + \varrho')}{\varrho'}\,\psi.$$

$$dx^2 + dz^2 = 2\,d\psi^2\,\{\varrho + \varrho'\}^2.\left(1 - Cos\,\frac{\varrho}{\varrho'}\,\psi\right) = ds^2,$$

also $s = (\varrho + \varrho').\, 2\int Sin\,\frac{\varrho\psi}{2\varrho'}.\, d\psi = \frac{4\,(\varrho + \varrho')\,\varrho'}{\varrho}\left(1 - Cos\,\frac{\varrho\psi}{2\varrho'}\right)$

wenn s mit ψ zugleich verschwinden oder von der Spitze A, (Fig. 39.) an gerechnet werden soll.

Der Krümmungshalbmesser dagegen ist

$$\frac{ds^3}{dx\,d^2z - dz\,d^2x} = \frac{2\sqrt{2}.\, d\psi^3\,(\varrho + \varrho')^3\left(1 - Cos\,\frac{\varrho}{\varrho'}\,\psi\right)^{\frac{3}{2}}}{d\psi^3.\,(\varrho + \varrho')^2\left(\frac{\varrho + 2\varrho'}{\varrho'}\right)\left(1 - Cos\,\frac{\varrho}{\varrho'}\,\psi\right)}$$

$$= 2\sqrt{2}.\,(\varrho + \varrho')\left(\frac{\varrho'}{\varrho + 2\varrho'}\right)\sqrt{\left(1 - Cos\,\frac{\varrho}{\varrho'}\,\psi\right)}.$$

Damit dieser $= \frac{1}{m}\,s = \frac{\varrho\,.\,s}{\varrho + 2\varrho'}$ sei, mufs

$$\frac{\sqrt{\left(1 - Cos\,\frac{\varrho}{\varrho'}\,\psi\right)}}{(\varrho + 2\varrho')} = \frac{\sqrt{2}}{(\varrho + 2\varrho')}\left(1 - Cos\,\frac{\varrho\psi}{2\varrho'}\right)$$

sein, oder $Cos\,\frac{\varrho\psi}{\varrho'} = -1$, welches $Cos\,\frac{\varrho\psi}{2\varrho'} = 0$ giebt und die Gleichung identisch macht.

Der Anfangspunct der Bögen $s - A$ liegt also da, wo $\frac{\varrho\psi}{\varrho'} = 180°$ ist, oder in K, wo der beschreibende Punct die gröfste Entfernung vom Center C erreicht hat.

Für die Hypocycloide würde eine ähnliche Betrachtung statt finden.

153. Wenn man in Fig. 39., (wo $CA = \varrho$ der Halbmesser des Kreises ist, über welchem die Wälzung geschieht, und $AB = \varrho'$ der Halbmesser des wälzenden Kreises,), CA so theilt, dafs $CG : AG = CA : 2AB$ sei: so wird die durch Wälzung eines Kreises AG über dem Kreise GH beschriebne Epicycloide der $AEFK$ in umgekehrter Lage ähnlich, und die Längen der ähnlichen Bögen verhalten sich wie $CG : CA$,
aber da $AG = \varrho - CG$, so ist $CG : \varrho - CG = \varrho : 2\varrho'$,
also $CG : \varrho = \varrho : \varrho + 2\varrho'$, woraus
$m. CG = \varrho$ folgt
und AH ist die Evolute der AEK.

154. Aufgabe. Diejenige Curve anzugeben, in welcher der Bogen allemal gleich dem mfachen Unterschiede der Abscisse und Subtangente ist.

Auflösung. Es sei (Fig. 40.) Z ein Punct dieser Curve, $AX = x$ seine Abscisse, $XZ = z$ die Ordinate, und die Subtangente $WX = \frac{z\,dx}{dz}$.

Die Bedingung für die Curve ist also, dafs $S = m\left(x - \frac{z\,dx}{dz}\right)$ sei.

Um aus dieser Bedingung eine Gleichung zwischen x und z herzuleiten, müssen wir sie differentiiren, wobei wir dz als unveränderlich ansehn wollen; dann giebt sie:

$$\frac{1}{m}\sqrt{(dx^2 + dz^2)} = -\frac{z.\,d^2x}{dz} \text{ oder } \frac{dz}{m}\sqrt{\left(1 + \frac{dx^2}{dz^2}\right)} = -z.\,d.\frac{dx}{dz},$$

$$\text{das ist } \frac{dz}{z} = -\frac{m\,d.\frac{dx}{dz}}{\sqrt{\left(1 + \frac{dx^2}{dz^2}\right)}}, \text{ oder}$$

$$\log z = \log. C + \log\left(-\frac{dx}{dz} + \sqrt{\left(1 + \frac{dx^2}{dz^2}\right)}\right)^m,$$

$$\text{das ist } \frac{z}{C} = \left(-\frac{dx}{dz} + \sqrt{\left(1 + \frac{dx^2}{dz^2}\right)}\right)^m.$$

Um hier C zu bestimmen, sei $z = h$, wo
$\frac{dx}{dz} = 0$ ist; dann mufs $C = h$ also

$$z^{\frac{1}{m}} = h^{\frac{1}{m}}\left(-\frac{dx}{dz} + \surd\left(1 + \frac{dx^2}{dz^2}\right)\right) \text{ sein.}$$

Diese Gleichung giebt $\left(\frac{z}{h}\right)^{\frac{2}{m}} + 2\frac{dx}{dz}\left(\frac{z}{h}\right)^{\frac{1}{m}} = 1,$

oder $dx = \frac{1}{2}\, dz \left\{\left(\frac{h}{z}\right)^{\frac{1}{m}} - \left(\frac{z}{h}\right)^{\frac{1}{m}}\right\},$

$$x = \tfrac{1}{2}.\ \frac{h^{\frac{1}{m}} . z^{1-\frac{1}{m}}}{1-\frac{1}{m}} - \tfrac{1}{2}\ \frac{h^{-\frac{1}{m}} z^{1+\frac{1}{m}}}{1+\frac{1}{m}},$$ wo, wenn $m > 1$ ist,

die *Constans* ganz wegbleiben kann, indem dann z und x zugleich verschwinden dürfen.

Wenn $m = 1$ ist, so giebt die Differentialgleichung

$$dx = \tfrac{1}{2}\,\frac{h\,dz}{z} - \tfrac{1}{2}\,\frac{z\,dz}{h};$$

$$x = \tfrac{1}{2}\,h.\,log\,\frac{z}{C} - \tfrac{1}{4}\,\frac{z^2}{h},$$ und wenn für $z = h$, $x = 0$ sein soll;

$$x = \tfrac{1}{2}\,h\,log\,\frac{z}{h} - \tfrac{1}{4}\,\frac{(z^2 - h^2)}{h}.$$

Wenn $m < 1$ ist, und es soll $x = 0$ sein, wenn $z = h$ ist: so hat man

$$x = \tfrac{1}{2}\,\frac{h^{\frac{1}{m}}\, z^{1-\frac{1}{m}}}{1-\frac{1}{m}} - \tfrac{1}{2}\,\frac{h^{-\frac{1}{m}} . z^{1+\frac{1}{m}}}{1+\frac{1}{m}} + \frac{\frac{1}{m}\,h}{1-\frac{1}{m^2}}.$$

155. Die Curven sind verschieden nach den verschiedenen Werthen von m.

Für $m = 1$ erhellt, dafs die Curve eine logarithmische ist, für welche

$$x = \tfrac{1}{2}\,h\,log\,\frac{z}{h} - \tfrac{1}{4}\,\frac{(z^2 - h^2)}{h} \text{ ist.}$$

Fig. 41. stellt sie dar. Es erhellt sogleich, dafs z nicht negativ sein kann, weil der Logarithme einer negativen Zahl unmöglich ist; ferner dafs z erst $= 0$ wird, wenn x unendlich ist. Wenn die Richtung der positiven x so wie hier vorausgesetzt ist, so bleibt x immer negativ; denn, wenn man $z = h - u$ setzt, so erhält $x = \frac{1}{2}\,h\,log\left(1 - \frac{u}{h}\right) + \frac{1}{4}\,\frac{(h^2 - z^2)}{h}$ schon für sehr kleine

Werthe von u,

wo $x = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\frac{u^2}{h} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\frac{u^3}{h^2} + \text{etc.} \\ +\frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\frac{u^2}{h} \end{array} \right.$

ist, einen negativen Werth; aber auch für $z = h + u$

wird $x = \left\{ \begin{array}{l} +\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\frac{u^2}{h} + \frac{1}{2\,.\,3}\frac{u^3}{h^2} - \text{etc.} \\ -\frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\frac{u^2}{h} \end{array} \right.$

negativ. Für gröfsere Werthe von z ist x gewifs negativ, da $h \log \frac{z}{h}$ nicht so sehr als $\frac{z^2}{h}$ wächst.

156. Wenn m andre Werthe erhält, so erhalten die Curven sehr verschiedene Gestalten, die ich nicht einzeln durchgehe, weil man sie in: M. von Prittwitz Untersuchungen über Curven, die durch ihre Subtangente rectificirt werden (Leipzig. 1815.) vollständig angegeben findet. Wenn man sich in Fig. 41. einen Körper auf der Abscissenlinie gleichförmig fortlaufend denkt, und einen Körper, der in B war als sich jener in A befand, eben so schnell fortgehend und in jedem Augenblicke seine Bewegung nach jenem Körper zu richtend, annimmt: so beschreibt der letztere die logarithmische in Fig. 41. dargestellte Curve. In dem Augenblick nämlich, da B nach M gelangt ist, wird A nach N gekommen sein, wenn der Bogen $BM = AN$ ist, und da der Körper in M seine Richtung nach N zu nimmt, so ist MN eine Tangente der Curve und der Bogen BM gleich der Summe von $AL + LN$, das ist = Abscisse — Subtangente, weil die Subtangente negativ ausgedrückt wird, wenn sie die Lage wie LN hat. War der Körper B in P, als A sich in Q befand, so mufs auch $PB = QA$ sein, also Bogen $PB = LQ - AL$ gleich dem Unterschiede der Subtangente und Abscisse.

Wenn die Körper sich nicht gleich schnell bewegten, aber der auf der Curve fortgehende gleichwohl immer die Richtung auf den andern zu hätte, so würden die verschiedenen Curven beschrieben, die unsre Gleichung für verschiedene Werthe von m angiebt. Die im 1. Th. Fig. 136. gezeichnete Curve ist diejenige, welche der Körper B durchläuft, wenn seine Geschwindigkeit doppelt so grofs als die des A ist, und in der dortigen Fig. 136. ist also wenn man an α und A Tangenten $\alpha\beta$, AB zieht, der Bogen $\alpha A = 2.\,\beta B$, oder wenn die Abscissen von der Senkrechten AB an gerechnet werden, der Bogen $A\alpha = 2.\,(\beta C - BC.)$

Wegen dieser Eigenschaft nennt Bouguer sie Verfolgungslinien. (Mém. de l'Acad. de Paris pour l'année 1732. pag. 1.)

157. Bemerkung. Obgleich in den letzten Betrachtungen sich mehrere ganz verschiedene Curven ergaben, je nachdem wir m anders ansetzten, so war doch die verlangte Curve ihrer Natur nach völlig bestimmt für jeden einzelnen Werth von m, weil die durch die Integration hinzukommenden beständigen Gröſsen entweder nur den Anfangspunct der Coordinaten änderten, oder die Abmessungen der Curve durch Aenderung eines Parameters bestimmten, welches alles auf die Natur der Curve keinen Einfluſs hatte. Dieses findet bei den Curven allemal statt, die durch Bedingungen bestimmt werden, welche nur zu Differentialgleichungen des ersten Grades führen. Bei Differentialgleichungen des zweiten Grades dagegen kommen Fälle vor, die wegen der neu hinzukommenden zwei constanten Gröſsen ganz verschiedenartige Curven darbieten; dieses geschieht nämlich dann, wenn in der Differentialgleichung des zweiten Grades schon eine bestimmte constante Gröſse vorkömmt, so daſs das Verhältniſs dieser zu den neu hinzukommenden beständigen Gröſsen verschieden sein und verschiedene Curven geben kann.

2. *Beispiele von Bedingungen, die auf Differentialgleichungen des zweiten Grades führen.*

158. Aufgabe. Diejenigen Curven zu bestimmen, für welche in jedem Puncte das Quadrat des Krümmungshalbmessers der Abscisse proportional ist.

Auflösung. Wenn die Curve durch rechtwinkliche Coordinaten x, z bestimmt werden soll; und dx als das beständige Differential angenommen wird, so ist der Krümmungshalbmesser $= \frac{ds^3}{dx\, d^2 z}$ und dieser soll $= \sqrt{bx}$ sein; also $dx^2 \sqrt{\left(1 + \frac{dz^2}{dx^2}\right)^3} = d^2 z \sqrt{bx}$,

oder $\frac{dx}{\sqrt{bx}} = \frac{d^2 z}{dx} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{dz^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$, welche Gleichung integrirt

giebt $C + 2\sqrt{\frac{x}{b}} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{dz^2}{dx^2}\right)}} = \frac{dz}{\sqrt{(dx^2 + dz^2)}}$,

oder wenn ich unter φ den Winkel verstehe, welchen die Berührungslinie mit der Abscissenlinie macht, $C + 2\sqrt{\frac{x}{b}} = Sin\ \varphi$.

Diese Gleichung giebt $dz^2 = \frac{dx^2\left(C+2\sqrt{\frac{x}{b}}\right)^2}{1-\left(C+2\sqrt{\frac{x}{b}}\right)^2}$,

oder wenn ich $C+2\sqrt{\frac{x}{b}} = u$ setze, $dx = du\sqrt{bx} = \frac{1}{2}du\,(bu - bC)$

$$\text{und } dz = \frac{u}{\sqrt{(1-u^2)}}\tfrac{1}{2}b\,du\,(u-C) = \frac{\frac{1}{2}bu^2\,du}{\sqrt{(1-u^2)}} - \frac{\frac{1}{2}b\,C\,u\,du}{\sqrt{(1-u^2)}};$$

also $z = D + \frac{1}{4}b\,Arc\,Sin\,u - \frac{1}{4}bu\sqrt{(1-u^2)} + \frac{1}{2}bC\sqrt{(1-u^2)}$,

$$\text{weil} \int\frac{u^2\,du}{\sqrt{(1-u^2)}} = \int\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} - \int du.\sqrt{(1-u^2)} = Arc\,Sin\,u - u\sqrt{(1-u^2)} - \int\frac{u^2\,du}{\sqrt{(1-u^2)}}$$

ist. D kann ich hier, da es bloſs den Anfangspunct der z bestimmt, weglassen, oder $z - D$ als die Ordinate ansehn und diese z nennen; dann aber ist:

$$z = \tfrac{1}{4}b\,Arc.\,Sin\left(C+2\sqrt{\tfrac{x}{b}}\right) + \tfrac{1}{2}b\left(\tfrac{1}{2}C - \sqrt{\tfrac{x}{b}}\right)\sqrt{\left(1-\left(C+\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{b}}\right)^2\right)}$$

Diese Gleichung wird bequemer, wenn ich

$$C + 2\sqrt{\frac{x}{b}} = Sin\,\varphi, \text{ und } C = Sin\,\alpha \text{ setze,}$$

$$\text{also } x = b\left(\frac{Sin\,\varphi - Sin\,\alpha}{2}\right)^2$$

$$\text{und } z = \tfrac{1}{4}b\,\varphi + \tfrac{1}{2}b\,(Sin\,\alpha - \tfrac{1}{2}\,Sin\,\varphi)\,Cos\,\varphi$$

$$\text{oder } z = \tfrac{1}{4}b\,\varphi - \tfrac{1}{8}b.\,(Sin.\,2\,\varphi + \tfrac{1}{2}b\,Sin\,\alpha\,Cos\,\varphi.$$

Hiemit sind die Curven bestimmt, welche die verlangte Eigenschaft haben, die aber sehr verschieden ausfallen, jenachdem man die unbestimmte *Constans* = $Sin\,\alpha$ anders annimmt.

159. Um diese Curven näher kennen zu lernen, sei zuerst $Sin\,\alpha = 0$,

also $x = \frac{1}{4}b\,Sin^2\,\varphi = \frac{1}{8}b\,(1 - Cos\,2\,\varphi)$,

$z = \frac{1}{8}b.\,(2\,\varphi - Sin.\,2\,\varphi)$.

In diesem Falle ist also die Curve eine Cycloide, 2φ ist der Wälzungswinkel und $\frac{1}{8}b$ der Halbmesser des wälzenden Kreises.

160. Für einen zweiten Fall sei $Sin\,\alpha = 1$,

$$\text{also } x = \tfrac{1}{4}b.\,(1 - Sin\,\varphi)^2$$

$$z = \tfrac{1}{4}b\,\varphi - \tfrac{b}{8}\,Sin\,2\,\varphi + \tfrac{1}{2}b\,Cos\,\varphi.$$

Da hier φ der Winkel war, welchen die Berührungslinie mit der Abscissenlinie macht, so ist die Curve mit der Abscissenlinie parallel, wenn $\varphi = 0$, also wenn $x = \frac{1}{4}b$ und $z = \frac{1}{2}b$ ist; aber auch für $\varphi = \pi$ ist die Berührungslinie mit der Abscissenlinie parallel, und für diesen Werth sowohl, als für

$\varphi = 2\pi,\ 3\pi,\ n\pi$ ist x allemal $= \frac{1}{4}b$; z aber $= \frac{1}{4}b.n\pi + \frac{1}{2}b$,
oder $= \frac{1}{4}b.n\pi - \frac{1}{2}b$,
wodurch indem man für n alle ganzen Zahlen setzt die Stellen bestimmt werden, wo die Curve mit der Abscissenlinie parallel ist. Um auch die zu haben, wo die Curve auf die Abscissenlinie senkrecht ist, müssen wir $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ oder allgemein $\varphi = (2n \pm \frac{1}{2})\pi$ nehmen. Für $\varphi = (2n + \frac{1}{2})\pi$ ist $x = 0$,
und $z = \frac{1}{2}b.n\pi + \frac{1}{8}b\pi$
für $\varphi = (2n - \frac{1}{2})\pi$ ist $x = b$,
$z = \frac{1}{2}nb\pi - \frac{1}{8}b\pi$.

Aber wo $Sin\,\varphi = +1$ ist, hat die Curve einen doppelten Punct, indem da

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-\frac{1}{4}b + \frac{1}{4}b\,Cos\,2\varphi + \frac{1}{2}b\,Sin\,\varphi}{\frac{1}{2}b\,Cos\,\varphi\,(1 - Sin\,\varphi)}$$
$$= \frac{Sin\,\varphi\,(1 - Sin\,\varphi)}{Cos\,\varphi\,(1 - Sin\,\varphi)}$$

in $\frac{0}{0}$ überzugehn scheint.

161. Wenn man die allgemeinen Gleichungen beibehält, so giebt

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}b\,Cos\,2\varphi - \frac{1}{2}b\,Sin\,\alpha\,Sin\,\varphi}{\frac{1}{2}b\,Cos\,\varphi\,(Sin\,\varphi - Sin\,\alpha)},$$

welches $= \frac{Sin\,\varphi.\,(Sin\,\varphi - Sin\,\alpha)}{Cos\,\varphi\,(Sin\,\varphi - Sin\,\alpha.)}$ ist, allemal einen doppelten Punct an, wo $Sin\,\varphi = Sin\,\alpha$, das ist wo entweder $\varphi = 2n\pi + \alpha$ oder $\varphi = (2n+1)\pi - \alpha$ ist. Dagegen wird im Allgemeinen die Curve mit der Abscissenlinie parallel, wo $Sin\,\varphi = 0$, also $x = \frac{1}{4}b\,Sin^2\,\alpha$, und $z = \frac{1}{4}b.n\pi \pm \frac{1}{2}b\,Sin\,\alpha$ ist; die Curve wird mit der Ordinate z parallel, wo $Cos\,\varphi = 0$, also
$\varphi = (2n \pm \frac{1}{2})\pi$, $x = \frac{1}{4}b\,(\pm 1 - Sin\,\alpha)^2$,
$z = \frac{1}{4}b\,(2n \pm \frac{1}{2})\pi$ ist.
Es ist nämlich für $z = \frac{1}{4}b\,(2n + \frac{1}{2})\pi$ allemal $x = \frac{1}{4}b\,(1 - Sin\,\alpha)^2$,
für $z = \frac{1}{4}b\,(2n - \frac{1}{2})\pi$ allemal $x = \frac{1}{4}b\,(1 + Sin\,\alpha)^2$.
In Fig. 48. ist der Fall dargestellt, wo $Sin\,\alpha = 1$ ist, und nach unsern Bestimmungen soll hier in A ein doppelter Punct sein. Wenn man Fig. 43. wo $Sin\,\alpha = \frac{1}{2}$ ist, hiemit vergleicht, so kann man sich leicht überzeugen, daſs die beiden Rückkehrpuncte, D, E, wo in Fig. 43. $\varphi = 30°$ und $= 150°$ ist, desto näher aneinander rücken, jemehr $Sin\,\alpha$ dem Werthe $= 1$ nahe kömmt, und in A (Fig. 48.) zusammen fallen; man muſs daher A so ansehn, als ob hier ein zugeordneter Punct auf der Curve selbst läge. Die Tangenten DG, EG sind gegen die Abscissenlinie CH unter den Winkeln $= 30°$ und $= 150°$ geneigt. In beiden Figuren ist $CF = \frac{1}{4}b$.

162. **Aufgabe.** Die Curven zu bestimmen, deren Krümmungshalbmesser in jedem Puncte dem von einem festen Puncte C (Fig. 44.) an ihn gezognen Radius Vector proportional ist.

Auflösung. Es sei (Fig. 44.) C der Punct, von welchem die Radien ausgehn, und die Curve werde durch den veränderlichen Winkel $ACB = \vartheta$ und den Abstand $CB = \varrho$ bestimmt. Nimmt man hier $d\vartheta$ als das unveränderliche Differential an, so ist der Krümmungshalbmesser (§. 50.)

$$= \frac{(d\varrho^2 + \varrho^2 d\vartheta^2)^{\frac{3}{2}}}{d\vartheta\,(2d\varrho^2 - \varrho d^2\varrho + \varrho^2 d\vartheta^2)}$$ und dieser soll $= n\varrho$ sein.

Um die hieraus entstehende Differentialgleichung aufzulösen, setze ich

$$\frac{d\varrho}{d\vartheta} = p, \text{ also } n\varrho = \frac{(p^2 + \varrho^2)^{\frac{3}{2}}}{\left(2p^2 - \frac{\varrho\, dp}{d\vartheta} + \varrho^2\right)}$$

oder da $d\vartheta = \frac{d\varrho}{p}$ ist, $n\varrho = \frac{(p^2 + \varrho^2)^{\frac{3}{2}}}{\left(2p^2 + \varrho^2 - \frac{\varrho p\, dp}{d\varrho}\right)}$

oder $2n\varrho p^2 d\varrho + n\varrho^3 d\varrho - n\varrho^2 p\, dp = (p^2 + \varrho^2)^{\frac{3}{2}}.\, d\varrho.$

Da diese Gleichung homogen ist, so wird sie bequemer, wenn man $p = v \cdot \varrho$ setzt, und dann giebt sie:

$$n.\, d\varrho\,(v^2 + 1) - nv\varrho\, dv = d\varrho\,(1 + v^2)^{\frac{3}{2}},$$

oder $\frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{nv\, dv}{(1+v^2)(n - \sqrt{(1+v^2)})}$

oder $log\, \frac{\varrho}{C} = log.\, \frac{\sqrt{(1+v^2)}}{n - \sqrt{(1+v^2)}}$

oder $\varrho = \frac{C\sqrt{(1+v^2)}}{n - \sqrt{(1+v^2)}}.$

Da zugleich $\frac{d\varrho}{d\vartheta} = p = v\varrho$ ist, so wird

$$d\vartheta = \frac{n\, dv}{(1+v^2)(n - \sqrt{(1+v^2)})}.$$

Es sei $v = tang\, \xi$, also $dv = d\xi.\, Sec^2.\xi = d\xi\,(1 + v^2)$

so ist $d\vartheta = \frac{n\, d\xi}{n - Sec\,\xi} = \frac{n\, d\xi.\, Cos\,\xi}{n\, Cos\,\xi - 1}$

wo das Integral verschieden ausfällt, jenachdem $n = 1$ oder $n > 1$ oder $n < 1$ ist.

1. Es sei $n = 1$, so ist $\varrho = \frac{C.\, Sec\,\xi}{1 - Sec\,\xi}$

$$\frac{\varrho}{\varrho + C} = Sec\,\xi,$$

oder $\frac{\varrho + C}{\varrho} = Cos\,\xi = 1 + \frac{C}{\varrho}$, folglich $\frac{-C}{2\varrho} = Sin^2.\,\frac{1}{2}\,\xi$.

oder $2\varrho = -\frac{C}{Sin^2\,\frac{1}{2}\,\xi}$. Ferner ist

$$d\vartheta = \frac{-d\xi\,Cos\,\xi}{1 - Cos\,\xi} = d\xi + \frac{d\xi}{Cos\,\xi - 1}$$

oder $d\vartheta = d\xi - \frac{d\xi}{2\,Sin^2\,\frac{1}{2}\,\xi} = d\xi + d.\,Cotang.\,\frac{1}{2}\,\xi$.

$$\vartheta = E + \xi + Cotang.\,\frac{1}{2}\,\xi.$$

Wenn man hier ξ nach und nach alle Werthe von 180° bis 0 beilegt, so wächst ϑ von $E + 180°$ ins Unendliche und auch ϱ wächst, indem man die *Constans*, $C = -D$ setzt von D bis ins Unendliche; die Linie ist also eine Spirallinie, die in unzähligen Windungen um den Mittelpunct läuft.

Nur in dem Falle, da $C = 0$ angenommen würde, wäre

$\varrho = \frac{C\sqrt{(1 + \nu^2)}}{n - \sqrt{(1 + \nu^2)}}$ = unbestimmt wenn zugleich $n = \sqrt{(1 + \nu^2)}$ oder $\nu^2 = n^2 - 1$ angenommen würde. Dieser Fall deutet auf den Kreis, für welchen $\varrho = Const.$ ist; auch die erste Gleichung

$\frac{(d\varrho^2 + \varrho^2\,d\vartheta^2)^{\frac{3}{2}}}{d\vartheta\,(2\,d\varrho^2 - \varrho\,d^2\varrho + \varrho^2\,d\vartheta^2)} = \varrho$, wenn $n = 1$ ist, läſst $d\vartheta$ ganz unbestimmt, wenn $d\varrho = 0$ ist, so daſs auch hier $\varrho = Const.$ sich als eine Auflösung zeigt.

2. Wenn n nicht $= 1$ ist, so wird

$$d\vartheta = \frac{n\,d\xi\,Cos\,\xi}{n\,Cos\,\xi - 1} = d\xi - \frac{d\xi}{1 - n\,Cos\,\xi}.$$

Da nun $Cos\,\xi = 2\,Cos^2\,\frac{1}{2}\,\xi - 1 = \frac{2 - Sec^2\,\frac{1}{2}\,\xi}{Sec^2\,\frac{1}{2}\,\xi} = \frac{1 - tang^2\,\frac{1}{2}\,\xi}{1 + tang^2\,\frac{1}{2}\,\xi}$,

so ist $\frac{d\xi}{1 - n\,Cos\,\xi} = \frac{d\xi.\,Sec^2\,\frac{1}{2}\,\xi}{(1-n) + (n+1)\,tang^2\,\frac{1}{2}\,\xi} = \frac{2.\,d.\,tang.\,\frac{1}{2}\,\xi}{(1-n) + (n+1)\,tang^2\,\frac{1}{2}\,\xi}$

und hier fällt die Auflösung anders aus, wenn $n > 1$ und anders wenn $n < 1$ ist.

Für $n > 1$ ist

$$\frac{d\xi}{1 - n\,Cos\,\xi} = \frac{2.\,d.\,tang\,\frac{1}{2}\,\xi}{(n+1)\,tg^2\,\frac{1}{2}\,\xi - (n-1)} = \frac{d.\,tang\,\frac{1}{2}\,\xi}{\sqrt{(n^2-1)}\left\{tang\,\frac{1}{2}\,\xi - \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\right\}}$$

$$- \frac{d.\,tang\,\frac{1}{2}\,\xi}{\sqrt{(n^2-1)}\left\{tang.\,\frac{1}{2}\,\xi + \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\right\}}$$

$$\int \frac{d\xi}{1-n \, Cos \, \xi} = \frac{1}{\sqrt{(n^2-1)}} \log \frac{tang \, \tfrac{1}{2}\xi - \sqrt{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)}}{tang \, \tfrac{1}{2}\xi + \sqrt{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)}}$$

also $\vartheta = E + \xi - \frac{1}{\sqrt{(n^2-1)}} \log \frac{tang \, \tfrac{1}{2}\xi - \sqrt{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)}}{tang \, \tfrac{1}{2}\xi + \sqrt{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)}}$;

und ϱ ist $= \frac{C \, Sec \, \xi}{n - Sec \, \xi} = \frac{C}{n \, Cos \, \xi - 1}$.

Setze ich $n = Sec. \, \alpha$, so ist $\frac{n-1}{n+1} = \frac{1 - Cos \, \alpha}{1 + Cos \, \alpha} = tang^2. \, \tfrac{1}{2} \alpha$.

also auch $\varrho = \frac{C. \, Cos \, \alpha}{Cos \, \xi - Cos \, \alpha}$ oder wenn $C = -D$ ist, $\varrho = \frac{D \, Cos \, \alpha}{Cos \, \alpha - Cos \, \xi}$.

und $\vartheta = E + \xi - Cotang. \, \alpha. \log \left\{ \frac{tang \, \tfrac{1}{2}\xi - tang \, \tfrac{1}{2}\alpha}{tang \, \tfrac{1}{2}\xi + tang \, \tfrac{1}{2}\alpha} \right\}$

oder $\vartheta = E + \xi - Cotang \, \alpha. \log \left\{ \frac{Sin \, \tfrac{1}{2}(\xi - \alpha)}{Sin \, \tfrac{1}{2}(\xi + \alpha)} \right\}$.

Für $\xi = 180°$ wird ϱ am kleinsten $= \frac{D \, Cos \, \alpha}{1 + Cos \, \alpha}$

und zugleich $\vartheta = E + 180°$; für $\xi = \alpha$ wird $\varrho = \infty$
und $\vartheta = \infty$; für $\xi = 360° - \alpha$ ist ebenfalls $\varrho = \infty$ und $\vartheta = -\infty$.

3. Wenn $n < 1$ ist, so giebt

$$d\vartheta = d\xi - \frac{d\xi}{1 - n \, Cos \, \xi} = d\xi - \frac{2. \, d. \, tang \, \tfrac{1}{2}\xi}{(1-n) + (1+n) \, tang^2 \, \tfrac{1}{2}\xi}$$

oder $\vartheta = E + \xi - \frac{2}{\sqrt{(1-n^2)}} \, Arc. \, tang. \left\{ \frac{\sqrt{(1+n)}}{\sqrt{(1-n)}} \, tang \, \tfrac{1}{2}\xi \right\}$,

Setze ich $n = Cos \, \beta$, so ist $\frac{\sqrt{(1+n)}}{\sqrt{(1-n)}} = Cotang. \, \tfrac{1}{2}\beta$, also

$$\vartheta = E + \xi - \frac{2}{Sin \, \beta} \, Arc. tang. \left\{ \frac{tang \, \tfrac{1}{2}\xi}{tang \, \tfrac{1}{2}\beta} \right\},$$

und $\varrho = \frac{-C}{1 - n \, Cos \, \xi} = \frac{D}{1 - Cos \, \beta. \, Cos \, \xi}$.

Wenn hier $\xi = 0$ ist, so wird $\varrho = \frac{D}{1 - Cos \, \beta}$, $\vartheta = E$,

für $\xi = 90°$ wird $\varrho = D$; $\vartheta = E + \tfrac{1}{2}\pi - \frac{2}{Sin \, \beta} \left(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\beta\right)$

für $\xi = 180°$ wird $\varrho = \frac{D}{1 + Cos\beta}$; $\vartheta = E + \pi - \frac{\pi}{Sin\beta}$.
Hier kann nie $\varrho = \infty$ werden, und wenn $\xi = 2\pi + \xi'$ würde, so erhielte ϱ denselben Werth, den es bei $\xi = \xi'$ hatte, aber ϑ erhält verschiedene Werthe, so dafs die ganze Curve aus vielen gleichen um den Mittelpunct herumliegenden Theilen besteht.

163. Die für den Fall $n = 1$ gefundene Curve, ist in den Gleichungen $\varrho = \frac{\frac{1}{2} D}{Sin^2 \frac{1}{2} \xi}$ und $\vartheta = \xi + Cotang\, \frac{1}{2}\xi$ enthalten. Ihr kleinster Abstand vom Mittelpuncte ist $\varrho = \frac{1}{2} D$, wenn $\frac{1}{2}\xi = 90° = \frac{1}{2}\pi$, und $\vartheta = E + \pi$ ist; und von hier an erstreckt sich die Curve in zwei gleichen Aesten in unendlichen Windungen um den Mittelpunct herum. Fig. 44. zeigt einen Theil dieser Curve. Setze ich also $E = -\pi$, so ist allgemein
$\vartheta = \xi - \pi + Cotang\, \frac{1}{2}\xi$.

Für $\xi = \frac{1}{2}\pi$, ist $Cotang\, \frac{1}{2}\xi = 1$ und $\vartheta = -0{,}5708 = -32°.\ 42'$.
$\varrho = D$ und hier wird die Curve von dem Radius Vector berührt.
Für $\xi = \frac{1}{3}\pi = 60°$ ist $\vartheta = -\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3} = -0{,}3624 = -20°.\ 45'$. und $\varrho = 2D$; ferner ist

für $\xi = 160°$	$\vartheta = -9°.\ 54'$.	$\varrho = 0{,}517.\ D$.
$\xi = 135°$	$\vartheta = -21.\ 16$.	$\varrho = 0{,}586.\ D$.
$\xi = 120°$	$\vartheta = -26.\ 56$.	$\varrho = 0{,}667.\ D$.
$\xi = 105°$	$\vartheta = -31.\ \ 2$.	$\varrho = 0{,}794.\ D$.
$\xi = 90°$	$\vartheta = -32.\ 42$.	$\varrho = 1{,}000.\ D$.
$\xi = 80°$	$\vartheta = -31.\ 42$.	$\varrho = 1{,}239.\ D$.
$\xi = 70°$	$\vartheta = -28.\ 31$.	$\varrho = 1{,}523.\ D$.
$\xi = 60°$	$\vartheta = -20.\ 45$.	$\varrho = 2{,}000.\ D$.
$\xi = 50°$	$\vartheta = -\ 7.\ \ 8$.	$\varrho = 2{,}799.\ D$.
$\xi = 40°$	$\vartheta = +17.\ 25$.	$\varrho = 4{,}275.\ D$.

164. Um auch einen Fall zu betrachten, wo $n > 1$ ist, sei $n = \sqrt{2}$, also $\alpha = 45°$, $\varrho = \frac{D}{1 - \sqrt{2}.\ Cos\,\xi}$ und $\vartheta = E + \xi - log \left|\frac{Sin\,\frac{1}{2}(\xi - 45°)}{Sin\,\frac{1}{2}(\xi + 45°)}\right|$

$$= \xi - \pi + log \left|\frac{Sin\,\frac{1}{2}(\xi + 45°)}{Sin\,\frac{1}{2}(\xi - 45°)}\right|$$

wenn $\vartheta = 0$ sein soll für $\xi = 180°$, wo ϱ seinen kleinsten Werth erhält. Dann wird

für $\xi = 180°$,	$\varrho = \frac{D}{1+\sqrt{2}} = 0,414$;	$\vartheta = 0$;
$\xi = 180° \mp 30°$;	$\varrho = 0,430$;	$\vartheta = \xi - \pi \pm 0,2229 = \mp 17°.\ 14'$.
$\xi = 180° \mp 60°$;	$\varrho = 0,586$;	$\vartheta = \xi - \pi \pm 0,4877 = \mp 32°.\ 4'$.
$\xi = 180° \mp 90°$;	$\varrho = 1,000$;	$\vartheta = \xi - \pi \pm 0,8813 = \mp 39°.\ 29'$.
$\xi = 180° \mp 105°$;	$\varrho = 1,579$;	$\vartheta = \xi - \pi \pm 1,2078 = \mp 35°.\ 47'$.
$\xi = 180° \mp 120°$;	$\varrho = 3,414$;	$\vartheta = \xi - \pi \pm 1,8047 = \mp 16°.\ 36'$
$\xi = 180° \mp 125°$;	$\varrho = 5,294$;	$\vartheta = \xi - \pi \pm 2,1736 = \mp 0°.\ 28'$.
$\xi = 180° \mp 130°$;	$\varrho = 10,965$;	$\vartheta = \xi - \pi \pm 2,8274 = \pm 32°.\ 0'$
$\xi = 180° \mp 133°$;	$\varrho = 28,090$;	$\vartheta = \xi - \pi \pm 3,7189 = \pm 80°.\ 5'$.
$\xi = 180° \mp 134°$;	$\varrho = 56,50$;	$\vartheta = \xi - \pi \pm 4,4035 = \pm 118°.\ 18'$.
$\xi = 180° \mp 134°30'$;	$\varrho = 114,06$;	$\vartheta = \xi - \pi \pm 5,0921 = \pm 246°.\ 15'$.
$\xi = 180° \mp 135°$;	$\varrho = \infty$	$\vartheta = \pm\infty$

In Fig. 45. ist diese Curve dargestellt.

165. Ein Beispiel für $n < 1$ bietet die Voraussetzung $n = \frac{1}{\sqrt{2}} = Cos\,\beta$, also $\beta = 45°$ dar; diese giebt: $\varrho = \frac{D.\sqrt{2}}{\sqrt{2} - Cos\,\xi}$ und

$$\vartheta = \xi - 2\sqrt{2}.\ Arc.\ tang.\ \left\{\frac{tang.\ \frac{1}{2}\xi}{tang.\ 22°.\ 30'}\right\}.$$

Für $\xi = 0$	$\varrho = 3,41.$	$\vartheta = 0$;
$\xi = 45°$,	$\varrho = 2,00.$	$\vartheta = -\ 82°.\ 16'$.
$\xi = 90°$,	$\varrho = 1,00.$	$\vartheta = -\ 100°.\ 53'$.
$\xi = 135°$,	$\varrho = 0,67.$	$\vartheta = -\ 92°.\ 0'$.
$\xi = 180°$,	$\varrho = 0,50.$	$\vartheta = -\ 74°.\ 31'$.
$\xi = 225°$,	$\varrho = 0,67.$	$\vartheta = -\ 57°.\ 2'$.
$\xi = 270°$,	$\varrho = 1,00.$	$\vartheta = -\ 48°.\ 10'$.
$\xi = 315°$,	$\varrho = 2,00.$	$\vartheta = -\ 66°.\ 47'$.
$\xi = 360°$,	$\varrho = 3,41.$	$\vartheta = -\ 149°.\ 6'$.
$\xi = 450°$,	$\varrho = 1,00.$	$\vartheta = -\ 269°.\ 50'$.
$\xi = 540°$,	$\varrho = 0,50.$	$\vartheta = -\ 223.\ 34.$
$\xi = 630°$,	$\varrho = 1.00.$	$\vartheta = -\ 197.\ 19.$
$\xi = 720°$,	$\varrho = 3,41.$	$\vartheta = -\ 298.\ 13.$

Hieraus erhellt, dafs die Curve in diesem Falle aus unzählich gleichen, um den Mittelpunct herumliegenden Stücken besteht, wie in Fig. 46.

166. Für $n > 1$ giebt auch die logarithmische Spirallinie eine Auflösung, die dadurch angedeutet wird, dafs $\frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{0}{0}$ wird, wenn man $n = \sqrt{(1 + \nu^2)}$ oder $\nu^2 = n^2 - 1$ also $d\nu = 0$ setzt. Dieser Fall fordert, dafs

man die *Constans* $C = 0$ setze, wo dann ϱ unbestimmt bleibt, und die ganze Bestimmung auf der Gleichung $\frac{d\varrho}{\varrho} = \nu . d\vartheta = d\vartheta . \sqrt{(n^2 - 1)}$ beruht.

167. Aufgabe. Eine Curve zu bestimmen, deren Krümmungshalbmesser der nten Potenz des von einem gewissen Anfangspuncte an gerechneten Bogens proportional ist.

Auflösung. Es ist allgemein der Krümmungshalbmesser $= \frac{ds^3}{dz d^2 x - dx . d^2 z}$, wenn x, z auf einander senkrechte Coordinaten sind; da aber hier der Krümmungshalbmesser mit dem Bogen verglichen werden soll, so ist es am bequemsten, ds als unveränderliches Differential anzusehn, also $d. \sqrt{(dx^2 + dz^2)} = 0$, mithin $d^2 z = - \frac{dx\, d^2 x}{dz}$ zu setzen und den Krümmungshalbmesser durch $= \frac{ds^3\, dz}{ds^2 . d^2 x} = \frac{ds . dz}{d^2 x}$ darzustellen.

Hier soll der Krümmungshalbmesser $= \frac{s^n}{a^{n-1}}$ sein, also

$$\frac{ds . dz.}{d^2 x} = \frac{s^n}{a^{n-1}}; \quad \frac{ds . \sqrt{(ds^2 - dx^2)}}{d^2 x} = \frac{s^n}{a^{n-1}}, \text{ oder}$$

$$\frac{ds}{s^n} = \frac{1}{a^{n-1}} . \frac{d. \frac{dx}{ds}}{\sqrt{\left(1 - \frac{dx^2}{ds^2}\right)}} \text{ das ist } C - \frac{1}{(n-1)} s^{-n+1} =$$

$$- a^{-n+1} . Arc. Cosin \frac{dx}{ds} \text{ oder } Arc. Cosin. \frac{dx}{ds} = D + \frac{1}{n-1} \left(\frac{s}{a}\right)^{-n+1}.$$

Der Winkel, dessen *Cosinus* $= \frac{dx}{ds}$, ist hier derjenige den die Berührungslinie in irgend einem Puncte mit der Abscissenlinie macht; also wenn er $= \varphi$ heifst, $\varphi = + D + \frac{1}{n-1} \left(\frac{s}{a}\right)^{-n+1}$ und $dx = ds . Cos\, \varphi$.

Um hieraus x zu finden, setze ich, theilweise integrirend $x = s\, Cos\, \varphi - \int s d. Cos \varphi$, und für das letztere Integral erhalten wir:

$$\int \frac{a . d. Cos\, \varphi}{((\varphi - D)(n-1))^{\frac{1}{n-1}}},$$ welches sich nicht gut allgemein integriren läfst.

1. Ein Fall, wo die Integration leicht wird, ist $n = \frac{1}{2}$, da würde die-

ses Integral $= \int \frac{a. d\, Cos\, \varphi}{\{\frac{1}{2}(D-\varphi)\}^{-2}} = \int \frac{a. d\, Cos \varphi.}{4} . \{D-\varphi\}^2$

$$= \tfrac{1}{4} a \{D^2. Cos \varphi - 2 D. \int \varphi. d\, Cos\, \varphi + \int \varphi^2\, d\, Cos\, \varphi\}$$

$$= \tfrac{1}{4} a \{D^2. Cos \varphi - 2 D. \varphi. Cos\, \varphi + 2 D. Sin\, \varphi + \varphi^2\, Cos\, \varphi - 2 \varphi\, Sin\, \varphi - 2\, Cos \varphi\}$$

also $x = s\, Cos\, \varphi - \frac{1}{4} a \{(D-\varphi)^2\, Cos \varphi + 2\,(D-\varphi)\, Sin\, \varphi - 2\, Cos\, \varphi\}$,
Und ebenso, da $dz = ds.\, Sin\, \varphi$ ist,

$z = s.\, Sin\, \varphi - \int s.\, d\, Sin\, \varphi = s\, Sin\, \varphi - \frac{1}{4} a \int d.\, Sin\, \varphi\, \{D-\varphi\}^2$, oder

$z = s.\, Sin\, \varphi - \frac{1}{4} a \{(D-\varphi)^2\, Sin\, \varphi - 2\,(D-\varphi)\, Cos\, \varphi - 2\, Sin\, \varphi\}$
wo $s = \frac{a}{4}\,(D-\varphi)^2$ ist, also

$$x = \tfrac{1}{2} a\,(Cos\, \varphi - (D-\varphi)\, Sin\, \varphi);$$
$$z = \tfrac{1}{2} a\,(Sin\, \varphi + (D-\varphi)\, Cos\, \varphi);$$

$$\sqrt{(x^2+z^2)} = \tfrac{1}{2} a\,(1+(D-\varphi)^2)^{\frac{1}{2}} \text{ und}$$

$$\frac{z}{x} = \frac{tang\, \varphi + (D-\varphi)}{1-(D-\varphi)\, tang\, \varphi.}$$

Setze ich hier $D - \varphi = tang\, \vartheta$, so ist $\frac{z}{x} = tang\,(\varphi + \vartheta) = tang\, \psi$;
also der Winkel $= \psi$, welchen der Radius Vector mit der Abscissenlinie macht $= \vartheta + \varphi = D + \vartheta - tang\, \vartheta$ und der Radius Vector $= \sqrt{(x^2+z^2)} = \frac{1}{2} a.\, Sec.\, \vartheta$.

2. Für $n = 1$ wäre gleich Anfangs $log\, \frac{s}{B} = Arc.\, Cos\left(\frac{dx}{ds}\right) = \varphi$, geworden, also, wie aus §. 149. erhellt, die Curve eine logarithmische Spirallinie.

168. Wenn man die für $n = \frac{1}{2}$ gefundene Curve näher betrachtet, so sieht man, daſs sie sich (wie Fig. 47. zeigt) von der in §. 163. gefundenen Curve unterscheidet, obgleich die Gleichungen einige Aehnlichkeit haben. Man findet nämlich für $D = 0$

$\vartheta = 0$,	den Winkel des Rad. Vect.	$=$ 0.	0;	$\varrho = 0{,}500.\ a$
$\vartheta = 10°$,	den Winkel des Rad. Vect.	$=$ 20°.	6;	$\varrho = 0{,}508.\ a$
$\vartheta = 22°\ 30'$		$=$ 46.	45;	$\varrho = 0{,}541.\ a$
$\vartheta = 30°$		$=$ 63.	5;	$\varrho = 0{,}577.\ a$
$\vartheta = 37°\ 30'$		$=$ 81.	30;	$\varrho = 0{,}630.\ a$
$\vartheta = 45°$		$=$ 102.	18;	$\varrho = 0{,}707.\ a$
$\vartheta = 60°$		$=$ 159.	14.	$\varrho = 1{,}000.\ a$
$\vartheta = 70°$		$=$ 227.	26.	$\varrho = 1{,}462.\ a$
$\vartheta = 80°$		$=$ 380.	0.	$\varrho = 2{,}879.\ a$

169. Diese Betrachtungen zeigen, wie durch die Voraussetzung solcher Eigenschaften, Curven als verwandt erscheinen, deren Gleichungen sehr von einander verschieden sind, und die, bei sonst sehr verschiedener Beschaffenheit, doch hier etwas Uebereinstimmendes haben.

3. *Betrachtung von Curven, die in der Statik oder Mechanik als merkwürdig vorkommen.*

170. Bemerkung. Wenn man eine biegsame Kette, die in allen Puncten gleich schwer ist, mit ihren beiden Enden aufhängt, so nimmt diese vermöge ihrer Schwere eine bestimmte Gestalt an, die nach den Principien der Statik auf folgende Weise bestimmt wird. Jedes Theilchen SX (Fig. 48.) hat eine Spannung $= T$, die nach horizontaler Richtung zerlegt eine überall gleich grofse Kraft $= C$ hervorbringt, nach verticaler Richtung aber eine Kraft die dem Gewichte des vom untern Puncte C an gerechneten Bogens CX proportional ist. Nach den Principien der Statik ist die aus der nach der Richtung SX wirkenden Spannung $= T$ entstehende horizontale Kraft $= T\,Cos\,XSZ = C$ und die verticale Kraft $= T.\,Sin\,XSZ =$ dem Gewichte von CS, also der Länge dieses Bogens proportional.

171. Aufgabe. Eine Gleichung für die Kettenlinie zu finden.

Auflösung. Es sei für irgend einen Punct derselben $CU = x$, $UX = z$, der Bogen $CX = s$, also $XS = ds$, $ZS = dz$, $XZ = dx$, das Gewicht des Bogens $= gs$; folglich $T.\frac{dz}{ds} = C$ und $T.\frac{dx}{ds} = gs$, also $\frac{C.\,ds}{dz} = \frac{gsds}{dx}$ oder $Cdx = gsdz = gs\sqrt{(ds^2 - dx^2)}$. Daraus folgt $dx = \frac{gsds}{\sqrt{(C^2 + g^2s^2)}}$, also $x = \frac{1}{g}\sqrt{(C^2 + g^2s^2)} - \frac{C}{g}$, wenn x und s zugleich verschwinden sollen, und

$$dz = \sqrt{(ds^2 - dx^2)} = ds\sqrt{\left(1 - \frac{g^2s^2}{(C^2 + g^2s^2)}\right)} = \frac{Cds}{\sqrt{(C^2 + g^2s^2)}} \text{ also}$$

$$z = \frac{C}{g}\log\frac{+gs + \sqrt{(C^2 + g^2s^2)}}{C}.$$

Um die Ordinate durch die Abscisse auszudrücken, ist es bequem $x + \frac{C}{g} = u$ zu setzen, also den Anfangspunct der x um so viel zu verlegen, als $\frac{C}{g}$ beträgt, dann ist $u^2 = \frac{C^2}{g^2} + s^2$ also $z = \frac{C}{g}\log\left(\frac{gu + \sqrt{(g^2u^2 - C^2)}}{C}\right)$.

Wenn für den einen Endpunct $CD = x = a$, und die Länge des Bogens $= f = CA$ ist, so wird $\left(x + \frac{C}{g}\right)^2 = \frac{C^2}{g^2} + s^2$ an dieser Stelle $(ag + C)^2 = C^2 + g^2 f^2$, also $C = g\,\frac{(f^2 - a^2)}{2a}$ geben, und so ist alles durch gegebne Gröſsen bestimmt und $z = \frac{(f^2 - a^2)}{2a} . log. \left\{\frac{2au + \surd(4a^2u^2 - (f^2 - a^2)^2)}{f^2 - a^2}\right\}$ oder $z = \frac{(f^2 - a^2)}{2a} . log \left\{\frac{2ax + (f^2 - a^2) + \surd\{4a^2x^2 + 4ax\,(f^2 - a^2)\}}{f^2 - a^2}\right\}$

172. Hier ist C die Spannung im tiefsten Puncte, wo die Richtung der Curve horizontal ist, diese ist also $= g\,\frac{(f^2 - a^2)}{2a}$, und folglich bei gleicher Länge des Bogens $= f$ um so kleiner je weniger die Abscisse vom Bogen verschieden ist. Wollte man die Abscisse $CD = a$, als $= 0$ ansehen, so müſste C unendlich groſs sein, das heiſst, um ein Seil so straff zu spannen, daſs es ganz horizontal wäre, würde eine unendliche Kraft erfordert.

Die Länge jedes Bogens $CX = s$ ist $= \surd\left(x^2 + \frac{2Cx}{g}\right) = \surd\left(x^2 + x\,\frac{(f^2 - a^2)}{a}\right)$ und daher $(s^2 - x^2) : xa = (f^2 - a^2) : a^2$ oder das Verhältniſs von $s^2 - x^2$ zu ax ein unveränderliches. Wenn die Länge der ganzen Kette $= f$ und die Lage beider Endpuncte gegeben wäre, so würde man fragen, wie die Lage des Scheitels bestimmt werde. Es sei also die Lage der Endpuncte durch $DF = h$, $AD + FB = k$ bestimmt und nun $CD = x$, $DA = z$ und $CF = x - h$, $FB = k - z$ zu bestimmen; dann giebt zuerst die für die Länge des Bogens gefundene Gleichung für $CXA + CB$ den Werth

$$= \surd\left\{x^2 + \frac{2Cx}{g}\right\} + \surd\left\{(x - h)^2 + \frac{2C(x - h)}{g}\right\} = f,$$

aber auch für z und $k - z$ erhalten wir zwei Gleichungen, so daſs drei Gleichungen gegeben sind, aus welchen x, z und $\frac{C}{g}$ bestimmt werden können.

173. Nach den Regeln der Statik findet man die Abscisse des Schwerpunctes der ganzen so aufgehängten Kette, wenn man das Integral $\int x . ds = \int x \surd(dx^2 + dz^2)$ von einem Ende A der Kette bis zum andern B sucht und dieses Integral mit der ganzen Länge $AXCB$ der Kette $= \int \surd(dx^2 + dz^2)$ dividirt.

Die Kettenlinie hat nun die Eigenschaft, daſs ihr Schwerpunct tiefer liegt, als er liegen würde, wenn die in eben den Endpuncten A, B, befestigte Kette bei gleicher Länge irgend eine anders gekrümmte Gestalt hätte. Den Beweis hiefür giebt die Variationsrechnung. Da nämlich $\dfrac{\int x\sqrt{(dx^2+dz^2)}}{\int\sqrt{(dx^2+dz^2)}}$ ein Kleinstes geben soll, wenn beide Integrale zwischen den durch die festen Endpuncte gegebnen Grenzen genommen werden, so muſs die Summe

$$\int x\sqrt{(dx^2+dz^2)}+h\int\sqrt{(dx^2+dz^2)}=\text{einem Kleinsten sein.}$$ —

Diese Umgestaltung dient, wenn h eine unbestimmte beständige Gröſse ist, um das relative Minimum, welches sich auf einen bestimmten Werth von $\int\sqrt{(dx^2+dz^2)}$ bezieht, in ein Absolutes Minimum oder in ein solches, das von der Bedingung, sich auf diesen bestimmten Bogen zu beziehn, frei ist, zu verwandeln. Denn wenn z eine solche Function von x ist, daſs $\int\{(x+h)\sqrt{(dx^2+dz^2)}\}$ ein Kleinstes wird, so ist für den bestimmten Werth, wo $h\int\sqrt{(dx^2+dz^2)}=fhh\int\sqrt{(dx^2+dz^2)}=hf$ wird, gewiſs das andre Glied ein Kleinstes, also das erfüllt, was eigentlich verlangt wurde.

Damit aber $\int\{(x+h)\sqrt{(dx^2+dz^2)}\}=minim.$ sei muſs

$$\delta.\int\{(x+h).\sqrt{(dx^2+dz^2)}\}\text{ oder}\int\left\{\delta x.\,ds+(x+h)\left(\frac{dx.\delta dx+dz.\delta dz}{\sqrt{(dx^2+dz^2)}}\right)\right\}$$

$=0$ sein; oder wenn man die Glieder, wo δdx und δdz die mit $d.\delta x$, $d.\delta z$ einerlei sind, vorkommen, theilweise integrirt und alles übrige unter dem Integralzeichen zusammenfaſst,

$$0=(x+h)\frac{dx}{ds}.\delta x+(x+h)\frac{dz}{ds}\delta z+$$
$$+\int\left\{(ds-d.)\left((x+h)\frac{dx}{ds}\right)\delta x-d\left((x+h)\frac{dz}{ds}\right)\delta z\right\}$$

Wenn dieses Integral von einem Endpuncte an genommen wird, so muſs es durch Beifügung einer beständigen Gröſse so bestimmt werden, daſs es $=0$ ist, wenn x und z die diesem Endpuncte entsprechenden Werthe haben, die ich x'', z'' nennen will; also muſs man

$$0=(x+h)\frac{dx}{ds}\delta x-(x''+h)\frac{dx''}{ds''}\delta x''+(x+h)\frac{dz}{ds}\delta z-(x''+h)\frac{dz''}{ds''}\delta z''$$
$$+\int\left[\left\{ds-d.\left((x+h)\frac{dx}{ds}\right)\right\}\delta x-d.\left((x+h)\frac{dz}{ds}\right)\delta z\right]$$

setzen, und es nun bis zum andern Endpuncte nehmen, wo x', z' die Coordinaten sein mögen.

Wenn die Endpuncte als feste, bestimmte Puncte gegeben sind, so findet für sie keine Aenderung der Lage statt, sondern, wie man sich auch die Form der Kette verändert denke, so bleibt sie doch immer an dieselben Endpuncte befestigt, und folglich für sie $\delta x''$, $\delta z''$ und ebenso $\delta x'$, $\delta z'$, $=0$, so daſs in diesem Falle die vom Integralzeichen befreiten Glieder gar nicht mehr im vollständig genommenen Integral vorkommen. Das unter dem Integralzeichen Stehende muſs allemal für sich allein verschwinden, da sein Werth nicht bloſs von den Endpuncten abhängt, sondern ein andrer wird, wenn die Form der Curve zwischen den Endpuncten geändert würde, und daher dieses Glied niemals so angesehn werden kann, als ob es sich gegen die vom Integralzeichen befreiten Glieder, selbst da, wo diese nicht $=0$ werden, aufhöbe. Da nun aber δx und δz auf keine Weise von einander abhängig sind, so muſs

$$ds-d.\left((x+h)\frac{dx}{ds}\right)=0 \text{ und } d.\left((x+h)\frac{dz}{ds}\right)=0 \text{ sein.}$$

Die letztere Gleichung giebt $(x+h)\frac{dz}{ds}=C$, also $Cds=(x+h)\sqrt{(ds^2-dx^2)}$,

oder $\frac{(x+h)\,dx}{\sqrt{((x+h)^2-C^2)}}=ds$, das ist $s=\sqrt{((x+h)^2-C^2)}-\sqrt{(h^2-C^2)}$, wenn s und x zugleich verschwinden sollen. Die erste Gleichung würde $s+E=(x+h)\frac{dx}{ds}$ geben, also $\frac{ds}{dx}=\frac{x+h}{s+E}$, welches mit dem Werthe der zweiten Gleichung $\frac{ds}{dx}=\frac{x+h}{\sqrt{((x+h)^2-C^2)}}$ einerlei ist, wenn man $E=\sqrt{(h^2-C^2)}$ setzt. Also thut der Werth
$s=\sqrt{((h+x)^2-C^2)}-\sqrt{(h^2-C^2)}$, beiden Gleichungen Genüge, und schon die Vergleichung der Differentialgleichungen mit §. 171. zeigt, daſs wir hier die Kettenlinie gefunden haben.

174. Wäre die Frage nicht so aufgestellt worden, daſs man beide Endpuncte als festgehalten voraussetzte, sondern hätte man den Endpuncten nur einen geometrischen Ort angewiesen, hätte man zum Beispiel verlangt zu bestimmen, an welchem Puncte des Kreises EKL (Fig. 49.) das eine Ende befestigt werden müsse, damit, während der andre Endpunct A fest bleibt, der

Schwerpunct am tiefsten liege: so blieben zwar die Schlüsse für den unter dem Integralzeichen stehenden Theil dieselben und die Natur der Curve würde eben so wie vorhin bestimmt; die beiden andern Glieder aber würden nun nicht mehr jedes für sich gleich Null. Es ist nämlich zu bemerken, dafs nun zwar für den einen Endpunct, welcher auch jetzt noch als fest vorausgesetzt ist, die Gröfsen $\delta x''$, $\delta z''$ verschwinden, und daher der vom Integralzeichen befreite Theil im Anfangspuncte von selbst $= 0$ wird, also nicht der Hinzufügung solcher Glieder, welche die *Constans* bei der Integration vertreten, bedarf; dafs aber am andern Ende allerdings eine willkürliche Verrückung des Endpunctes statt finden kann, jedoch so, dafs dieser immer auf dem Kreise EKL bleibe. Diese letzte Bedingung fordert, wenn ich für den Kreis die Gleichung $(z' - \beta)^2 = r^2 - (x' - \alpha)^2$ annehme, dafs $\delta z' = \frac{-\delta x' (x' - \alpha)}{z' - \beta}$ sei, sobald sich die Variationen auf diesen Endpunct beziehn, und folglich mufs in dem bis zum Endpuncte hin genommenen Werthe jener beiden Glieder, die $(x+h)\frac{dx}{ds}.\delta x + (x+h)\frac{dz}{ds}.\delta z$ waren, nun für δz jener Werth gesetzt werden, und sie müssen dann $= 0$ werden, also

$\delta x' \left\{(x+h)\frac{dx}{ds} - \frac{(x+h)(x'-\alpha)}{z'-\beta}\frac{dz}{ds}\right\} = 0$, oder da dies unabhängig von dem ganz willkürlichen $\delta x'$ geschehen mufs, das heifst, da der Anknüpfepunct so gewählt werden soll, dafs selbst bei einer unendlich kleinen Verrükkung das Integral eine verschwindende Variation habe, so mufs, während $\delta x'$ nicht verschwindet, doch das eben angeführte Glied $= 0$, oder

$\frac{dz}{dx} = \frac{z'-\beta}{x'-\alpha}$ sein. Da nun $\frac{dz}{dx}$ hier denjenigen Werth des für die Kettenlinie im Allgemeinen geltenden Differentialquotienten bedeutet, welchen er im Anknüpfepuncte erhält, und hier $\frac{dz}{dx} = \frac{-dx'}{dz'}$ sein soll, so ist in diesem Puncte E (Fig. 49.) die Kettenlinie auf den Kreis senkrecht, da die Tangente der Kettenlinie dort eben den Winkel mit x machen soll, welchen die Tangente des Kreises mit z macht. Und so würde der Endpunct E liegen, wenn er, etwa vermittelst eines Ringes auf dem Kreisbogen LKE fortgleitend, die dem Gleichgewichte angemessene Lage annähme.

Diese Bestimmung dient, um den Anknüpfepunct zu finden. Die in §. 173. gefundene Gleichung

$$s = \sqrt{((x+h)^2 - C^2)} - \sqrt{(h^2 - C^2)},\ \text{giebt}$$
$$x + h = \sqrt{(s^2 + 2s\sqrt{(h^2 - C^2)} + h^2)},\ \text{und}$$

es wird folglich, da $(x+h)\,dz = C\,ds$ war,

$$dz = \frac{Cds}{\sqrt{(s^2 + 2s.\sqrt{(h^2 - C^2)} + h^2)}},$$

oder $z = C.\ log\left(\frac{s + \sqrt{(h^2 - C^2)} + \sqrt{(s^2 + h^2 + 2s\sqrt{(h^2 - C^2)})}}{h + \sqrt{(h^2 - C^2)}}\right)$

oder $z = C.\ log. \left\{\frac{\sqrt{((x+h)^2 - C^2)} + x + h}{h + \sqrt{(h^2 - C^2)}}\right\}$.

Dieser Werth von z wird für positive x immer möglich, aber für negative x wird er unmöglich, sobald $h - x < C$ ist, das negative x hat also die Grenze $-x = C - h$, und mit ihr gehört $s = -\sqrt{(h^2 - C^2)}$ zusammen, als Länge des Bogens bis zum tiefsten Puncte. Es erhellt nun auch leicht, daſs jedem x zwei verschiedene Bögen entsprechen, oder

$$s = \pm\sqrt{((x+h)^2 - C^2)} - \sqrt{(h^2 - C^2)},$$

das ist in Fig. 49. Bogen $ACE = -Ce - CA$,
und Bogen $AE = +Ce - CA$,

Wenn nun hier $DF = -k$, $AD + FE = l$ und die Länge des Bogens $ACE = -f$ gegeben wäre, so hätte man zu Bestimmung der beiden Constanten h, C die zwei Gleichungen $f = \sqrt{(h^2 - C^2)} + \sqrt{((h-k)^2 - C^2)}$

und $l = C.\ log \left\{\frac{-f + \sqrt{(h^2 - C^2)} + h - k}{h + \sqrt{(h^2 - C^2)}}\right\}$.

Etwas schwieriger ist die Bestimmung der Gröſsen h und C, wenn der Endpunct E bloſs als auf dem Kreise liegend angegeben ist. Wir haben kurz zuvor gesehn, daſs dann in E, wo $DF = x'$, $AD + FE = z'$ ist, $\frac{dz}{dx} = \frac{z' - \beta}{x' - \alpha}$ sein muſs, wenn α, β, die Coordinaten des Mittelpunctes G sind; aber allgemein ist bei der Kettenlinie $\frac{dz}{ds} = \frac{C}{h + x}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{C}{\sqrt{((h+x)^2 - C^2)}}$

oder nach dem vorigen $\frac{dz}{dx} = \frac{C}{s + \sqrt{(h^2 - C^2)}}$,

also an jener Stelle, wo $s = -f$ ist,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{C}{-f + \sqrt{(h^2 - C^2)}} = \frac{z' - \beta}{x' - \alpha} = \frac{\sqrt{(r^2 - (x' - \alpha)^2)}}{x' - \alpha}.$$

Dies ist eine der Gleichungen, die hier zur Bestimmung der drei Gröſsen h, C und x' dienen. Die beiden andern sind

$$-f = \sqrt{(h^2 - C^2)} + \sqrt{((x' + h)^2 - C^2)}$$

und $z' = C.\ log. \left\{\frac{h + \sqrt{(h^2 - C^2)} - f + x'}{h + \sqrt{(h^2 - C^2)}}\right\}$.

womit also alles bestimmt ist.

175. **Bemerkung.** Wenn ein elastischer Stab AB (Fig. 50.) an seinem einen Ende A befestiget ist, an seinem andern Ende B mit einem Gewichte

beschwert ist: so wird er eine von der anfänglichen graden Richtung AC abweichende Krümmung annehmen. Um die Gestalt der so entstehenden krummen Linie zu finden, denken wir uns einen Punct X derselben durch die Coordinaten $BU = x$, $UX = z$ bestimmt; und es ist offenbar, dafs die elastische Kraft in diesem Puncte genau der Wirkung der in B angebrachten Kraft das Gleichgewicht halten muss, dafs nämlich, wenn die ganze übrige Curve in der angemessenen Form starr geworden wäre, und nur bei X noch eine Aenderung der Gestalt möglich bliebe, diese Aenderung durch die elastische Kraft an dieser Stelle gehindert werden müsse. Eben das gilt für alle Puncte des gekrümmten Stabes.

Wenn die nach der Richtung BD senkrecht auf XU wirkende Kraft $= P$ eine Drehung um den Punct X zu bewirken strebt, so ist ihre Wirkung nach den Principien der Statik dem Producte $P.XU$ proportional, und dieses Product heifst das Moment der Kraft. Die elastische Kraft dagegen nimmt man als dem Krümmungshalbmesser umgekehrt proportional an, wenn der Stab überall gleich dick ist, oder kann sie, da der Krümmungshalbmesser $= \frac{ds^3}{dz\,d^2x}$ ist, wenn man dz als beständig ansieht, durch $\frac{k^2\,d^2x\,dz}{ds^3}$ ausdrücken.

176. Aufgabe. Eine Gleichung für die elastische Curve zu finden.

Auflösung. Es sei $AV = x$, $VX = z$, $AW = b$, so soll, wenn ich dz als unveränderlich setze, für jeden Punct derselben der Krümmungshalbmesser der Gröfse $P\,(b - x)$ umgekehrt proportional, also

$$\frac{k^2.\,d^2x.\,dz}{ds^3} = P\,(b - x) \text{ sein, das ist}$$

$$k^2.\,d.\,\frac{dx}{dz} = P.\,(b - x)\,\frac{ds^3}{dz^2} = P\,(b - x)\,dz\left(1 + \frac{dx^2}{dz^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{oder } \frac{k^2.\,\frac{dx}{dz}.\,d.\,\frac{dx}{dz}}{\sqrt{}\left(1 + \frac{dx^2}{dz^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = P\,(b - x)\,dx,$$

$$\text{also } C - \frac{k^2}{\sqrt{}\left(1 + \frac{dx^2}{dz^2}\right)} = -\tfrac{1}{2}\,P\,(b - x)^2.$$

Soll in A, wo $x = 0$ ist, $\frac{dz}{dx} = tang.\ WAC = tang\,\beta$ sein, und allgemein $\frac{dz}{dx} = tang\,\varphi$, so ist

$$C = k^2.\,Sin\,\beta - \tfrac{1}{2}\,P\,b^2, \text{ und allgemein}$$
$$k^2\,(Sin\,\beta - Sin\,\varphi) = \tfrac{1}{2}\,P\,(b^2 - (b - x)^2).$$

Daraus folgt: $Sin\,\phi = Sin\,\beta - \frac{P}{2k^2}(b^2 - (b-x)^2)$

oder $dz = \frac{dx.\left(Sin\,\beta - \frac{P}{2k^2}(2bx - x^2)\right)}{\sqrt{\left(1 - \left(Sin\,\beta - \frac{P}{2k^2}(b^2 - (b-x)^2)\right)^2\right)}}$

Wenn die Tangente im Endpuncte A mit AW zusammenfällt, so ist $\beta = 0$, und $dz = \frac{dx.\,P\,(x^2 - 2bx)}{\sqrt{(4k^4 - P^2(2bx - x^2)^2)}}$ eine Gleichung, die sich nicht in endlicher Form integriren läſst, sondern eben die Schwierigkeiten darbietet, welche bei der Rectification der Ellipse eintreten.

176. *. Je gröſser die in B angebrachte, nach der Richtung BD wirkende Kraft ist, desto mehr nähert sich bei B die Richtung der Curve der BD selbst; und BD kann zur Tangente werden, wenn für $x = b$, $\frac{dz}{dx} = \infty$ oder $Sin\,\phi = 1$ wird, damit das geschehe, muſs hier

$1 = \frac{P}{2k^2}(2bx - x^2)$, oder da hier $x = b$ ist, $b^2 = \frac{2k^2}{P}$ sein. In diesem Falle wäre $dz = \frac{dx\,(x^2 - 2bx)}{\sqrt{(b^4 - (x^2 - 2bx)^2)}}$.

Für diesen und selbst für alle übrigen Fälle läſst sich also z für alle Werthe von x finden, indem man nur nach der Gauſsischen Methode mehrere Werthe für $\frac{x^2 - 2bx}{\sqrt{(b^4 - (x^2 - 2bx)^2)}} = w$ zu berechnen, und dann auf die Weise, wie es beim Quadriren der Curven geschieht, das Integral $\int w\,dx$ bis $x = 0, 1.b$, suchen muſs, um zu finden was z wird für $x = 0, 1.b$ und so für alle Werthe von x.

177. Man erhält eine noch bequemere Gleichung, wenn man die Gleichung für die elastische Curve auf folgende Weise ableitet. (Fig. 51.) ABD sei eine Feder, die durch ein in A nach der Richtung AD drückendes Gewicht $= P$ zusammengepreſst wird. Dann ist offenbar, wenn $AV = x$ heiſst,

$$P.x = \frac{k^2.\,d^2x\,dz}{ds^3} \text{ oder } Px\,dx = \frac{k^2\,\frac{dx}{dz}.\,d\,\frac{dx}{dz}}{\sqrt{\left(1 + \frac{dx^2}{dz^2}\right)^3}},$$

und $\frac{1}{2} Px^2 = C - \frac{k^2}{\sqrt{\left(1 + \frac{dx^2}{dz^2}\right)}}$, oder da für $x = 0$ AV die Berührungslinie sein soll, $C = 0$ und

$$\tfrac{1}{2} Px^2 \sqrt{(dx^2 + dz^2)} = - k^2 dz,$$

$$dz = \frac{Px^2 dx}{\sqrt{(4k^4 - P^2 x^4)}}.$$

Wenn man hier den Werth von x, wo $\frac{dz}{dx} = \infty$ wird, das heiſst den Werth von x, welcher dem Puncte B in der Figur (Fig. 51.) entspricht, $= b$ setzt, so ist $b^2 = \frac{2k^2}{P}$, also $dz = \frac{x^2 dx}{\sqrt{(b^4 - x^4)}}$.

Diese Gleichung giebt auch $ds = \sqrt{(dz^2 + dx^2)} = \frac{b^2 dx}{\sqrt{(b^4 - x^4)}}$, so daſs hier der Bogen durch seine Abscisse eben so wie bei der Lemniscata durch die Sehne ausgedrückt wird, und folglich ähnliche Vergleichungen der Bögen wie bei jener statt finden.

Der Flächenraum, welcher durch $\int x dz$ ausgedrückt wird, läſst sich leicht finden, da $x dz = \frac{x^3 dx}{\sqrt{(b^4 - x^4)}}$

also $\int x dz = \frac{b^2 - \sqrt{(b^4 - x^4)}}{2}$ ist.

178. Unter den merkwürdigen Eigenschaften, die man bei dieser Curve aufgefunden hat, will ich nur eine erwähnen, die in folgendem Lehrsatze enthalten ist.

Lehrsatz. Zwischen der Abscisse $AE = b$, der Ordinate $EB = a$ des äuſsersten Punctes und der Länge des bis dahin reichenden Bogens $AXB = S$ findet die Vergleichung statt, daſs das RechtEck aus $S.a$ so groſs an Inhalt ist, als ein Kreis, dessen Durchmesser $= b$ ist, also $S.a = \frac{1}{4} b^2 \pi$.

Beweis. Wenn man allgemein das Product $Z.S.$ suchen wollte, wo S irgend ein von A an gerechneter Bogen AX und z die seinem Endpuncte zugehörige Ordinate VX ist, so erhielte man,

$z.s = \int z ds + \int s dz$. Nun kann z sowohl als s durch eine Reihen-Entwickelung gefunden werden; denn es ist

$$(b^4 - x^4)^{-\frac{1}{2}} = b^{-2} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{b^6} + \frac{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.}{1.2}\frac{x^8}{b^{10}} + \frac{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}}{1.2.3}\frac{x^{12}}{b^{14}} + \frac{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}.\frac{7}{2}}{1.2.3.4}\frac{x^{16}}{b^{18}} +$$

$$= \frac{1}{b^2} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{b^6} + \tfrac{1}{2}.\tfrac{3}{4}.\frac{x^8}{b^{10}} + \tfrac{1}{2}.\tfrac{3}{4}.\tfrac{5}{6}.\frac{x^{12}}{b^{14}} + \tfrac{1}{2}.\tfrac{3}{4}.\tfrac{5}{6}.\tfrac{7}{8}.\frac{x^{16}}{b^{18}} +$$

also $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(b^4-x^4)}} = \tfrac{1}{3}\frac{x^3}{b^2} + \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{7}.\frac{x^7}{b^6} + \tfrac{1}{2}.\tfrac{3}{4}.\tfrac{1}{11}\frac{x^{11}}{b^{10}} + \tfrac{1}{2}.\tfrac{3}{4}.\tfrac{5}{6}.\tfrac{1}{15}\frac{x^{15}}{b^{14}}$

$$+ \tfrac{1}{2}.\tfrac{3}{4}.\tfrac{5}{6}.\tfrac{7}{8}.\tfrac{1}{19}.\frac{x^{19}}{b^{18}} +$$

als Werth von z,

und $\int\frac{b^2\,dx}{\sqrt{(b^4-x^4)}} = x + \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{5}\frac{x^5}{b^4} + \tfrac{1}{2}.\tfrac{3}{4}.\tfrac{1}{9}\frac{x^9}{b^8} + \tfrac{1}{2}.\tfrac{3}{4}.\tfrac{5}{6}.\tfrac{1}{13}\frac{x^{13}}{b^{12}} + \tfrac{1}{2}.\tfrac{3}{4}.\tfrac{5}{6}.\tfrac{7}{8}.\tfrac{1}{17}\frac{x^{17}}{b^{16}}$

als Werth von s. Jene Reihe in ds multiplicirt giebt eine in allen einzelnen Gliedern integrable Reihe, denn es ist $\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{(b^4-x^4)}} = \frac{b^2}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(b^4-x^4)}$

$$\int\frac{x^7\,dx}{\sqrt{(b^4-x^4)}} = \tfrac{1}{2}b^6 - \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{3}.b^6 - \tfrac{1}{2}b^4\sqrt{(b^4-x^4)} + \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{3}\sqrt{(b^4-x^4)^3}$$

und so weiter; aber um bequemer die Integrale zu übersehn, dient die Bemerkung, dafs allgemein

$$\int\frac{x^{4n+3}\,dx}{\sqrt{(b^4-x^4)}} = \frac{4nb^4}{4n+2}\int\frac{x^{4n-1}\,dx}{\sqrt{(b^4-x^4)}} - \frac{x^{4n}\sqrt{(b^4-x^4)}}{(4n+2)}$$

ist, also wenn man diese Integrale von $x=0$ an bis $x=b$ nimmt

$$\int\frac{x^{4n+3}\,dx}{\sqrt{(b^4-x^4)}} = \frac{2nb^4}{2n+1}\int\frac{x^{4n-1}\,dx}{\sqrt{(b^4-x^4)}}.$$

Diese Reduction ergiebt, in Beziehung auf $x = b$ genommen,

$$\int\frac{x^7\,dx}{\sqrt{(b^4-x^4)}} = \tfrac{2}{3}b^4\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{(b^4-x^4)}};$$

$$\int\frac{x^{11}\,dx}{\sqrt{(b^4-x^4)}} = \tfrac{4}{5}.\tfrac{2}{3}b^8\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{(b^4-x^4)}};$$

$$\int\frac{x^{15}\,dx}{\sqrt{(b^4-x^4)}} = \tfrac{6}{7}.\tfrac{4}{5}.\tfrac{2}{3}b^{12}\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{(b^4-x^4)}},$$ und so weiter.

Sucht man aus den gegebnen Werthen von z, s, dz, ds die Summe der Producte $z\,ds + s\,dz$, so ist

$$\text{sie} = \frac{dx}{\sqrt{(b^4 - x^4)}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} \frac{x^7}{b^4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{x^{11}}{b^8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{15} \frac{x^{15}}{b^{12}} \\ + x^3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \frac{x^7}{b^4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{x^{11}}{b^8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{13} \cdot \frac{x^{15}}{b^{12}} \end{array} \right.$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{19} \cdot \frac{x^{19}}{b^{16}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{23} \frac{x^{23}}{b^{20}} +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{17} \cdot \frac{x^{19}}{b^{16}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{21} \cdot \frac{x^{23}}{b^{20}} +$$

$$= \frac{4 . dx}{\sqrt{(b^4 - x^4)}} \left\{ \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5.7} \cdot \frac{x^7}{b^4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{9.11} \frac{x^{11}}{b^8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{13.15} \cdot \frac{x^{15}}{b^{12}} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{9}{17.19} \frac{x^{19}}{b^{16}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{11}{21.23} \cdot \frac{x^{23}}{b^{20}} + \right\}$$

und davon ist das Integral von $x = 0$ bis $x = b$ genommen

$$= 4 \int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{(b^4 - x^4)}} \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \frac{1}{13.15} + \frac{1}{17.19} + \frac{1}{21.23} + \right.$$

$$= 2 \int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{(b^4 - x^4)}} \left\{ 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} + \right.$$

oder da das bis $x = b$ genommene Integral

$\int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{(b^4 - x^4)}} = \frac{1}{2} b^2$ ist, und der Werth der Reihe bekanntlich $= \frac{1}{4} \pi$, so ist jenes Integral vollständig genommen $= \frac{1}{4} b^2 \pi = . S . a$, oder das RechtEck dessen Seiten $EB = a$ und $AXB = S$, ist gleich dem Kreise, dessen Durchmesser $AE = b$ ist. *)

179. Bemerkung. Wenn man sich eine Curve ABC denkt, auf welcher ein Körper, durch die Schwere getrieben, herabfällt, so kann diese so gekrümmt sein, dafs er gleich schnell im tiefsten Puncte C ankömmt, er mag von A, oder von B, oder von jedem andern Puncte seine Bewegung ohne anfängliche Geschwindigkeit angefangen haben (Fig. 52.) Eine solche Curve heifst tautochronisch. In der Mechanik wird gezeigt, dafs die Zeit, in welcher ein Körper irgend einen Weg durchläuft, immer einerlei bleibt, wenn die ihn beschleunigende Kraft dem Abstande von dem zu erreichenden Endpuncte proportional ist; denn vermöge einer solchen Kraft erreicht er, wenn er sehr entfernt von diesem Endpuncte seine Bewegung anfängt, schon sehr schnell eine grofse Geschwindigkeit und durchläuft daher seinen langen Weg ebenso schnell, als er einen kurzen vermöge der ihn dann nur antreibenden schwächern Kraft durchlaufen würde. Wenn blofs die Schwere den Körper

*) Vgl. Euler de mirabilibus curvae elasticae proprietatibus in den Actis academ. imp. Petropolitanae. pro anno 1782.

zur Bewegung antreibt, so ist die seine Bewegung in B auf der Curve ABC beschleunigende Kraft dem *Sinus* des Winkels BDE proportional, welchen hier die Tangente der Curve mit dem Horizonte macht.

180. Aufgabe. Die tautochronische Curve zu bestimmen, wenn blofs die Schwere auf den bewegten Körper wirkt.

Auflösung. Wenn C der Endpunct ist, welcher in gleichen Zeiten erreicht werden soll, es mag der Körper in A, B oder jedem andern Puncte seine Bewegung anfangen: so mufs die in B wirkende Kraft dem noch zurückzulegenden Bogen $CB = S$ proportional sein. Eben diese Kraft ist aber dem *Sinus* des Winkels BDE proportional, welcher $= \frac{dx}{ds}$ ist, wenn $CX = x$, und folglich mufs für die Tautochrone $s = \frac{a\,dx}{ds}$, oder $s^2 = 2ax$ sein, welches für die Cycloide statt findet, wie aus §. 114. erhellt, wenn man dort $2r - x = u$ also $s^2 = 8ru$ setzt.

Eine Cycloide, die durch Wälzung eines Kreises auf einer Horizontallinie entsteht, ist also eine tautochronische Linie, wenn sie ihre Concavität nach oben kehrt.

181. Bemerkung. Die Cycloide hat noch eine andre hieher gehörige merkwürdige Eigenschaft. Sind nämlich (Fig. 53.) zwei Puncte A, B gegeben, die nicht in derselben Verticallinie liegen, und man fragt, auf welcher Curve ein der Einwirkung der Schwere überlassener Körper am schnellsten von A bis B gelangen wird, wenn er ohne anfängliche Geschwindigkeit sich fortbewegt, so ist auch diese Curve, welche man die Brachystochrone, Linie des schnellsten Falles genannt hat, die Cycloide.

182. Aufgabe. Die Brachystochrone zu finden, wenn blofs die Schwere auf den Körper wirkt.

Auflösung. Die Mechanik lehrt, dafs die vermöge der Einwirkung der Schwere auf irgend einer Curve in X erlangte Geschwindigkeit der Quadratwurzel aus $UX = z$ proportional ist, wenn UX die verticale Tiefe unter dem Puncte ist, wo die Geschwindigkeit $= 0$ war. Nennt man nun die von A bis X verwendete Zeit $= t$, und den Bogen $AX = s$, so ist $\frac{ds}{dt} =$ der Geschwindigkeit $= \sqrt{az}$, das ist $dt = \frac{ds}{\sqrt{az}}$ und $t = \int \frac{ds}{\sqrt{az}}$ soll, wenn es von A bis B genommen wird, ein Kleinstes sein.

Nach den Regeln der Variationsrechnung mufs also

$$\delta \int \frac{ds}{\sqrt{z}} = 0 \text{ oder } \int \delta \frac{ds}{\sqrt{z}} = \int \delta \frac{\sqrt{(dx^2 + dz^2)}}{\sqrt{z}} = 0 \text{ sein;}$$

das ist $\int \left\{ \frac{dx . \delta dx}{ds\sqrt{z}} + \frac{dz . \delta dz}{ds\sqrt{z}} - \frac{1}{2} \frac{ds . \delta z}{\sqrt{z^3}} \right\} = 0$,

oder, die beiden ersten Glieder theilweise integrirt,

$$\frac{dx}{ds\sqrt{z}} . \delta x + \frac{dz}{ds\sqrt{z}} \delta z - \int \left\{ \left(d . \frac{dx}{ds . \sqrt{z}} \right) \delta x + \left(d . \frac{dz}{ds . \sqrt{z}} + \frac{1}{2} \frac{ds}{\sqrt{z^3}} \right) \delta z \right\} = 0.$$

Die Variationsrechnung lehrt, daſs der jetzt noch unter dem Integralzeichen stehende und keiner weitern Integration empfängliche Theil für sich verschwinden muſs, und daſs dies statt finden muſs, während δx und δz ganz unbestimmt bleiben. Das gäbe zwei Gleichungen, denen beiden Genüge geschieht, wenn man der einen Genüge thut, nämlich

$d . \frac{dx}{ds\sqrt{z}} = 0$ und $d . \frac{dz}{\sqrt{z} . ds} + \frac{1}{2} \frac{ds}{\sqrt{z^3}} = 0$; die erstere giebt:

$\frac{dx}{ds\sqrt{z}} = Const$, wofür ich $\frac{dx}{ds} = \sqrt{\frac{z}{D}}$ schreibe, also

$$dx^2 = \frac{z}{D}(dx^2 + dz^2);\ dx = \frac{dz . \sqrt{z}}{\sqrt{(D - z)}}.$$

Es sei $\sqrt{\frac{z}{D}} = Sin\,\varphi$; $dz = 2D . Sin\,\varphi\, Cos\,\varphi . d\varphi$

$\sqrt{\left(1 - \frac{z}{D}\right)} = Cos\,\varphi$, also $dx = 2D . Sin^2\,\varphi . d\varphi = D . d\varphi\,(1 - Cos\,2\,\varphi)$,

und $x = D . \varphi - \frac{1}{2} D\, Sin . 2\varphi$, wenn der Anfangspunct der x und z da liegen soll, wo φ verschwindet, das heiſst hier, in dem Anfangspuncte A. Die Gleichungen $x = \frac{1}{2} D\,(2\varphi - Sin . 2\varphi)$, und $z = \frac{1}{2} D\,(1 - Cos\,2\,\varphi)$ (weil $z = D\, Sin^2\,\varphi$ war,) gehören einer Cycloide, die durch den Kreis vom Halbmesser $= \frac{1}{2} D$ beschrieben wird, und diese ist die Brachystochrone.

Ehe wir D aus der gegebnen Lage beider Endpuncte bestimmen, ist es noch nöthig zu zeigen, daſs nun auch der zweiten Gleichung

$d \frac{dz}{ds\sqrt{z}} + \frac{1}{2} \frac{ds}{\sqrt{z^3}} = 0$, Genüge geschehen ist. Wir hatten

$ds = dx . \sqrt{\frac{D}{z}}$ und $dz = dx . \sqrt{\frac{D - z}{z}}$,

also $\frac{dz}{ds . \sqrt{z}} = \sqrt{\frac{D - z}{Dz}}$; und $d . \frac{dz}{ds . \sqrt{z}} = - \frac{1}{2} \frac{dz}{\sqrt{z^3} . \sqrt{\left(1 - \frac{z}{D}\right)}}$

welches $= - \frac{1}{2} \frac{ds}{\sqrt{z^3}}$ ist, wie die zweite Bedingung fordert.

Um nun D zu bestimmen, wollen wir zuerst beide Endpuncte, als bestimmt gegebne ansehn und für den ersten $x = 0$, $z = 0$, für den zweiten

$x = a$, $z = b$ setzen, D wird dann dadurch bestimmt, dafs

$$a = \tfrac{1}{2} D \left(Arc\,Cos. \left(1 - \frac{2b}{D}\right) - \sqrt{\left(\frac{4b}{D} - \frac{4b^2}{D^2}\right)}\right)$$

sein soll, und es läfst sich leicht übersehn, dafs der zweite Punct der tiefste der Cycloide ist, wenn a sich zu b verhält, wie der halbe Umfang zum Durchmesser, indem dann $b = D =$ dem Durchmesser des wälzenden Kreises ist. Sobald a gröfser als $\frac{1}{2} b\pi$ ist, liegt der Endpunct B schon auf dem aufwärts gehenden Bogen der Cycloide und der Körper mufs einen tiefern Punct als B erreichen, um in dem kürzesten Zeitraume zu B zu gelangen.

Hier, wo beide Endpuncte feste Puncte waren, bedurfte es gar keiner Berücksichtigung der Glieder, die bei der Integration vom Integralzeichen befreit worden sind; denn da man alsdann für den Anfangspunct so wenig als für den Endpunct den Variationen δx, δz andre Werthe als $= 0$ beilegen darf, indem feste Puncte keine Veränderung der Lage gestatten, so fallen in beiden Endpuncten diese Glieder von selbst ganz weg. Dagegen wenn einer dieser Puncte nur so gegeben wäre, dafs er zwar auf einer bestimmten Curve liegen, aber auf ihr so angenommen werden sollte, wie es die kürzeste Fallzeit fordert, so kämen für den auf diese Weise angegebnen Punct jene Glieder in Betrachtung.

Wir wollen den Anfangspunct A noch immer (Fig. 53.) als fest ansehen; für den Endpunct B aber bestimmen, dafs es derjenige Punct auf dem Kreise DE sein soll, der von A aus in der kürzesten Fallzeit erreicht werden kann. Des Kreises Halbmesser sei $= r$, und für irgend einen Punct desselben die mit x parallele Coordinate $= u$, die mit z parallele Coordinate $= v$, und des Mittelpunctes Coordinate $= f$ und $= g$, also $(v - g)^2 = r^2 - (u - f)^2$, die Gleichung für den Kreis. Dann müssen im Endpuncte die vom Integralzeichen befreiten Glieder $\frac{dx}{ds.\sqrt{z}}\,\delta x + \frac{dz}{ds.\sqrt{z}}\,\delta z$ den Werth, der einem durch u und v auf dem Kreise bestimmten Puncte gemäfs ist, erhalten. Denkt man sich nämlich den Endpunct etwas verändert, so dafs $\delta x = \delta u$ irgend einen Werth erhalte, so mufs $\delta z = \delta v$ zugleich $= \frac{-(u-f)\,\delta u}{v-g}$ werden, weil die Variation des Endpuncts ein Fortrücken auf dem Kreise ist, und es mufs daher $\left(\frac{dx}{ds.\sqrt{z}} - \frac{dz}{ds.\sqrt{z}}.\frac{(u-f)}{(v-g)}\right)\delta u = 0$ sein, welchen Werth man auch der δu gebe. Da nun dx, dz, ds, das werden was sie auf der Cycloide da sind, wo $x = u$, $z = v$ ist, so wird $dx = \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{(D-z)}}$ hier $= dz.\sqrt{\frac{v}{D-v}}$, und daher $\sqrt{\frac{v}{D-v}} = \frac{(u-f)}{(v-g)} = \frac{\sqrt{(r^2 - (v-g)^2)}}{v-g}$. Dieses ist eine

Gleichung, welche v und D durch einander bestimmt; aber da zugleich, vermöge der Gleichungen für die Cycloide, so wie wir vorhin in Beziehung auf die festen Puncte sahen, $u = \frac{1}{2} D. \left\{ Arc\ Cos. \left(1 - \frac{2v}{D}\right) - \sqrt{\left(\frac{4v}{D} - \frac{4v^2}{D^2}\right)}\right\}$ oder hier, da $u = f + \sqrt{(r^2 - (v-g)^2)}$ ist,

$$f + \sqrt{(r^2 - (v-g)^2)} = \tfrac{1}{2} D \left\{ Arc.\ Cos \left(1 - \frac{2v}{D}\right) - \sqrt{\left(\frac{4v}{D} - \frac{4v^2}{D^2}\right)}\right\}$$

sein muſs, so ist dieses eine zweite Gleichung zwischen v und D, so daſs nun alle Gröſsen bestimmt sind.

Die Gleichung $\frac{dx}{dz} = \frac{u-f}{v-g} = \frac{-dv}{du}$ zeigt zugleich, daſs die Linie des schnellsten Falls in diesem Puncte den Kreis, in welchem sich der Endpunct befinden soll, senkrecht schneidet.

Ganz ähnliche Bestimmungen erhält man für den Anfangspunct, wenn dieser nicht fest bestimmt, sondern nur durch die Curve, auf welcher er sich befinden soll, gegeben ist.

183. B e m e r k u n g. Unter den Curven, die noch hieher gehören, will ich, da der Raum eine weitere Ausführung nicht gestattet, nur anführen, die Wurflinie, in welcher sich nämlich ein geworfener Körper bewegt, wenn er in der Luft oder einem andern Fluido einen Widerstand leidet *); die Linie, durch deren Umdrehung die Fläche entsteht, welche nach der Richtung ihrer Axe in einem Flüssigen fortbewegt, den kleinsten Widerstand leidet, (sie wird durch die Gleichung: $z.dz^3 = D\,(dx^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}$ ausgedrückt, wenn man den Widerstand dem Quadrate des *Sinus* des Anstoſswinkels proportional setzt); die Linien, in welchen angezogne und abgestoſsene Körper sich um einen Mittelpunct bewegen, wenn die Kräfte nach einem andern Gesetze, als dem im Weltsystem statt findenden, von dem Abstande abhängen.

*) Auſser andern Schriften über dieselbe verdient Legendre in den Exercices du calcul integral gelesen zu werden.

Sechster Abschnitt.

Von den Grenzcurven.

184. **Bemerkung.** Wenn man krumme Linien aus einer Eigenschaft bestimmt, die auf eine Differentialgleichung führt, so kömmt oft der Fall vor, daſs man auſser einem Systeme von Curven, die durch einerlei Gleichung nur mit verschiedenem Werthe der *Constans* ausgedrückt werden, noch eine andre, von ihnen verschiedene Curve findet, die gleichfalls jene Eigenschaft besitzt. Diese einzeln dastehende Curve hat allemal mit jeder der Curven des Systems einen Punct gemein, und schlieſst sich an sie alle an, weshalb man sie eine Grenzcurve nennen kann.

185. In der Integralrechnung kommen diejenigen Fälle, die wir hier zu betrachten haben, als solche vor, wo die Differentialgleichung neben ihrem eigentlichen Integrale noch eine besondre Auflösung zuläſst, die nicht in dem allgemeinen Integrale enthalten ist, und unsre hier anzustellenden Betrachtungen werden zeigen, in welcher Verbindung diese besondern Auflösungen mit dem vollständigen Integrale stehen.

186. **Aufgabe.** Diejenigen Curven zu finden, bei welchen die Normallinie zu der Summe der Abscisse und Subnormallinie ein unveränderliches Verhältniſs hat. (Fig. 54.)

Auflösung. Es sei AN die Abscissenlinie, $AP = x$, die Abscisse, $PM = z$ die Ordinate; ferner die Normallinie $MN = \frac{z.\sqrt{(dx^2 + dz^2)}}{dx}$ und die Subnormallinie $PN = \frac{z\,dz}{dx}$. Es soll also

$$\frac{z.\sqrt{(dx^2+dz^2)}}{dx} = a\left(x + \frac{z\,dz}{dx}\right) \text{ sein,}$$

$$\text{oder } dz^2 - \frac{2a^2xz\,dz\,dx}{z^2(1-a^2)} = \frac{dx^2(a^2x^2 - z^2)}{z^2(1-a^2)},$$

$$dz = \frac{a^2x\,dx}{z(1-a^2)} \pm \frac{\sqrt{\{a^2x^2 - (1-a^2)z^2\}}\,dx}{z(1-a^2)}.$$

Diese Gleichung

$$z(1-a^2)\,dz - a^2x\,dx = dx.\sqrt{(a^2x^2 - (1-a^2)z^2)},$$

$$\text{oder } \frac{z(1-a^2)\,dz - a^2x\,dx}{\pm\sqrt{(a^2x^2 - (1-a^2)z^2)}} = dx,$$

giebt als vollständiges Integral $x - C = \mp\sqrt{(a^2 x^2 - (1 - a^2) z^2)}$,

$$\text{oder } x^2 + z^2 = \frac{2Cx - C^2}{1 - a^2}.$$

Setzt man hier $x - \frac{C}{1 - a^2} = u$, so ist

$$u^2 + z^2 = \frac{C^2 a^2}{(1 - a^2)^2}.$$

Das System von krummen Linien, welches durch die Integralgleichung ausgedrückt wird, stellt also eine Reihe von Kreisen dar, deren Halbmesser $= \frac{Ca}{1 - a^2}$ ist, und deren Mittelpuncte da liegen, wo $x = \frac{C}{(1 - a^2)}$ ist. Jedes solchen Kreises Normallinie ist $= \frac{Ca}{1 - a^2}$, die Summe der Abscisse x und der Subnormallinie ist $= \frac{C}{1 - a^2}$; also das verlangte constante Verhältnifs beider findet wirklich statt.

Aber neben diesem Integrale thut auch noch der Differentialgleichung

$$z\,dz\,(1 - a^2) = a^2 x\,dx \pm dx \,.\, \sqrt{(a^2 x^2 - (1 - a^2) z^2)},$$

die besondre Auflösung $a^2 x^2 = (1 - a^2) z^2$ Genüge, oder $z = \pm \frac{ax}{\sqrt{(1 - a^2)}}$. Es giebt also zwei grade Linien, welche eben jene Eigenschaft haben und diese sind unter dem Winkel η, dessen Tangente $tang\,\eta = \frac{a}{\sqrt{(1 - a^2)}}$ gegen die Abscissenlinie geneigt.

Durch diesen Winkel η ausgedrückt, ist der Halbmesser eines der vorhin betrachteten Kreise $= \frac{C.\,Sin\,\eta}{Cos^2.\,\eta}$ und der Abstand des Mittelpunctes $= \frac{C}{Cos^2\,\eta}$.

In Fig. 54. ist $AP = C$; $AM = C.Sec\,\eta$; $AN = C.Sec^2\,\eta$, $NM = \frac{C\,Sin\,\eta}{Cos^2\,\eta}$. Die unter dem Winkel η gegen die Abscissenlinie geneigte grade Linie berührt den Kreis in M.

187. Die beiden graden Linien sind hier die Grenzlinien, welche einen jeden der Kreise berühren. Da nun das in der Integralgleichung enthaltene System von Kreisen eine unendliche Folge solcher Kreise darbietet, so giebt es in jenen graden Linien keinen Punct, der nicht ein Berührungspunct an einem der Kreise wäre. Wir können daher sagen, die grade Linie besitze darum in

allen ihren Puncten die Eigenschaft, die jedem Puncte des Kreises zukam; weil jeder unendlich kleine Theil der graden Linie mit einem unendlich kleinen Theile irgend eines solchen Kreises einerlei ist. Die Grenzlinie bildet den Uebergang von einem Puncte des einen Kreises zu einem unendlich nahen Puncte des zunächst folgenden Kreises.

188. Aufgabe. Man sucht die Curven, deren Normallinie die mittlere Proportionale ist zwischen einer gegebnen Linie $= b$ und der Summe der Abscisse und Subnormale. (Fig. 55.)

Auflösung. Wenn man die vorigen Bezeichnungen beibehält, so ist die Bedingung der Aufgabe in folgender Gleichung enthalten:

$$b\left(x + \frac{z\,dz}{dx}\right) = \frac{z^2(dx^2 + dz^2)}{dx^2}.$$

Es soll also $dz^2 - \frac{b\,dx\,dz}{z} = \left(\frac{bx - z^2}{z^2}\right) dx^2$ sein,

oder $dz - \frac{b\,dx}{2z} = \pm\sqrt{\{\frac{1}{4}b^2 + bx - z^2\}}\,.\,\frac{dx}{z}$.

Das vollständige Integral dieser Gleichung, die sich unter die Form

$$\frac{2z\,dz - b\,dx}{2\sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + bx - z^2)}} = dx \text{ bringen läſst,}$$

ist, $x + C = \mp\sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + bx - z^2)}$,

oder $(x - (\frac{1}{2}b - C))^2 = \frac{1}{2}b^2 - bC - z^2$.

Die hierin enthaltenen Curven sind Kreise vom Halbmesser $= \sqrt{\{\frac{1}{2}b^2 - bC\}}$, deren Mittelpuncte da liegen, wo $x = \frac{1}{2}b - C$ ist. Nenne ich diesen Abstand $= l$, so ist der Halbmesser $= \sqrt{b.l.}$

Aber neben dieser Integralgleichung findet noch die besondre Auflösung $z^2 = \frac{1}{4}b^2 + bx$, statt; eine Gleichung für eine Parabel, deren Scheitel B da liegt, wo $x = -\frac{1}{4}b$ ist, und deren Parameter $= b$ ist, oder deren Brennpunct A mit dem Anfangspuncte der Abscissen zusammen fällt.

Es läſst sich leicht zeigen, daſs diese Parabel alle jene Kreise berührt.

189. Lehrsatz. Wenn für ein System von Curven eine Gleichung zwischen den Coordinaten x, z, und einer Gröſse C, die für jede einzelne Curve einen andern Werth erhält, gegeben ist: so findet man den geometrischen Ort aller Durchschnittspuncte für jede zwei unmittelbar auf einander folgende Curven, wenn man in der Gleichung die Gröſse C als veränderlich ansieht, aber den bei dC stehenden Quotienten $= 0$ setzt, und durch diese Bedingungsgleichung C aus der Hauptgleichung eliminirt.

Beweis. Die Gleichung giebt den Werth von z durch x und C ausgedrückt an, und das Differential von z, welches durch

$dz = \left(\frac{dz}{dx}\right) dx + \left(\frac{dz}{dC}\right) dC$ ausgedrückt wird, zeigt in seinem ersten Gliede an, wie z sich ändert, wenn man auf derselben Curve fortgehend, zu einem andern Werthe der Abscisse gelangt, im zweiten Gliede dagegen, wie z sich ändert, wenn man für einerlei Werth der Abscisse zu der benachbarten Curve übergeht. Diese letzte Aenderung ist nur da $= 0$, wo die nächste Curve mit der ihr zunächst vorangehenden einen Durchschnittspunct gemein hat, und da also ist $\left(\frac{dz}{dC}\right) = 0$. Diese Gleichung findet dort mit der Hauptgleichung für alle Curven zugleich statt, und wenn man C eliminirt, so hat man die Gleichung für den geometrischen Ort der Durchschnittspuncte jeder zwei unmittelbar auf einander folgender Curven des Systems.

190. Es läſst sich nun auch leicht übersehn, daſs dieser geometrische Ort der Durchschnittspuncte, allemal eine gemeinschaftliche Tangente mit derjenigen Curve hat, die eben hier von der zunächst benachbarten geschnitten wird. Im Allgemeinen nämlich drückt hier (Fig. 55.), wenn AD die eine, AE die andre Curve ist, dz den Unterschied der beiden Ordinaten BD, CE aus, und $\frac{dz}{dx} = \left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dC}\right) \cdot \frac{dC}{dx}$. wäre $= tang\, EDF$; dieses fällt aber mit $tang\, GDF$ zusammen an den Stellen, wo $\left(\frac{dz}{dC}\right) = 0$ ist, oder wo man sich in einem Durchschnittspuncte zweier unmittelbar auf einander folgender Curven befindet, und da fällt folglich der Uebergang von der einen Curve zur benachbarten mit der Tangente der einen Curve des Systems zusammen. Der geometrische Ort aller durch zwei zunächst auf einander folgende Curven gebildeten Durchschnittspuncte berührt also die beiden zusammentreffenden Curven, und folglich bildet dieser geometrische Ort eine an jede Curve des Systems berührende Curve, das ist eine solche die wir Grenzcurve genannt haben.

190*. Lehrsatz. Wenn eine endliche Gleichung zwischen den Coordinaten x, z und einer Gröſse C, die für jede Curve des Systems eine andre ist, gegeben ist: so findet man die diesem Systeme von Curven zugehörende Grenzcurve, wenn $\left(\frac{dz}{dC}\right) = 0$ gesetzt, und mit Hülfe dieser Gleichung C aus der Hauptgleichung eliminirt wird.

Dies erhellt aus den letzten Sätzen; ich will es daher nur auf die vorigen Beispiele anwenden.

191. Die Gleichung §. 186. gab für das System von Curven
$x + C = \sqrt{(a^2x^2 - (1 - a^2)z^2)}$,

also $dx + dC = \frac{a^2 x\,dx - (1-a^2)\,z\,dz}{\sqrt{(a^2x^2 - (1-a^2)\,z^2)}}$,

das ist $\left(\frac{dz}{dC}\right) = \frac{-\sqrt{(a^2x^2 - (1-a^2)\,z^2)}}{z\,(1-a^2)}$

und eben so $\left(\frac{dx}{dC}\right) = \frac{\sqrt{(a^2x^2 - (1-a^2)\,z^2)}}{a^2x - \sqrt{(a^2x^2 - (1-a^2)\,z^2)}}$;

beide werden $= 0$, wenn $a^2x^2 = (1-a^2)\,z^2$ ist, und dieses ist schon die besondre Auflösung, die in die Hauptgleichung gesetzt $C + x = 0$ giebt.

Dieselbe Gleichung konnte auch so ausgedrückt werden

$$x^2 + 2\,Cx + C^2 = a^2x^2 - (1-a^2)\,z^2,$$

also $\left(\frac{dz}{dC}\right) = \frac{C+x}{-z\,(1-a^2)}$; diese giebt $= 0$ gesetzt $C = -x$ und dadurch wird nun die Hauptgleichung den Werth $a^2x^2 = (1-a^2)\,z^2$, als besondre Auflösung ergeben.

192. In §. 188. war die Hauptgleichung

$$(x - \tfrac{1}{2}b + C)^2 = \tfrac{1}{2}b^2 - bC - z^2,$$

also $\left(\frac{dz}{dC}\right) = \frac{2\,(x - \frac{1}{2}b + C) + b}{-2z} = \frac{x+C}{-z}$; aber $x + C = 0$ bringt die Hauptgleichung auf $0 = \frac{1}{4}b^2 + bx - z^2$, und dieses ist die Gleichung für die Grenzcurve.

193. **Lehrsatz.** Wenn man vermittelst der Gleichung $\left(\frac{dz}{dC}\right) = 0$, C durch constante Gröſsen ausgedrückt erhielte, so hätte das System von Curven keine Grenzcurve, und eben das wäre der Fall, wenn man durch die Verbindung der Gleichung $\left(\frac{dz}{dC}\right) = 0$ mit der Hauptgleichung einen constanten Werth für C erhielte.

Hier nämlich erhält man dadurch, daſs man der Gröſse C den so bestimmten constanten Werth giebt, nichts anders als einen der Fälle, die in dem allgemeinen Integral enthalten sind.

194. Das würde zum Beispiel der Fall sein, wenn man folgende Hauptgleichung hätte,

$$2\,bC + C^2 = a^2 + bx - z^2,$$

wo $\left(\frac{dz}{dC}\right) = -\frac{(b+C)}{z}$ wird. Eben die Gleichung könnte auch durch $C = -b \pm \sqrt{(a^2 + b^2 + bx - z^2)}$ ausgedrückt werden, und gäbe dann

$$\left(\frac{dz}{dC}\right) = -\frac{\sqrt{(a^2 + b^2 + bx - z^2)}}{z},$$

woraus, $\left(\frac{dz}{dC}\right) = 0$ gesetzt, $z^2 = a^2 + b^2 + bx$ folgen würde; dieses aber in die Hauptgleichung gesetzt giebt $C = -b$, als einen der Fälle, die in dem Integrale enthalten sind.

195. Lehrsatz. Wenn zu Bestimmung der Curven bloſs der Werth von $\frac{dz}{dx}$ gegeben ist: so hat das in dieser Differentialgleichung enthaltene System von Curven dann eine Grenzcurve, wenn dadurch daſs man im Werthe von $\frac{d^2 z}{dx^2}$ den Nenner $= 0$ setzt, auch der Zähler verschwindet. Die durch x und z ausgedrückte Function, welche dieses $\frac{0}{0}$ hervorbringt, ist die besondre Auflösung oder die Gleichung für die Grenzcurve.

Beweis. Durch den Werth von $\frac{d^2 z}{dx^2}$ wird bekanntlich die Krümmung angegeben. Diese erhält für einen Punct wie P (Fig. 55.) ihren bestimmten Werth oder vermöge der $\pm$ Zeichen die zwei oder drei bestimmten Werthe, die für die Curven des Systems, die sich etwa hier durchkreutzen, statt finden können. In M hingegen, wo die Grenzcurve und die Curven des Systems zusammentreffen, sollten zwei ganz verschiedene Gesetze der Krümmung ausgedrückt werden; diese Unbestimmtheit verräth sich hier durch das $\frac{0}{0}$, welches also dann eintritt, wenn man für z diejenige Function von x setzt, welche die Ordinate der Grenzcurve ausdrückt.

Der doppelte Werth für die Krümmung wird aber gefunden, wenn man das eine Mal nach den Gesetzen rechnet, welche die Differentialgleichung allgemein angiebt, das andre Mal gleich von Anfang so rechnet, wie es die besondre Auflösung fordert.

196. In unserm ersten Beispiele war

$$\frac{dz}{dx} = \frac{a^2 x \pm \sqrt{(a^2 x^2 - (1 - a^2) z^2)}}{z(1 - a^2)}$$

$$\text{oder } \frac{dz}{dx} = \frac{\frac{a^2 x}{z} \pm \sqrt{\left\{\frac{a^2 x^2}{z^2} - (1 - a^2)\right\}}}{1 - a^2},$$

$$\text{also } \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{d.\frac{x}{z}}{1 - a^2}\left\{a^2 \pm \frac{a^2 x}{z\sqrt{\left(\frac{a^2 x^2}{z^2} - (1 - a^2)\right)}}\right\}$$

$$= \frac{a^2}{1 - a^2} . d.\frac{x}{z} \frac{\left\{\pm\sqrt{\left\{\frac{a^2 x^2}{z^2} - (1 - a^2)\right\}} + \frac{x}{z}\right\}}{\pm\sqrt{\left\{\frac{a^2 x^2}{z^2} - (1 - a^2)\right\}}}$$

Versucht man hier den Nenner $=0$ zu setzen, so muſs $a^2 x^2 = z^2 (1 - a^2)$, oder $\frac{x}{z} = \frac{\sqrt{(1-a^2)}}{a}$ sein, wodurch $d.\frac{x}{z} = 0$, also $\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{0}{0}$ wird. Es ist also $a^2 x^2 = z^2 (1 - a^2)$ die besondre Auflösung, die Gleichung für die Grenzcurve.

Der Werth von $\frac{dz}{dx}$ giebt an, daſs in jedem Puncte R (Fig. 54.) zwei Lagen der Tangente statt finden, weil sich zwei Kreise des Systems hier schneiden. Nenne ich $a = Sin\, MAP = Sin\, \eta$, so ist

$$\frac{dz}{dx} = \frac{x}{z}.tang^2 \eta \pm \frac{\sqrt{\left\{\frac{x^2}{z^2}.\, tang^2 \eta - 1\right\}}}{Cos\, \eta}$$

und eine leichte geometrische Betrachtung zeigt, daſs dies die beiden Werthe für $tang.\, \varphi$ sind, wenn man unter φ den Neigungswinkel der beiden Tangenten der Kreise versteht, die sich in dem Puncte schneiden, dessen Coordinaten x, z sind. Es sei (Fig. 65.) $AU = x$, $UV = z$ und V der Durchschnittspunct zweier Kreise des Systems, deren Mittelpuncte in B, C liegen. Ferner sei $RAC = \eta$, also $RU = x.\, tang.\, \eta$; $US = x\, tang^2 \eta$, wenn RS auf AR senkrecht ist.

Setze ich nun die unbekannten Halbmesser beider Kreise $BH = r$, $CI = R$, $AB = \frac{r}{Sin\, \eta}$ und $AC = \frac{R}{Sin\, \eta}$;

so ist $BU = \sqrt{(r^2 - z^2)} = x - \frac{r}{Sin\, \eta}$

$$CU = \sqrt{(R^2 - z^2)} = \frac{R}{Sin\, \eta} - x$$

und $\frac{1}{2}(BU + CU) = \frac{1}{2}\frac{(R-r)}{Sin\, \eta}$.

Aus jenen Gleichungen aber folgt

$$r\, Cotang.\, \eta = \frac{x}{Cos\, \eta} - \sqrt{(x^2.\, tang^2 \eta - z^2)},$$

$$R\, Cotang.\, \eta = \frac{x}{Cos\, \eta} + \sqrt{(x^2.\, tang^2 \eta - z^2)},$$

das ist in der Figur

$$AH = AR - \sqrt{(x^2.\, tang^2 \eta - z^2)}$$
$$AI = AR + \sqrt{(x^2.\, tang^2 \eta - z^2)},$$

also $\frac{1}{2}(AH + AI) = AR = \frac{x}{Cos\,\eta}$,

und $\frac{1}{2}(AI - AH) = \sqrt{(x^2 . tang^2\eta - z^2)} = HR = IR$.

Hieraus folgt $\frac{dz}{dx} = \frac{US}{z} \pm \frac{HR}{z\,Cos\,\eta} = \frac{US \pm BS}{z}$;

so dafs $\frac{dz}{dx}$ entweder $= \frac{US + SC}{z} = tang\ UVC$,

oder $= \frac{US - BS}{z} = - tang\ UVB$

ist. Das Erstere giebt die Neigung der an VI gezognen Berührungslinie, das Andre die Neigung der an VH gezognen Berührungslinie.

Betrachtet man den Werth von $\frac{d^2 z}{dx^2}$, so zeigt sich erstlich dafs dieser in bestimmter Form allemal zwei Werthe giebt, deren einer dem einen, der andre dem andern der sich schneidenden Kreise zugehört, und zweitens dafs da, wo er $\frac{0}{0}$ wird, jene zwei Werthe in einen zusammen fallen, aber auf andre Weise ein doppelter Werth hervorgeht.

Es ist nämlich

$$d.\frac{x}{z} = \frac{z\,dx - x\,dz}{z^2} = \frac{dx}{z^2}\left\{\frac{z^2(1-a^2) - a^2x^2 \mp x\sqrt{(a^2x^2 - (1-a^2)^2 z^2)}}{z(1-a^2)}\right\}$$

$$= \mp \frac{dx\{x \pm \sqrt{(a^2x^2 - (1-a^2)z^2\}} . \sqrt{\{a^2x^2 - (1-a^2)z^2\}}}{z^3(1-a^2)},$$

$$\text{also } \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{-a^2}{z^3(1-a^2)^2}(x \pm \sqrt{(a^2x^2 - (1-a^2)z^2)})^2.$$

Daraus würde der Krümmungshalbmesser $= \frac{(dx^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2 z}$

$$= \frac{\{x \pm \sqrt{(a^2x^2 - (1-a^2)z^2)\}\,a}}{(1-a^2)}$$

$$= \frac{ax}{1-a^2} \pm \frac{a}{1-a^2}\sqrt{(a^2x^2 - (1-a^2)z^2)}$$

$$= \frac{x . Sin\,\eta}{Cos^2\eta} \pm tang.\,\eta\sqrt{\{x^2 . tang^2\eta - z^2\}},$$

welches die beiden, vorhin aus der geometrischen Betrachtung gefundenen Werthe von r und R sind.

Diese beiden Werthe werden $= \frac{x\,Sin\,\eta}{Cos^2\eta}$, da wo $a^2x^2 = (1-a^2)z^2$ ist; aber da diese Voraussetzung $\frac{x}{z} = \frac{\sqrt{(1-a^2)}}{a}$ giebt, so giebt sie auch

$d.\frac{x}{z} = 0$, und $\frac{d^2 z}{dx^2} = 0$, wie es die grade Linie fordert.

197. Im zweiten Beispiele war

$$\frac{dz^2}{dx^2} - \frac{b\,dz}{z\,dx} = \frac{bx}{z^2} - 1; \text{ also}$$

$$\frac{d^2 z}{dx} = \frac{-\frac{b}{z}dz^2 + \frac{b\,dx^2}{z} - \frac{2bx\,dx\,dz}{z^2}}{2z\,dz - b\,dx}.$$

Setzt man nun hier $2z\,dz = b\,dx$, so mufs wie die Differentialgleichung des ersten Grades zeigt, zugleich $bx = z^2 - \frac{1}{4}b^2$ sein, und der Zähler des Werthes von $\frac{d^2 z}{dx}$, wird

$$-\frac{b}{z}dz^2 + \frac{b}{z}dx^2 - \frac{2bx.dx.dz}{z^2} = dz^2\left\{-\frac{b}{z} + \frac{4z}{b} - \frac{4(z^2 - \frac{1}{4}b^2)}{bz}\right\}$$

ebenfalls $= 0$; also giebt $z^2 = \frac{1}{4}b^2 + bx$ die Gleichung für die Grenzcurve.

198. Bemerkung. Die bisherigen Regeln gaben an, wie man aus der Gleichung bestimmen kann, ob es eine Grenzcurve gebe; aber auch aus geometrischen Umständen läfst sich schliefsen, ob das System von Curven mit einer Grenzcurve in Verbindung stehe. Das folgende Beispiel zeigt eine Aufgabe, die schon selbst die Grenzcurve angiebt.

199. Aufgabe. Es ist eine Parabel, deren Parameter $= p$, gegeben; man sucht eine Gleichung für alle Parabeln, welche durch den Brennpunct jener gehn, ihre Axe mit der Axe jener parallel haben, und jene Parabel selbst in irgend einem Puncte berühren.

Auflösung. Die gegebne Parabel werde durch Abscissen $= u$ auf der Haupt-Axe vom Scheitel an, und durch Ordinaten $= v$ bestimmt, so dafs $v^2 = pu$ ist.

Die gesuchten Parabeln haben nun jede einen andern Parameter $= q$, und ihr Scheitel wird bei jeder anders durch Abscissen $= k$ und Ordinaten $= l$ bestimmt. Drückt man also jede dieser Parabeln durch Abscissen $= x$ auf der Haupt-Axe der gegebnen Parabel und durch Ordinaten $= z$ senkrecht darauf, aus, so ist für alle $(z - l)^2 = q\,(x - k)$, weil ihre Haupt-Axen mit x parallel sind.

Jede dieser Parabeln soll durch den Brennpunct der gegebnen gehn, also $z = 0$ sein, für $x = \frac{1}{4}p$, folglich $l^2 = q\,(\frac{1}{4}p - k)$.

Um ferner auszudrücken, dafs jede dieser Parabeln mit der gegebnen einen durch u, v gegebnen Punct gemein habe, mufs für $x = u$, $z = v$ werden, also $(v - l)^2 = q\,(u - k)$ oder $v^2 - 2vl = q\,(u - \frac{1}{4}p)$ sein; das ist, in jeder einzelnen Parabel wird der Parameter durch

$\frac{v^2-2vl}{u-\frac{1}{4}p}=\frac{(v^2-2vl)p}{v^2-\frac{1}{4}p^2}=q$ bestimmt. Aber die gesuchte Parabel soll hier nicht blofs eintreffen, sondern soll berühren, also mufs an derselben Stelle auch $\frac{dz}{dx}=\frac{dv}{du}$ sein. Da nun aus $(z-l)^2=q(x-k)$ oder

$$(z-l)^2=qx-\tfrac{1}{4}pq+l^2 \text{ oder } z^2-2zl=q(x-\tfrac{1}{4}p),$$

folgt $\frac{dz}{dx}=\frac{q}{2(z-l)}$, also an der Stelle, wo $z=v$ ist, $\frac{dz}{dx}=\frac{q}{2(v-l)}$, und $\frac{dv}{du}$ ist $=\frac{p}{2v}$, also $\frac{q}{v-l}=\frac{p}{v}$; $q=p-\frac{pl}{v}$, so erhält man, indem beide Werthe von q gleich gesetzt werden,

$$\frac{p(v-l)}{v}=\frac{p.v(v-2l)}{v^2-\frac{1}{4}p^2} \text{ oder}$$

$$l=\frac{p^2.v}{4v^2+p^2}; \text{ daher } q=\frac{4pv^2}{4v^2+p^2} \text{ und } k=\tfrac{1}{4}p-\frac{p^3}{4(4v^2+p^2)}.$$

Die Gleichung für eine jede der gesuchten Parabeln, die wir durch $(z-l)^2=q(x-k)$ ausdrückten, wird also nun

$$z^2-\frac{2zp^2v}{4v^2+p^2}=\frac{4pv^2x}{4v^2+p^2}-\frac{p^2v^2}{(4v^2+p^2)},$$

oder $\frac{z^2}{v^2}=\frac{2z}{v}=4\left(\frac{x}{p}-\frac{z^2}{p^2}\right)-1$; so dafs die Parabel völlig bestimmt ist, wenn man v oder wenn man den Punct, wo die Berührung an der gegebnen Parabel statt findet, als gegeben ansieht. Um nun v wegzuschaffen, und eine für alle unsre Parabeln geltende Gleichung zu erhalten, suche ich das Differential und eliminire v. Es ist nämlich

$$\frac{2zdz}{v^2}-\frac{2dz}{v}=\frac{4dx}{p}-\frac{8zdz}{p^2},$$

oder $$\frac{z^2}{v^2}-\frac{z}{v}=\frac{2zdx}{pdz}-\frac{4z^2}{p^2};$$

und vorhin $$\frac{z^2}{v^2}-\frac{2z}{v}=\frac{4x}{p}-\frac{4z^2}{p^2}-1;$$ also durch Subtraction

$$\frac{z}{v}=\frac{2zdx}{pdz}-\frac{4x}{p}+1;$$ und die vorige Gleichung gab auch

$$\frac{z}{v}=1\pm\sqrt{\left(\frac{4x}{p}-\frac{4z^2}{p^2}\right)};$$

daher endlich $$\frac{zdx}{dz}-2x=\pm\sqrt{(px-z^2)},$$

als Differentialgleichung für das ganze System der gesuchten Parabeln.

200. Diese Differentialgleichung giebt, wenn man sie zu integriren sucht, erstlich die besondre Auflösung $z^2 = px$, welches die Gleichung für die gegebne Parabel als Grenzlinie ist; zweitens ein vollständiges Integral, welches man am leichtesten findet, wenn man $px - z^2 = u^2$,

$dx = \frac{2udu + 2zdz}{p}$, also $zdx - 2xdz = \frac{2u}{p}(zdu - udz)$ setzt;

dann ist $\frac{2(zdu - udz)}{p} = dz$,

oder $\frac{du}{p+2u} = \frac{dz}{2z}$, also $(p+2u) = C.z$

oder $C.z = p + 2\sqrt{(px - z^2)}$, welches völlig unsre Gleichung für das ganze System von Parabeln ist, wenn man $C = \frac{p}{v}$ setzt. Die unbestimmte *Constans* giebt daher jedesmal eine andre Parabel, wenn man den durch v bestimmten Berührungspunct anders annimmt.

201. Man könnte die Differentialgleichung auf eine noch einfachere Form bringen, wenn man

$$\frac{p}{z} + 2\sqrt{\left(\frac{px}{z^2} - 1\right)} = w \text{ oder } px = z^2 + \tfrac{1}{4}\left(wz - \frac{p}{z}\right)^2$$

setzte. Dadurch wird $pdx = 2zdz + \frac{1}{2}(wz - p)(wdz + zdw)$,

und $zdx - 2xdz = \frac{1}{2}(wz - p)dz + \frac{1}{2}\left(\frac{wz}{p} - 1\right)z^2dw$;

also aus $\frac{zdx}{dz} - 2x = \sqrt{(px - z^2)}$, wird

$$\tfrac{1}{2}wz - \tfrac{1}{2}p + \tfrac{1}{2}(wz - p)\frac{z^2dw}{pdz} = \tfrac{1}{2}(wz - p),$$

das ist $(wz - p)dw = 0$. Eine Gleichung, die als Integral $w = Const$ und als besondre Auflösung $wz = p$, das ist $z^2 = px$ giebt.

202. Da $\frac{zdx}{dz}$ die Subtangente ist, so könnte man die Bedingung für die zu suchende Curve so ausdrücken, daſs die um die doppelte Abscisse verminderte Subtangente die mittlere Proportionallinie zwischen $((\sqrt{px}) + z)$ und $(\sqrt{px}) - z$ sein solle, wo p eine gegebne constante Linie ist.

203. Die hier betrachtete Aufgabe ist darum merkwürdig, weil man in der Mechanik auf diese Grenzcurve aller Wurflinien für Körper die mit gleicher Geschwindigkeit von demselben Puncte ausgehn und im leeren Raume, bloſs von der Schwere getrieben, ihre Bewegung vollenden, geführt wird. (Vergl. mein Lehrbuch der Mechanik 2 Th. §. 88.)

204. Bemerkung. Von den hieher gehörenden Arten von Curven, unter denen auch die Evoluten als Grenzlinien aller Normallinien zu bemerken sind, will ich nur die Brennlinien erwähnen, welche Grenzcurven sind, die von einem ganzen Systeme grader Linien berührt werden. Ich will nur einen leichten Fall als Beispiel betrachten.

205. Aufgabe. Auf den Halbkreis $HBDG$ (Fig. 56.) fallen parallele Strahlen AB, die an dem Umfange des Kreises zurückgeworfen werden: man sucht eine allgemeine Differential-Gleichung für die Lage aller zurückgeworfenen Strahlen, die dann zugleich auch die Brennlinie mit enthalten wird.

Auflösung. Es sei CD mit den einfallenden Strahlen AB parallel durch den Mittelpunct gezogen, so ist, weil bei der Zurückwerfung der Winkel, welchen der zurückgeworfne Strahl mit dem Radius CB macht, eben so groſs ist, als der, welchen der einfallende Strahl mit ihm machte,

$ABC = CBE = ECB = \eta$ und $CE = \frac{r}{2\,Cos\,\eta}$. Wird nun jeder Punct z der Linie EB durch Coordinaten $CU = x$, $UZ = z$ bestimmt, so ist

$$z = (x - CE)\,tang.\,2\eta = x\,.\,tang.\,2\eta - \frac{r\,.\,tang.\,2\eta}{2\,Cos\,\eta}.$$

Diese Gleichung paſst für denjenigen Strahl, für welchen $ABC = \eta$ ist; um sie allgemein zu machen, müssen wir aus ihr mit Hülfe ihrer Differentialgleichung $\frac{dz}{dx} = tang.\,2\eta$, die Gröſse η ganz eliminiren.

Es ergiebt sich sogleich

$$z = \frac{x\,dz}{dx} - \tfrac{1}{2}r\,.\,\frac{dz}{dx}\,.\,Sec.\,\eta.$$

oder $Cos\,\eta = \frac{\frac{1}{2}r\,.\,dz}{x\,dz - z\,dx}$; aber da aus

$tang.\,2\eta = \frac{dz}{dx}$ auch folgt, $Cos\,2\eta = \frac{dx}{\sqrt{(dx^2 + dz^2)}}$,

so ist auch $Cos\,\eta = \sqrt{\frac{1 + Cos\,2\eta}{2}} = \sqrt{\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{dx}{\sqrt{(dx^2 + dz^2)}}\right\}}$,

also $\frac{\frac{1}{4}r^2\,dz^2}{(x\,dz - z\,dx)^2} = \frac{\sqrt{(dx^2 + dz^2)} + dx}{2\sqrt{(dx^2 + dz^2)}}$, welches die verlangte Gleichung schon ist, die sich aber noch bequemer darstellen läſst.

Sie ist nämlich auch

$$(x\,dz - z\,dx)^2 = \frac{\frac{1}{2}r^2\,dz^2\,.\,\sqrt{(dx^2 + dz^2)}}{dx + \sqrt{(dx^2 + dz^2)}},$$

oder, wenn ich $\frac{dz}{dx} = p$ setze,

$$(px-z)^2 = \frac{\frac{1}{2}r^2p^2 \cdot \sqrt{(1+p^2)}}{1+\sqrt{(1+p^2)}} = \tfrac{1}{2}r^2\{(1+p^2)-\sqrt{(1+p^2)}\}.$$

Diese aber giebt differentiirt:

$$2(px-z) \cdot x\,dp = r^2 p\,dp - \tfrac{1}{2}r^2 \cdot \frac{p\,dp}{\sqrt{(1+p^2)}}$$

$$\text{oder } dp \cdot \left\{2px^2 - 2zx - r^2 p + \frac{\frac{1}{2}r^2 p}{\sqrt{(1+p^2)}}\right\} = 0.$$

Und hier erhellt nun, daſs zugleich ein eigentliches Integral vermöge des Factors $dp = 0$, und eine besondre Auflösung vermöge des Factors

$$2px^2 - 2zx - r^2 p + \frac{\frac{1}{2}r^2 p}{\sqrt{(1+p^2)}} = 0$$

statt findet.

Die erstere Gleichung giebt $p = C$ oder $dz = C\,dx$, $z = Cx + D$, wo die eine *Constans* dadurch bestimmt wird, daſs zugleich
$(px-z)^2 = \frac{1}{2}r^2(1+p^2-\sqrt{(1+p^2)})$ sein sollte,
also, da $p = C$, $(Cx-z)^2 = D^2 = \frac{1}{2}r^2(1+C^2-\sqrt{(1+C^2)})$,
war, D durch C gegeben wird.

Der andre Factor giebt, wenn ich $p = tang\,\phi$, also
$\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}} = Sin\,\phi$ setze,

$$2x(x\,tang\,\phi - z) = r^2(tang\,\phi - \tfrac{1}{2}Sin\,\phi)$$

$$\text{oder } x\,Sin\,\phi - z\,Cos\,\phi = \frac{r^2}{2x}Sin\,\phi\,(1-\tfrac{1}{2}Cos\,\phi);$$

und da zugleich, vermöge der früher gefundenen Gleichung auch

$$(px-z)^2 = \tfrac{1}{2}r^2(1+p^2-\sqrt{(1+p^2)})$$

$$\text{oder } (x\,tang\,\phi - z)^2 = \tfrac{1}{2}r^2(Sec^2\,\phi - Sec\,\phi),$$

oder $(x\,Sin\,\phi - z\,Cos\,\phi)^2 = \frac{1}{2}r^2(1-Cos\,\phi)$ sein sollte, so giebt die Verbindung beider

$$\frac{r^4}{4x^2}Sin^2\,\phi\left(1-\frac{Cos\,\phi}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{2}r^2(1-Cos\,\phi)$$

$$\text{oder } \tfrac{1}{2}r^2(1+Cos\,\phi)\left(1-\frac{Cos\,\phi}{2}\right)^2 = x^2,$$

$$\text{oder } r^2\,Cos^2\,\tfrac{1}{2}\phi\,(1-\tfrac{1}{2}Cos\,\phi)^2 = x^2;$$

$$\text{folglich } x = r\,Cos\,\tfrac{1}{2}\phi - \tfrac{1}{2}r\,Cos\,\phi \cdot Cos\,\tfrac{1}{2}\phi;$$

$$\text{oder } x = \tfrac{3}{4}r\,Cos.\,\tfrac{1}{2}\phi + \tfrac{1}{4}r\,Cos\,\tfrac{1}{2}\phi\,(1-2\,Cos\,\phi);$$

$$= \tfrac{3}{4}r\,Cos\,\tfrac{1}{2}\phi - \tfrac{1}{4}r(4\,Cos^3\,\tfrac{1}{2}\phi - 3\,Cos\,\tfrac{1}{2}\phi),$$

also endlich $x = \frac{3}{4}r\,Cos\,\frac{1}{2}\phi - \frac{1}{4}r \cdot Cos\,\frac{3}{2}\phi$.

Aus diesem Werthe von x aber ergiebt sich z, indem

$x \, Sin \, \varphi - z \, Cos \, \varphi = r \sqrt{\frac{1 - Cos \, \varphi}{2}} = r \, . \, Sin \, \tfrac{1}{2} \varphi$ sein sollte,

also $z = \frac{\frac{3}{4} r \, . \, Sin \, \varphi \, Cos \, \frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{4} r \, Cos \, \frac{3}{2} \varphi \, Sin \, \varphi - r \, . \, Sin \, \frac{1}{2} \varphi}{Cos \, \varphi}$,

oder $z = \frac{\frac{3}{4} r \, \{Sin \, \varphi \, Cos \, \frac{1}{2} \varphi - Sin \, \frac{1}{2} \varphi\} - \frac{1}{4} r \, \{Cos \, \frac{3}{2} \varphi \, Sin \, \varphi + Sin \, \frac{1}{2} \varphi\}}{Cos \, \varphi}$

das ist $z = \frac{3}{4} r \, Sin \, \frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{4} r \, . \, Sin \, \frac{3}{2} \varphi$.

Diese Werthe von x und z zeigen, daſs die besondre Auflösung auf eine Epicycloide führt, bei welcher der Halbmesser des wälzenden Kreises $= \frac{1}{4} r$, und des Kreises, worauf die Wälzung geschieht $= \frac{1}{2} r$ ist. (Vgl. 1. Th. §. 628.). Die Brennlinie ist also eine solche Epicycloide.

206. **Bemerkung.** Auch bei solchen Bedingungen, welche auf Gleichungen vom zweiten Differentialgrade führen, kann man auf Grenzcurven kommen. Um dies besser zu übersehn, will ich mit der Bestimmung eines Systems von Curven, wozu die Grenzcurve gegeben ist, anfangen, und nachher die allgemeinen Untersuchungen über solche Grenzcurven der zweiten Ordnung mittheilen.

207. **Aufgabe.** Es ist eine Parabel, deren Parameter $= p$ ist, gegeben; man sucht eine Gleichung, welche alle Parabeln umfaſst, deren Axe mit der Axe jener Parabel parallel ist, und die jene Parabel berühren.

Auflösung. Für die gegebne Parabel sei die Gleichung $v^2 = pu$; für jede der gesuchten Parabeln $(z - l)^2 = q \, (x - k)$. Damit eine dieser Parabeln durch den vermittelst v, u bestimmten Punct der gegebnen Parabel gehe, muſs $(v - l)^2 = q \, (u - k) = q \left(\frac{v^2}{p} - k\right)$ sein; damit sie dort jene Parabel berühre, muſs an der Stelle $\frac{dv}{du} = \frac{dz}{dx}$, also $\frac{p}{2v} = \frac{q}{2(v - l)}$ sein.

Diese beiden Bestimmungen geben

$$- k = \frac{(v - l)^2}{q} - \frac{v^2}{p}, \text{ und}$$

$$q = \frac{(v - l) \, p}{v}.$$

Die allgemeine Gleichung für die sämmtlichen berührenden Parabeln ist also

$$(z - l)^2 = \frac{(v - l) \, p}{v} . \left(x + \frac{(v - l)^2}{q} - \frac{v^2}{p}\right),$$

oder

$$(z - l)^2 = \frac{(v - l) p}{v} \left(x - \frac{v^2}{p}\right) + (v - l)^2,$$

oder $(z-l)^2 = \frac{(v-l)\,px}{v} - vl + l^2$;

oder $x = \frac{v \,.\, z^2}{p(v-l)} - \frac{2lvz}{p(v-l)} + \frac{v^2 l}{p(v-l)}$.

Diese Gleichung hängt noch von den zwei constanten Gröfsen l, v, ab, die durch zweimaliges Differentiiren müssen weggeschafft werden. Man differentiirt hier am besten so, dafs dz als beständig angesehen wird, und erhält dadurch:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{2v(z-l)}{p(v-l)};\quad \frac{d^2x}{dz^2} = \frac{2v}{p(v-l)} = \frac{dx}{dz(z-l)},$$

$$\text{also } (z-l) = \frac{dz.dx}{d^2x};\quad l = z - \frac{dz.dx}{d^2x};$$

$$\text{daher } \frac{d^2x}{dz^2} = \frac{2v}{p\left(v-z+\frac{dz\,.\,dx}{d^2x}\right)},\ \text{oder } v = \frac{p(zd^2x - dzdx)}{pd^2x - 2dz^2}.$$

Diese Werthe geben $\frac{v}{v-l} = \frac{pd^2x}{2dz^2}$;

$$\frac{lv}{v-l} = \frac{p}{2dz^2}(zd^2x - dzdx)$$

$$\frac{v^2 l}{v-l} = \frac{p^2(zd^2x - dzdx)^2}{2dz^2(pd^2x - 2dz^2)}.$$

Die Hauptgleichung erhält daher nun folgende Gestalt

$$x = \frac{z^2 d^2x}{2dz^2} - \frac{z}{dz^2}(zd^2x - dzdx) + \frac{p(zd^2x - dzdx)^2}{2dz^2(pd^2x - 2dz^2)}.$$

$$\text{oder } d^2x(px - z^2) = 2xdz^2 - 2zdxdz + \tfrac{1}{2}pdx^2.$$

Und dieses ist die Gleichung, welche aufser dem ganzen Systeme aller gesuchten Parabeln auch noch die Grenzcurve mit umfafst.

208. Um zu zeigen, dafs diese Gleichung neben dem vollständigen Integrale noch eine besondre Auflösung zuläfst, will ich sie noch einmal differentiiren; dann giebt sie

$$d^3x(px - z^2) + pdxd^2x - 2zdzd^2x = 2zd^2x.dz + pdxd^2x,$$

$$\text{oder } d^3x.(px - z^2) = 0.$$

Damit dieser Gleichung Genüge geschehe, mufs entweder $d^3x = 0$, oder $px = z^2$ sein. Das letztere ist die besondre Auflösung, oder die Gleichung für die Grenzcurve; die erstere Gleichung giebt

$x = Az^2 + Bz + C$, und C wird hier durch A und B bestimmt, da die Gleichung des zweiten Grades forderte, dafs

$$d^2x(px - z^2) = 2xdz^2 - 2zdxdz + \tfrac{1}{2}pdx^2,\ \text{sei,}$$

$$\text{also } 2A((pA-1)z^2 + pBz + pC) = 2C - 2Az^2 + \tfrac{1}{2}p(2Az+B)^2$$

$$\text{oder } 2ApC = 2C + \tfrac{1}{2}pB^2,$$

$$C = \frac{1}{4}\,\frac{pB^2}{(Ap-1)}.$$

Dieses stimmt ganz mit der vorhin durch die beständigen Gröfsen v und l ausgedrückten Hauptgleichung überein, wenn man $\frac{v}{p(v-l)} = A$, $B = -2Al$ setzt.

209. Bemerkung. Um die Natur der Probleme, die auf solche durch Differentialgleichungen des zweiten Grades ausgedrückte Grenzcurven führen, besser zu übersehn, wollen wir die Betrachtung im Allgemeinen auf folgende Weise anstellen. —

Es sei ein System von Curven gegeben, welche sämmtlich von einer Grenzcurve berührt werden: so wird, wenn man diesem ersten Systeme ein zweites, der Lage nach sehr wenig vom ersten verschiedenes und übrigens eben so bestimmtes System hinzufügt und dann nach einem gewissen Gesetze zu einem dritten übergeht, und so weiter, jedem dieser Systeme eine Grenzcurve, jede um etwas weniges entfernt von der vorigen entsprechen; und wenn diese einander unendlich nahen Grenzcurven so beschaffen sind, dafs auch ihnen wieder eine Grenzcurve zukömmt, so kann nur eine solche als eine Grenzcurve der zweiten Ordnung in Beziehung auf jene ersten Systeme von Curven erscheinen.

Aus dieser Betrachtung aber läfst sich nun übersehen, wie wir die Auffindung dieser Grenzcurven der zweiten Ordnung auf eben die Regeln zurückführen können, welche für Grenzcurven der ersten Ordnung angegeben sind.

Zu bemerken ist indefs, dafs nicht allemal wenn das erste System von Grenzcurven durch eine Grenzcurve umfafst wird, diese zugleich eine Grenzcurve der zweiten Ordnung für die vom ersten Systeme umfafsten Curven ist. Es ist zum Beispiel einleuchtend, dafs ein System gleicher Kreise, die sämmtlich von einer Parabel berührt werden, diese Parabel zur Grenzcurve habe; beschreibt man nun über eben der Axe und durch denselben Scheitel andre Parabeln, in denen sich eben solche Kreise befinden; so berühren sich die Parabeln blofs im Scheitel und haben keine Grenzcurve, sondern nur einen einzigen gemeinschaftlichen Berührungspunct. Aber wenn man auch Scheitel und Axe des zweiten, dritten und jeder folgenden Parabel ein wenig entfernt von der vorigen annimmt und es so einrichtet, dafs die Parabeln von einer Grenzcurve umfafst werden, so erhellt doch, dafs nicht jede solche Grenzcurve der Parabeln auch eine Grenzcurve der Kreise ist. Man könnte sagen, so gut wie im ersten Falle der Berührungspunct oder gegenseitige Durchschnittspunct der Parabeln im Scheitel blieb, also sogleich hinter den gegenseitigen Durch-

schnittspuncten der Kreise zurück blieb, eben so kann das auch der Fall sein, wenn die gegenseitigen Durchschnittspuncte der Parabeln eine Grenzcurve bilden. — Also nicht alle Grenzcurven des ersten Systems von Grenzcurven sind für das von diesen berührte System als Grenzcurven der zweiten Ordnung anzusehen; wohl aber müssen nothwendig die Grenzcurven der zweiten Ordnung den Grenzcurven der ersten Ordnung als Grenzcurven zugehören.

210. Es sei eine Gleichung zwischen x, z, und den Constanten a, b gegeben: so ist damit erstlich ein System von Curven bestimmt, die wir alle finden, wenn wir a immer andre Werthe beilegen, während b ungeändert bleibt. Ist dieses System so beschaffen, daſs es eine Grenzcurve hat, so finden wir diese, indem wir aus der Hauptgleichung, die Gröſse a vermittelst der Gleichung $\left(\frac{dz}{da}\right) = 0$, (statt deren man auch $\left(\frac{dx}{da}\right) = 0$ gebrauchen könnte), wegschaffen. Gehn wir nun aber zweitens zu einem neuen Systeme von Curven über, welches dadurch gefunden wird, daſs man für b den Werth $b + db$ setzt, und nun a abermals die ganze Reihe von Werthen annehmen läſst: so gehört auch diesem Systeme eine Grenzcurve zu, die aus der Hauptgleichung in Verbindung mit der Gleichung $\left(\frac{dz}{da'}\right) = 0$ gefunden würde.

Ich bezeichne hier die Gröſse a durch a', weil sie ja nun als von b abhängig, eine andre geworden, und in $a + \left(\frac{da}{db}\right) db$ übergegangen ist. *)
Aber durch eben diese Aenderung ist offenbar auch dz geändert, und statt daſs es vorhin $= dz = \left(\frac{dz}{dx}\right) dx + \left(\frac{dz}{da}\right) da$ war,

nun $= \left(\frac{dz}{dx}\right) dx + \left(\frac{dz}{da}\right) da + \left(\frac{dz}{db}\right) db$ geworden, oder da wir jetzt

$\left(\frac{dz}{da}\right)$ selbst als Function von b ansehn,

$$dz = \left(\frac{dz}{dx}\right) dx + \left(\frac{dz}{da}\right) \frac{da}{db} . db + \left(\frac{dz}{db}\right) db.$$

Nach der oben angegebnen Regel erhalten wir also hier die Grenzcurve der ersten Ordnung, indem wir $\left(\frac{dz}{da}\right) + \left(\frac{dz}{db}\right) \frac{db}{da} . = 0$ setzen; und dieses ist offenbar die allgemeine Bedingungsgleichung für alle Grenzcurven der

*) Das heiſst, wenn a zum Beispiel der Parameter der Curve war, die durch einen fest bestimmten Punct ging, als b den Werth $= b$ hatte, so wird der Parameter der durch eben den Punct gehenden Curve ein andrer sein müssen, wenn b in $b + db$ übergegangen ist.

ersten Ordnung, statt daſs die für ein unveränderliches b nur auf eine einzige derselben paſste.

Die Gleichung für dieses System von Grenzcurven der ersten Ordnung könnte auf eine doppelte Art gefunden werden, erstlich in Form einer endlichen Gleichung, indem man a aus der Hauptgleichung, vermittelst der eben angegebenen Bedingungsgleichung eliminirte, und zweitens in Form einer Differentialgleichung, wenn man a vermittelst des allgemeinen Werthes von $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ eliminirte. Die letztere hätte den Vorzug, daſs sie nicht allein die sämmtlichen Grenzcurven der ersten Ordnung, sondern auch die Systeme von Curven selbst, denen sie zugehören, mit enthielte. Fassen wir diese letztere Gleichung ins Auge, so enthält sie x, z, b und $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ als eine Gleichung, die ein System von Curven und eine Grenzcurve darstellt, sobald man b einen fest bestimmten Werth giebt, und die alle Systeme von Curven und alle Grenzcurven derselben enthält, wenn man b alle verschiedenen Werthe annehmen läſst.

Vermittelst dieser letztern Gleichung sind also alle Grenzcurven der Systeme von Curven zugleich mit den Curven dieser Systeme selbst so ausgedrückt, daſs z' durch x, $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und b gegeben ist, und die Grenzcurve, die diesem Systeme von Grenzcurven zugehört, würde gefunden, indem man in dieser Gleichung $\left(\frac{dz'}{db}\right) = 0$ setzte. Da aber vollständig

$$dz' = \left(\frac{dz'}{dx}\right) dx + \left(\frac{dz'}{dp}\right) dp + \left(\frac{dz'}{db}\right) db \text{ ist,}$$

wenn ich $p = \left(\frac{dz}{dx}\right)$ setze; überdas aber p selbst von b abhängt, so müſste man

$$dz' = \left(\frac{dz'}{dx}\right) dx + \left(\frac{dz'}{dp}\right)\left(\frac{dp}{dx}\right) dx + \left(\frac{dz'}{dp}\right)\left(\frac{dp}{db}\right) db + \left(\frac{dz'}{db}\right) db \text{ setzen,}$$

also das vollständige $\left(\frac{dz'}{db}\right) = \left(\frac{dz'}{dp}\right)\left(\frac{dp}{db}\right) + \left(\frac{dz'}{db}\right) = 0$, setzen.

Hier ist nun das letzte Glied schon von selbst $= 0$ vermöge der ersten Bedingungsgleichung; denn es bedarf wohl keines Beweises, daſs das vorhin gefundene $\left(\frac{dz}{da}\right)\frac{da}{db} + \left(\frac{dz}{db}\right) = 0$ nichts anders ist als das was wir jetzt, nachdem a durch b ausgedrückt worden, durch $\left(\frac{dz'}{db}\right)$ darstellen; es muſs also als zweite Bedingungsgleichung

$$\left(\frac{dp}{db}\right) = 0 \text{ das ist } \left(\frac{d^2z}{dx\,.\,db}\right) = 0 \text{ sein.}$$

Diese Bedingungsgleichung müfste durch

$$\left(\frac{d^2z}{dx\,.\,da}\right)\frac{da}{db} + \left(\frac{d^2z}{dx\,.\,db}\right) = 0 \text{ ausgedrückt werden,}$$

wenn man sie suchen wollte, ehe noch a aus der Gleichung weggeschafft war. Und diese beiden Gleichungen mit der Hauptgleichung verbunden, dienen nun a und b wegzuschaffen, und die Gleichung für die Grenzcurve zu finden. *)

211. Lehrsatz. Eine Grenzcurve des zweiten Grades hat an den Stellen, wo sie irgend eine Curve des Systemes berührt, mit dieser gleiche Krümmung.

Beweis. Da diese Grenzcurve zugleich mit den Curven der Systeme durch eine Gleichung gegeben ist, welche $\frac{d^2z}{dx^2}$ durch x, z, und $\frac{dz}{dx}$ ausdrückt, so erhält $\frac{d^2z}{dx^2}$ für mehrere dieser Curven einen gleichen Werth, wenn in einem durch x, z gegebnen Puncte auch $\frac{dz}{dx}$ für die verschiedenen Curven, die sich hier treffen, einerlei ist. Das aber ist für die Grenzcurve offenbar in jedem ihrer Puncte der Fall, weil sie mit den Curven der Systeme nicht anders als berührend zusammentrifft; also ist die Krümmung der Grenzcurve der Krümmung der sie berührenden Curve an der Stelle gleich, weil die Krümmung beider durch denselben Werth von $\frac{d^2z}{dx^2}$ bestimmt wird.

212. Lehrsatz. Wenn für Systeme von Curven eine Differentialgleichung des zweiten Grades gegeben ist, so kann man entscheiden, ob diese Systeme eine Grenzcurve der zweiten Ordnung haben, wenn man aus der gegebnen Gleichung den Werth von $\frac{d^3z}{dx^3}$ sucht. Findet sich nämlich, dafs der Nenner dieses Werthes $= 0$ gesetzt, auch den Zähler auf 0 bringt, und dafs sich daraus eine Gleichung zwischen z und x ergiebt, die auch der gegebnen Gleichung entspricht, so ist diese die Gleichung für die Grenzcurve.

Beweis. An den Stellen, wo die Grenzcurve eine der Curven des Systems berührt, treffen zwei Curven zusammen, für welche (wenn nicht etwa die Berührung noch inniger ist, als die Differentiale des zweiten Grades an-

*) Die hier gefundenen Bedingungsgleichungen sind schon von Lagrange angegeben. ich hoffe aber durch diese geometrische Ableitung sie noch deutlicher begründet zu haben. Lagrange sur les Intégrales particulières, in den Mémoires de Berlin pour l'année 1774.

geben,) das dritte Differential einen verschiedenen Werth haben wird. Diese Unbestimmtheit wird durch $\frac{d^3 z}{dx^3} = \frac{0}{0}$ angegeben, und da wo der Werth des dritten Differentials diese Form erhält, da befindet man sich auf einer Grenzcurve der zweiten Ordnung.

213. Bemerkung. Ehe ich diese Regeln auf Beispiele anzuwenden versuche, kehre ich noch einmal zur Betrachtung des Beispiels in §. 207. zurück.

Es läſst sich leicht übersehen, daſs die Gleichung

$x = \frac{v}{p(v-l)}(z^2 - 2lz + vl)$, alle Parabeln umfaſst, welche in Puncten, deren Entfernung von der Abscissenlinie $= v$ ist, parallele Tangenten haben. Giebt man nämlich in der Differentialgleichung $\frac{dx}{dz} = \frac{2v(z-l)}{p(v-l)}$, der Ordinate z den bestimmten Werth $= v$, so ist $\frac{dx}{dz} = \frac{2v}{p}$, unabhängig von l, welches den Abstand der Axe einer bestimmten Parabel von der Abscissenlinie bezeichnete. So wird also für jede Ordinate $= v$ ein bestimmtes System von Parabeln gegeben, deren Tangenten grade hier unter sich parallel sind, und diese müssen, da $x = \frac{v(z-l)^2}{p(v-l)} + \frac{vl}{p}$ ist, sobald man l bestimmt annimmt, ihren Scheitel da haben, wo $x = \frac{vl}{p}$ ist, und ihr Parameter muſs $= \frac{p(v-l)}{v}$ sein. Alle diese Parabeln berühren sich in dem Puncte, dessen Ordinate $= v$ und dessen Abscisse $= \frac{v^2}{p}$ ist, und dieses System von Parabeln hat keine Grenzcurve, weil sie alle diesen gemeinschaftlichen Berührungspunct haben, und es keine Folge von Durchschnittspuncten geben kann. Unter diesen sich berührenden Parabeln ist auch die Grenzparabel selbst, die von alle denen, welche l positiv haben, von innen, von allen aber, denen ein negatives l zukömmt, von auſsen berührt wird. Geht man aber nun dadurch, daſs man v einen andern Werth giebt, zu einem andern gemeinschaftlichen Berührungspuncte über, so ist offenbar unsre Grenzparabel diejenige, welche alle Berührungspuncte aller jener Parabeln in sich vereinigt. Sie kann also nicht eigentlich eine Grenzcurve der zweiten Ordnung heiſsen, sie bildet aber den Uebergang von den sämmtlichen sie von innen berührenden Parabeln zu den sämmtlichen sie von auſsen berührenden.

214. Bemerkung. Die Auffindung von Beispielen zu den Grenzcurven der zweiten Ordnung wird dadurch sehr erschwert, daſs es nicht hinreicht,

Grenzcurven zu einem Systeme von Curven zu finden, deren jede selbst schon eine Grenzcurve eines Systemes von Curven ist, sondern dafs zugleich eine Gleichheit der Krümmung für die Grenzcurve und die sie berührende Curve des ersten Systems erfordert wird. Von folgender Betrachtung läfst sich indefs voraussehen, dafs sie zu einer Grenzcurve der zweiten Ordnung führen mufs. Es sei eine Parabel AUM gegeben, auf deren Axe AL und zwar von ihrem Scheitel an die Abscissen auch für die übrigen Curven genommen werden, zu denen man sodann senkrechte Ordinaten bestimmt. Liegt nun (Fig. 66.) für irgend einen Punct U dieser Parabel der Krümmungs-Mittelpunct in S: so könnte man den Krümmungskreis ansehn, als zu einem Systeme von Kreisen gehörig, die sämmtlich eine andre Parabel BU berühren. Wir wollen die Haupt-Axe BS dieser neuen Parabel mit AL parallel und durch S gehend annehmen, und nun das ganze System von Kreisen ins Auge fassen, deren Mittelpuncte auf BS liegen und deren Halbmesser den Normallinien der Parabel BUN gleich sind; dann ist BUN die Grenzcurve dieses Systems. Gehn wir nun zu einer neuen Parabel bVn über, deren Axe mit AL parallel durch den zum Puncte V gehörigen Krümmungs-Mittelpunct T geht, und denken uns in ihr ein eben solches System von Kreisen: so gehört sie wieder zu diesen als Grenzcurve. Und wenn wir so eine ganze Folge von Parabeln durchgingen, deren Axen alle unter sich parallel durch die Krümmungs-Mittelpuncte der ersten Parabel gingen: so würde jede derselben von der ersten Parabel grade in dem Puncte berührt, welchem der auf ihrer Axe liegende Krümmungs-Mittelpunct zugehört, und die erste Parabel AUV wäre nun eine Grenzcurve aller Kreis-Systeme, die auf die angegebne Weise in den verschiedenen Parabeln gezeichnet wären, und wäre für sie eine Grenzcurve der zweiten Ordnung.

215. Aufgabe. Eine Gleichung für alle Kreise der eben beschriebenen Systeme zu finden.

Auflösung. 1. Es sei $v^2 = pu$ die Gleichung für die erste Parabel AU, so ist für den durch u, v bestimmten Punct U der Krümmungshalbmesser US,

$$US = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(p+4u)^3}{p}}; \text{ ferner}$$

$$RS = l = 4u\sqrt{\frac{u}{p}} = \frac{4v}{p^2}; \text{ und } AR = h = \tfrac{1}{2}p + 3u.$$

2. Wir wollen jetzt des Scheitelpuncts B Abscisse $= -k$ und den Parameter $= q$ suchen, für die Parabel, die über der Axe BS beschrieben, in U berühren soll. Wäre für jeden ihrer Puncte w die Abscisse, y die Ordinate, so müfste ja $(y+l)^2 = q\,(k+w)$ sein, und wegen der verlangten Berührung in dem durch u, v bestimmten Puncte, nicht blofs

$$(v+l)^2 = q\,(k+u),$$

sondern auch $\dfrac{dv}{du} = \dfrac{dy}{dw}$, oder $\dfrac{p}{2v} = \dfrac{q}{2(v+l)}$.

Diese beiden Bestimmungen geben

$$q = \frac{p(v+l)}{v} = p + \frac{4v^2}{p} = p + 4u,$$

$$\text{und } k = \frac{(v+l)^2}{q} - u = \frac{4u^2}{p}.$$

3. Hiemit ist also die Parabel bestimmt, welche die gegebne grade in dem Puncte berührt, durch dessen Krümmungs-Mittelpunct ihre Axe geht, und ihre Gleichung ist:

$$\left(y + \frac{4v^3}{p^2}\right)^2 = (p+4u)\left(w + \frac{4u^2}{p}\right),$$

$$\text{oder } \left(y + \frac{4v^3}{p^2}\right)^2 = \left(p + \frac{4v^2}{p}\right)\left(w + \frac{4v^4}{p^3}\right),$$

$$\text{oder } y^2 + \frac{8v^3y}{p^2} = pw + \frac{4wv^2}{p} + \frac{4v^4}{p^2}.$$

4. In der eben bestimmten Parabel sind nun Kreise gezeichnet, deren Mittelpuncte auf BS liegen, und deren Halbmesser den Normallinien gleich sind. Diese Halbmesser sind also $= \sqrt{((y+l)^2 + \frac{1}{4}q^2)}$

$$\text{oder } = \sqrt{\left\{\left(y + \frac{4v^3}{p^2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(p + \frac{4v^2}{p}\right)^2\right\}} = R,$$

und die Abscisse des Mittelpunctes ist

$= w + \frac{1}{2}q = w + \frac{1}{2}p + \dfrac{2v^2}{p}$, wenn der Kreis da berühren soll, wo w, y die Coordinaten sind. Sind also endlich x, z die Coordinaten für jeden Punct eines solchen Kreises, so ist

$$(z+l)^2 = R^2 - (x - w - \tfrac{1}{2}q)^2$$

$$\text{also } \left(z + \frac{4v^3}{p^2}\right)^2 = \left(y + \frac{4v^3}{p^2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(p + \frac{4v^2}{p}\right)^2 - \left(x - w - \frac{1}{2}p - \frac{2v^2}{p}\right)^2.$$

5. Da nun aber zugleich $\left(y^2 + \dfrac{8v^3y}{p^2}\right) = \left(p + \dfrac{4v^2}{p}\right)w + \dfrac{4v^4}{p^2}$ sein sollte, so ist

$$\left(z^2 + \frac{8v^3z}{p^2}\right) = \frac{1}{4}\left(p + \frac{4v^2}{p}\right)^2 - (x-w)^2 - \frac{1}{4}p^2 + px - 2v^2\left(1 - \frac{2x}{p}\right)$$

oder

$$\left(z^2 + \frac{8v^3z}{p^2}\right) = \frac{4v^4}{p^2} - (x-w)^2 + x\left(p + \frac{4v^2}{p}\right).$$

Dieses ist eine Gleichung für alle die Kreise, deren Berührungspunct an der Parabel durch die Abscisse $= w$ bestimmt ist, wenn der Berührungspunct der Parabel an die erste Parabel durch $z = v$ angegeben wird.

216. Diese Gleichung mufs also von der Art sein, dafs durch Wegschaffung der Gröfse w, vermittelst des Werthes von $\frac{dz}{dx}$, eine Differentialgleichung entsteht, die zugleich alle Kreise, welche auf die angegebne Weise die durch U gehende Parabel BU berühren, und aufserdem diese Parabel selbst enthalten. Wenn man aber nun durch eine zweite Differentiirung auch u wegschafft, so mufs die so entstehende Gleichung alle Systeme dieser Kreise, alle sie umfassenden Grenzparabeln und endlich die diese Parabeln selbst umfassende Grenzparabel in sich schliefsen.

Es ist aber $\frac{dx}{dz} = \frac{2p^2 z + 8v^3}{-2p^2(x-w) + p^3 + 4pv^2}$

also $x - w = \frac{1}{2}p + \frac{2v^2}{p} - \frac{z\,dz}{dx} - \frac{4v^3\,dz}{p^2\,dx}$

und dieses in die Hauptgleichung gesetzt, giebt

$$\left(z + \frac{4v^3}{p^2}\right)^2 - \left(p + \frac{4v^2}{p}\right)\left(x + \frac{4v^4}{p^3}\right) = -\left[\left(z + \frac{4v^3}{p^2}\right)\frac{dz}{dx} - \frac{1}{2}\left(p + \frac{4v^2}{p}\right)\right]^2,$$

eine Gleichung, welcher aufser dem Integral, woraus sie abgeleitet ist, noch die besondre Auflösung $\left(z + \frac{4v^3}{p^2}\right)^2 = \left(p + \frac{4v^2}{p}\right)\left(x + \frac{4v^4}{p^3}\right)$ entspricht, als Gleichung für die in §. 215. Nr. 3. bestimmte Grenzparabel.

Um auch v zu eliminiren, wird noch eine zweite Differentiirung erfordert; man findet aber aus

$$(p^3 + 4pv^2 - 2p^2(x-w))\,dx = (2p^2 z + 8v^3)\,dz,$$

wenn man dz als unveränderlich ansieht,

$$-2p^2\,dx^2 + (p^3 + 4pv^2 - 2p^2(x-w))\,d^2x = 2p^2\,dz^2,$$

also $\frac{1}{2}p + \frac{2v^2}{p} - (x - w) = \frac{dx^2 + dz^2}{d^2x}$

und da eben diese Gröfse auch $= \left(z + \frac{4v^3}{p^2}\right)\frac{dz}{dx}$, war,

so ist $z + \frac{4v^3}{p^2} = \frac{dx}{dz} \cdot \frac{(dx^2 + dz^2)}{d^2x}$, und durch diese Formel würde die von w schon befreite Hauptgleichung

$$\frac{dx^2}{dz^2}\frac{(dx^2 + dz^2)^2}{(d^2x)^2} - \left(p + \frac{4v^2}{p}\right)\left(x + \frac{4v^4}{p^3}\right) = -\left\{\frac{(dx^2 + dz^2)}{d^2x} - \frac{1}{2}\left(p + \frac{4v^2}{p}\right)\right\}^2$$

und man sollte nun billig v ganz aus derselben mit Hülfe des Werthes von v^3 eliminiren. Da dieses eine nicht geringe Schwierigkeit hat, so mag es hier

genug sein, zu zeigen, daſs dieser Differentialgleichung des zweiten Grades die besondre Auflösung $z^2 = px$ entspricht. Diese nämlich gäbe

$$\frac{dx^2 + dz^2}{d^2 x} = \frac{2z^2}{p} + \tfrac{1}{2}p,$$

$$\text{also } z + \frac{4v^3}{p^2} = \frac{4z^3}{p^2} + z, \text{ also } v = z,$$

und wenn man dieses in die eben gefundene Hauptgleichung substituirt, so werden beide Theile der Gleichung von selbst $= 0$.

217. Um die Regeln des 210. §. auf diese Betrachtung anzuwenden, suche ich in Beziehung auf alle Gröſsen die Differentiale.

$$z^2 + \frac{8v^3 z}{p^2} = \frac{4v^4}{p^2} - (x-w)^2 + px + \frac{4v^2 x}{p},$$

$$\text{giebt } \left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{p + \frac{4v^2}{p} - 2(x-w)}{2z + \frac{8v^3}{p^2}}$$

$$\left(\frac{dz}{dw}\right) = \frac{2(x-w)}{2z + \frac{8v^3}{p^2}};$$

$$\left(\frac{dz}{dv}\right) = \frac{\frac{16v^3}{p^2} - \frac{24v^2 z}{p^2} + \frac{8vx}{p}}{2z + \frac{8v^3}{p^2}}.$$

Die erste Bedingungsgleichung: $\left(\frac{dz}{dw}\right) + \left(\frac{dz}{dv}\right)\frac{dv}{dw} = 0$

giebt also $x - w = -\frac{dv}{dw} \cdot \left(\frac{8.v^3}{p^2} - \frac{12v^2 z}{p^2} + \frac{4vx}{p}\right).$

Aber es ist auch $\left(\frac{d^2 z}{dw \,.\, dx}\right) = \frac{+1}{z + \frac{4v^3}{p^2}} - \frac{(x-w)\left(\frac{dz}{dx}\right)}{\left(z + \frac{4v^3}{p^2}\right)^2}$

$$\text{und } \left(\frac{d^2 z}{dv\,.\,dx}\right) = \frac{4v - \frac{12v^2}{p}\left(\frac{dz}{dx}\right)}{p\left(z + \frac{4v^3}{p^2}\right)} - \frac{\left(\frac{8v^3}{p^2} - \frac{12v^2 z}{p^2} + \frac{4vx}{p}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)}{\left(z + \frac{4v^3}{p^2}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{4v}{p}\left(z + \frac{4v^3}{p^2}\right) - \left(\frac{48v^5}{p^4} + \frac{8v^3}{p^2} + \frac{4vx}{p}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)}{\left(z + \frac{4v^3}{p^2}\right)^2}$$

also giebt die zweite Bedingungsgleichung,

$$\left(\frac{d^2 z}{dx\,.\,dw}\right) + \left(\frac{d^2 z}{dx\,.\,dv}\right)\frac{dv}{dw} = 0,$$

$$z + \frac{4v^3}{p^2} - (x - w)\left(\frac{dz}{dx}\right) = -\frac{4v}{p}\cdot\frac{dv}{dw}\left\{z + \frac{4v^3}{p^2} - \left(\frac{12v^4}{p^3} + \frac{2v^2}{p} + x\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)\right\}$$

oder vermöge des schon für $x - w$ gefundenen Werthes

$$z + \frac{4v^3}{p^2} = \frac{dv}{dw}\left\{-\frac{4v}{p}\left(z + \frac{4v^3}{p^2}\right) + \left(\frac{dz}{dx}\right)\frac{4v}{p}\left(+\frac{3vz}{p} + \frac{12v^4}{p^3}\right)\right\}$$

Diese Gleichung enthält den Factor $z + \frac{4v^3}{p^2}$, und nach Weglassung desselben ist $\frac{dv}{dw} = \dfrac{1}{\frac{12v^2}{p^2}\left(\frac{dz}{dx}\right) - \frac{4v}{p}}$

also nun $x - w = \dfrac{3vz - px - 2v^3}{3v\left(\frac{dz}{dx}\right) - p}$.

Die erste Differentialgleichung giebt auch

$x - w = \frac{1}{2}p + \frac{2v^2}{p} - \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(z + \frac{4v^3}{p^2}\right)$ und wenn man beide Werthe gleich setzt, so erhält man

$$3vz - px = -\tfrac{1}{2}p^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(pz + \frac{10v^3}{p} + \tfrac{3}{2}pv\right) - 3v\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\left(z + \frac{4v^3}{p^2}\right)$$

und hieraus müfste v bestimmt, und sein Werth in die Hauptgleichung gesetzt werden. Das würde nun zwar zu einer endlosen Rechnung führen; aber wir können uns leicht überzeugen, dafs $z^2 = px$ ein sowohl dieser als der Hauptgleichung Genüge thuender Werth ist, und dafs dieser $v = z$ fordert. Setzt man nämlich in der letzten Gleichung $px = z^2$, $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{p}{2z}$, so wird sie

$3vz - z^2 = \frac{5v^3}{z} - \frac{3v^4}{z^2}$ also $v = z$ geben, und dadurch wird $x - w = 0$, und die Hauptgleichung wird identisch, wenn man diese Werthe in ihr gebraucht.

Hier, wo wir die besondre Auflösung schon kannten, reicht dieser indirecte Beweis, dafs die Bedingungsgleichungen erfüllt werden, hin; aber sehr schwierig mögte es in den meisten Fällen sein, aus diesen Gleichungen selbst durch algebraische Umformung v und damit die besondre Auflösung zu bestimmen.

218. Hätten wir blofs zu den Parabeln, die wir in §. 216. als Grenzcurven der ersten Ordnung fanden, Grenzcurven suchen wollen, so hätten wir nur aus der Gleichung für sie

$$\left(z + \frac{4v^3}{p^2}\right)^2 = \left(p + \frac{4v^2}{p}\right)\left(x + \frac{4v^4}{p^3}\right),$$

durch die Gleichung $\left(\frac{dz}{dv}\right) = 0$, v wegschaffen müssen; diese gäbe

$$2v^2 - 3vz + px = 0,$$

$$\text{also } v = \tfrac{3}{4}z \pm \sqrt{\left(\tfrac{9}{16}z^2 - \tfrac{1}{2}px\right)}$$

und wenn man diesen Werth in die obige Gleichung

$$\left(\frac{p^2 z}{4} + v^3\right)^2 = \left(\frac{p^2}{4} + v^2\right)\left(\frac{p^3 x}{4} + v^4\right)$$

setzte, so hätte man Curven, welche alle jene Parabeln berührten, ohne darum für die Systeme von Kreisen Grenzcurven der zweiten Ordnung zu sein.

Siebenter Abschnitt.

Von den Trajectorien, und einigen andern Curven, die mit gegebenen Curven in einer bestimmten Beziehung stehen.

1. *Von den eigentlichen Trajectorien.*

219. Erklärung. Eine Trajectorie heifst diejenige Curve, welche ein ganzes System von gleichartigen Curven so schneidet, dafs der Durchschnitt für alle, einer und derselben Bedingung entspricht.

Beispiele. Wenn man eine unendliche Folge concentrischer Kreise durch eine Curve so schnitte, dafs die Tangente der Curve gegen die Tangente

des Kreises im Durchschnittspuncte gleich geneigt wäre bei allen Kreisen, so hätte man eine Trajectorie bestimmt.

Wenn man ein ganzes System von Ellipsen über derselben Linie als HauptAxe zeichnete, jeder Ellipse aber eine andre zugeordnete HauptAxe beilegte, und nun nach der Curve fragte, die auf jeder dieser Ellipsen gleiche Bögen, vom Scheitel an gerechnet, abschnitte, so hätte man eine Trajectorie.

220. Bemerkung. Die Bestimmung der Trajectorien beruht im Allgemeinen darauf, daſs man einen Punct der Trajectorie so bestimmt, daſs er der angegebnen Bedingung, die für alle gegebne Curven gelten soll, für eine jener Curven entspricht, und daſs man dann die Gröſsen eliminirt, welche in Beziehung auf eine der Curven einen andern Werth als in Beziehung auf die übrigen haben.

Die folgenden Beispiele werden dies deutlich machen.

221. Aufgabe. Die krumme Linie zu bestimmen, welche (Fig. 57.) alle um den Mittelpunct C gezognen Kreise unter gleichen Winkeln schneidet.

Auflösung. Wenn für einen dieser Kreise der Halbmesser $= r$ ist, und jeder Punct dieses Kreises durch Coordinaten $x = CX$ und $z = XA$ bestimmt ist, so wird der Winkel $= \varphi$, unter welchem die an A gezogene Tangente die Abscissenlinie schneidet, bekanntlich durch $tang\,\varphi = \frac{dz}{dx}$ bestimmt. Für irgend einen Punct der Trajectorie sei die Abscisse $= u$, die Ordinate $= v$, der Winkel, den die Berührungslinie mit der Abscissenlinie macht, $= \psi$, also $tang\,\psi = \frac{dv}{du}$, und es soll nun in dem Puncte A, wo $u = x$, $v = z$ ist, $\varphi - \psi = \alpha$ sein, der Winkel den die Tangente des Kreises mit der Tangente der Trajectorie bildet, ein unveränderlicher sein.

Aber aus $tang\,\varphi = \frac{dz}{dx}$, $tang\,\psi = \frac{dv}{du}$ folgt,

$$tang\,(\varphi - \psi) = \frac{\frac{dz}{dx} - \frac{dv}{du}}{1 + \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dv}{du}} = \frac{dz \,.\, du - dv \,.\, dx}{du \,.\, dx + dz \,.\, dv},$$

das ist, hier, wo $\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z}$ ist, weil $r^2 = x^2 + z^2$, oder des Kreises Mittelpunct zugleich der Anfangspunct der Coordinaten,

$\frac{-x\,du - z\,dv}{z\,du - x\,dv} = tang.\,\alpha$, oder da man hier x mit u, z mit v vertauschen darf, $du\,(v.tang\,\alpha + u) = dv\,(u\,tang\,\alpha - v)$, — eine Gleichung, aus

welcher r schon von selbst weggefallen ist, und die daher für jeden der Kreise und folglich für alle Puncte der Trajectorie gilt.

Es sei $\frac{v}{u} = tang.\, \eta$ und $u^2 + v^2 = y^2$, oder $u = y\, Cos\, \eta$, $v = y\, Sin\, \eta$; also $du = dy\, .\, Cos\, \eta - y d\eta\, .\, Sin\, \eta$; $dv = dy\, .\, Sin\, \eta + y\, .\, d\eta\, .\, Cos\, \eta$, und $udu + vdv = ydy$; dann giebt unsre letzte Gleichung

$$y dy + y\, .\, Sin\, \eta\, .\, tang\, \alpha\, (dy\, Cos\, \eta - y d\eta\, Sin\, \eta)$$
$$= y\, Cos\, \eta.\, tang\, \alpha\, (dy\, .\, Sin\, \eta + y\, d\eta\, .\, Cos\, \eta);$$

oder $\frac{dy}{y} = d\eta\, .\, tang\, \alpha.$,

und $log\, \frac{y}{C} = \eta.\, tang.\, \alpha$, von $y = C$ sein soll für $\eta = 0$.

Die Trajectorie ist also eine logarithmische Spirallinie, von der wir schon wufsten (1. Th. §. 607.) dafs sie diese Eigenschaft habe.

Nur wenn $\alpha = 90$ Grad ist, mufs die Gleichung

$$du\, (v\, .\, tang\, \alpha + u) = dv\, (u\, tang.\, \alpha - v)$$

anders aufgelöst werden. Dann nämlich ist $tang\ \alpha = \infty$ und es mufs daher $v du = u dv$, oder $\frac{v}{u} = Const$, das ist die Trajectorie eine grade Linie sein, nämlich irgend einer der Radien des Kreises.

222. Aufgabe. Ueber derselben HauptAxe sind unzählige Parabeln beschrieben, die einen gemeinschaftlichen Scheitel haben, man sucht eine Trajectorie, welche sie alle unter dem Winkel $= \alpha$ schneidet. (Fig. 58.)

Auflösung. Wenn x, z für irgend eine der Parabeln, u, v für die Trajectorie die Coordinaten sind, so erhellt, dafs wieder

$tang\ \alpha = \frac{dz\, .\, du - dx\, .\, dv}{dx\, .\, du + dz\, .\, dv}$ sein mufs; oder weil $z^2 = px$ und $\frac{dz}{dx} = \frac{p}{2z}$ ist, bei irgend einer Parabel vom Parameter $= p$, so ist $tang.\ \alpha.\ \left(du + \frac{p dv}{2z}\right) = \left(\frac{p du}{2z} - dv\right)$. Auch hier ist $z = v$, zugleich aber $p = \frac{z^2}{x} = \frac{v^2}{u}$, also $tang.\ \alpha \left(du + \frac{v dv}{2u}\right) = \left(\frac{v du}{2u} - dv\right)$.

Da diese Gleichung eine homogene in Beziehung auf u und v ist, so wird die bequemer, wenn man $v = u\, .\, w$ setzt, also:

$$(2\, tang\, \alpha - w)\, du = -\, dv\, (2 + w\, tang\, \alpha)$$

oder $\frac{du}{u} = \frac{-\, dw\, (w\, .\, tang\, \alpha + 2)}{2\, tang\, \alpha + w + w^2\, tang\, \alpha}$.

Dieses ist die Differentialgleichung für die Trajectorie.

Soll $\alpha = 90$ Grad sein, so ist $\frac{du}{u} = \frac{-w\,dw}{2+w^2}$, folglich $log.\ u = Const - \frac{1}{2} log(2+w^2)$, also wenn mit $u=a$, $v=ma$ zusammengehören soll, $log. \frac{u}{a} = log. \sqrt{\frac{2+m^2}{2+w^2}}$, das ist $u^2 = a^2 \left(\frac{2+m^2}{2+w^2}\right)$ oder $2u^2+v^2 = 2a^2+m^2a^2$, so daſs diese Trajectorie eine Ellipse ist, deren halbe mit v parallele Axe $= a\sqrt{(2+m^2)}$ und deren halbe mit u parallele Axe $= a\sqrt{\left(1+\frac{m^2}{2}\right)}$ ist. — Wenn α ein andrer Winkel wäre, so würden sich schwieriger ausgedrückte Curven ergeben, bei denen ich hier nicht verweilen will. Fig. 58. zeigt solche Parabeln und die sie durchschneidende Ellipse.

223. Aufgabe. Es ist ein System ähnlicher Ellipsen um einerlei Mittelpunct so beschrieben, daſs ihre HauptAxen auf derselben graden Linie liegen; man sucht eine Gleichung für die rechtwinklich sie durchschneidende Trajectorie.

Auflösung. Wenn für irgend eine dieser Ellipsen die groſse HauptAxe $= a$ heiſst, die kleine $= ma$, so ist $z^2 = m^2(a^2 - x^2)$ die Gleichung für diese Ellipse, und wenn man für a verschiedne Werthe annimmt, die Gleichung für alle zu durchschneidenden Ellipsen. Da nun auch hier, wenn u, v die Coordinaten der Trajectorie sind, $\frac{dz\,.\,du - dv\,.\,dx}{du\,.\,dx + dv\,.\,dz} = tang\ \alpha$ sein würde (§. 221.), wenn α der Winkel wäre, unter welchem sich die Curven schneiden sollen, so wird in unsrer Aufgabe, wo $tang\ \alpha = \infty$ ist, $du.dx = -dv\,.\,dz$; aber aus $z^2 = m^2(a^2 - x^2)$ folgt $dz = \frac{-m^2 x\,dx}{z}$, also $du = \frac{m^2 x}{z}.\,dv$. Da hier m für alle Ellipsen einerlei bleibt, so ist dieses schon, wenn man u statt x, v statt z schreibt, die Gleichung für die Trajectorie, indem das von einer Ellipse zur andre veränderliche a gar nicht mehr vorkömmt, und $du = m^2 \frac{u\,dv}{v}$ oder $\frac{du}{u} = m^2 \frac{dv}{v}$, giebt $C\,.\,u = v^{m^2}$, also wenn $v=f$ sein soll für $u=g$, $\frac{u}{g} = \left(\frac{v}{f}\right)^{m^2}$.

224. Wenn man annimmt, daſs die Erde aus lauter concentrischen und unter einander ähnlichen elliptoidischen Schichten besteht, die jede für sich vermöge der Rotation im Gleichgewichte sind, so bestimmt diese Trajectorie die Richtung nach welcher in jedem Puncte die Schwerkraft die Körper gegen das Innere der Erde herabzieht. (Vgl. Eulers Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung flüssiger Körper. §. 122).

225. Aufgabe. Es ist ein System von Kreisen, deren Halbmesser gleich sind, so gezeichnet, daſs ihre Mittelpuncte auf einer gegebnen Curve liegen; man sucht die Trajectorie, welche sie sämmtlich unter rechten Winkeln schneidet.

Auflösung. Wenn s, t die Coordinaten des Mittelpunctes für irgend einen der Kreise sind, x, z die mit jenen parallelen Coordinaten für irgend einen Punct des Kreis-Umfangs, r der Halbmesser des Kreises, so hat man $(z-t)^2 = r^2 - (x-s)^2$, als Gleichung für diesen Kreis. Hier ist r unveränderlich und t eine gegebne Function von s, so daſs in der Folge nur s, als andre Werthe erhaltend für die verschiedenen Kreise, eliminirt werden muſs.

Wenn wir irgend einen Kreis betrachten, so ist für ihn die Lage der Berührungslinie durch $tang\,\varphi = \frac{dz}{dx}$, für die Trajectorie die Lage der Berührungslinie durch $tang\,\psi = \frac{dv}{du}$ gegeben, und hier, wo $\varphi - \psi = 90°$ sein soll, ist also

$$\frac{dz\,.\,du - dv\,.\,dx}{dx\,.\,du + dz\,.\,dv} = \infty \text{ oder } dx\,.\,du + dz\,.\,dv = 0,$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{du}{dv}, \text{ oder da } \frac{dz}{dx} = \frac{-(x-s)}{(z-t)} \text{ hier in } \frac{-(u-s)}{(v-t)} \text{ übergeht,}$$

$du\,(v-t) = dv\,.\,(u-s)$, als Gleichung für einen Punct der Trajectorie, aus der aber, nachdem man t als gegebne Function von s durch s ausgedrückt hat, diese vermittelst der Hauptgleichung für alle Kreise, die auch an diesem Puncte $(v-t)^2 = r^2 - (u-s)^2$ geben muſs, eliminirt wird.

226. Beispiel. Die Linie, auf welcher die Kreis-Mittelpuncte liegen, sei die Abscissenlinie selbst, also immer $t=0$. Dann muſs s aus den zwei Gleichungen $v\,du = dv\,(u-s)$ und $v^2 = r^2 - (u-s)^2$ weggeschafft, also $v\,du = dv\,.\,\sqrt{(r^2 - v^2)}$ gesetzt werden. Diese Gleichung $du = \frac{dv\,.\,\sqrt{(r^2-v^2)}}{v}$ ist eben die, welche wir in §. 9. und in §. 142. 143. betrachtet haben; die Trajectorie ist also die Linie, deren Tangente unveränderlich ist, oder die Zuglinie.

227. Beispiel. Auch die Curve, auf welcher die Mittelpuncte liegen, sei ein Kreis und $t^2 = R^2 - s^2$ die Gleichung für ihn. Unsre zwei Gleichungen $du\,(v-t) = dv\,(u-s)$ und $(v-t)^2 = r^2 - (u-s)^2$ geben also

$$(v-t)^2 = \frac{dv^2}{du^2}\,(u-s)^2 = r^2 - (u-s)^2,$$

$$\text{also } u - s = \frac{r\,du}{\sqrt{(du^2+dv^2)}};\; s = u - \frac{r\,du}{\sqrt{(du^2+dv^2)}}.$$

Da nun zugleich $t^2 = R^2 - s^2 = R^2 - u^2 + \frac{2rudu}{d\sigma} - \frac{r^2du^2}{d\sigma^2}$ war, wenn ich $\sqrt{(du^2 + dv^2)} = d\sigma^2$ setze, so ist

$$v - t = \frac{dv}{du}(u - s) = \frac{rdv}{d\sigma} \text{ auch} = v - \sqrt{\left\{R^2 - u^2 + \frac{2rudu}{d\sigma} - \frac{r^2du^2}{d\sigma^2}\right\}}$$

$$\text{oder } \left(v - \frac{rdv}{d\sigma}\right)^2 = R^2 - u^2 + \frac{2rudu}{d\sigma} - \frac{r^2du^2}{d\sigma^2},$$

$$\text{oder } v^2 + u^2 - R^2 + r^2 = 2r\left(\frac{udu + vdv}{d\sigma}\right).$$

Diese Gleichung giebt $d\sigma = \frac{r \,.\, d \,.\, (u^2 + v^2)}{r^2 - R^2 + (u^2 + v^2)}$

$\sigma = r \,.\, log(r^2 - R^2 + u^2 + v^2) + Const,$

oder $\sigma = r \,.\, log\left(\frac{r^2 - R^2 + u^2 + v^2}{r^2 - R^2 + a^2}\right)$ wenn σ da verschwinden soll, wo $u = a$ und $v = 0$ ist; σ aber ist ein Bogen der Trajectorie. Um eine Gleichung zwischen u und v oder zwischen $\sqrt{(u^2 + v^2)}$ als Radius Vector und u zu finden, müfsten wir sehr verwickelte Gleichungen auflösen.

Zu bemerken aber ist, dafs die Gleichung

$d\sigma = \frac{r \,.\, d \,.\, (u^2 + v^2)}{r^2 - R^2 + (u^2 + v^2)}$ oder $d\sigma(r^2 - R^2 + (u^2 + v^2)) = r \,.\, d \,.\, (u^2 + v^2)$ auch noch die besondre Auflösung $u^2 + v^2 = R^2 - r^2$ enthält, so dafs ein Kreis vom Halbmesser $= \sqrt{(R^2 - r^2)}$ die Grenzcurve jenes Systems von Curven ist, welches wir erhalten, wenn wir der beständigen Gröfse a verschiedene Werthe beilegen.

228. Wenn man an irgend einen Punct A (Fig. 59.) unsrer Curve eine Tangente zieht, so ist der Winkel $= \psi$, welchen sie mit dem Radius Vector $CA = \sqrt{(u^2 + v^2)} = \varrho$ macht, durch die Gleichung $Cos\,\psi = \frac{d\varrho}{d\sigma}$ gegeben. Verlängert man diese Tangente bis sie in B den Kreis DB, auf welchem die Mittelpuncte der senkrecht geschnittenen Kreise liegen, trifft, so ist $AB = w$ durch die Gleichung $R^2 = \varrho^2 + w^2 - 2w\varrho\, Cos\,\psi$ gegeben; aber unsre Gleichung

$d\sigma = \frac{r \,.\, d \,.\, (u^2 + v^2)}{r^2 - R^2 + u^2 + v^2}$, giebt $\frac{d\varrho}{d\sigma} = \frac{r^2 - R^2 + \varrho^2}{2r\varrho} = Cos\,\psi$, also

$$\frac{\varrho^2 + w^2 - R^2}{2\varrho w} = \frac{\varrho^2 + r^2 - R^2}{2\varrho r}, \text{ das ist } w = r.$$

Die Trajectorie hat also die Eigenschaft, dafs der Kreis vom Halbmesser $= R$ auf allen an sie gezogenen Tangenten gleiche Stücke $= r$ abschneidet. Eine

Eigenschaft, die auch aus Betrachtung der Figur leicht abzuleiten ist. *) Unsre Trajectorie ist also zugleich diejenige Zuglinie (Tractorie) die ein Körper durchläuft, wenn er an einem unveränderlichen Faden fortgezogen wird, dessen Endpunct den Kreis DB durchläuft.

229. Der gröfste Werth, welchen ϱ erreichen kann, ist offenbar (Fig. 59.) $= r + R$; der kleinste Werth ist $\varrho = \surd(R^2 - r^2)$, denn für diesen wird $d\varrho = 0$. Der Kreis, den wir als Grenzcurve oder als besondre Auflösung fanden, berührt also unsre Curven sämmtlich da, wo ϱ seinen kleinsten Werth hat. Die Curve geht in unzähligen Windungen um C herum, und σ wird erst unendlich, wenn ϱ diesen kleinsten Werth erreicht. Hätte man aber dem Körper, der an dem Endpuncte des Fadens fortgezogen wird, indem der andre Endpunct auf dem Kreise DB fortrückt, sogleich den senkrechten Abstand $= r$ gegeben, so bliebe er immer auf jener Grenzcurve.

230. Aufgabe. Ein System von Parabeln, durch denselben Scheitelpunct gehend und über derselben Haupt-Axe beschrieben, soll von einer Curve so geschnitten werden, dafs die Flächenräume gleich sind, die in jeder derselben zwischen dem Bogen, der Haupt-Axe und der senkrechten Ordinate abgeschnitten werden.

Auflösung. In Fig. 60. sei AB eine der Parabeln, so ist bekanntlich der Flächenraum $ABC = \frac{2}{3} x.z.$ Soll ein gleicher Flächenraum in jeder der andern Parabeln abgeschnitten werden, so mufs $\frac{2}{3} xz = a^2$, oder $x.z. = \frac{3}{2} a^2$ sein, und dies ist offenbar die Gleichung für die Trajectorie, die sich also als eine Hyperbel zeigt.

231. Aufgabe. Für eben dieses System von Parabeln die Trajectorie zu finden, welche in allen gleiche Bögen vom Scheitel an gerechnet abschneidet.

Auflösung. Irgend eine dieser Parabeln sei durch die Coordinaten x, z bestimmt, und ihr Parameter sei $= p$, so ist (§. 109.) ihr Bogen

$$s = \tfrac{1}{2} z \surd\left(1 + \frac{4z^2}{p^2}\right) + \tfrac{1}{4} p.\ log.\left(\frac{2z}{p} + \surd\left(1 + \frac{4z^2}{p^2}\right)\right).$$

Wenn man sich ein ganzes System von Parabeln denkt, so kann jeder durch x und z bestimmte Punct, als in einer dieser Parabeln liegend angesehn werden, und derjenigen Parabel, der er angehört, Parameter mufs $= \frac{z^2}{x}$ sein. Sollen also die gleichen Bögen sämmtlich $= a$ sein, so ist

$$a = \tfrac{1}{2} z \surd\left(1 + \frac{4z^2}{p^2}\right) + \tfrac{1}{4} p\ log\left(\frac{2z}{p} + \surd\left(1 + \frac{4z^2}{p^2}\right)\right)$$

*) Dies ist das Theorem mit dessen allgemeiner Betrachtung sich von Münchow beschäftigt, in d. Abh. de tractoriis geometr. atque earum cum trajectoriis orthogonalibus congruentia. Halae. 1814.

oder da für die Parabel, in welcher die Ordinate $= z$ mit der Abscisse $= x$ zusammen gehört, $p = \frac{z^2}{x}$ ist,

$$a = \tfrac{1}{2} z \sqrt{\left(1 + \frac{4x^2}{z^2}\right)} + \tfrac{1}{4} \frac{z^2}{x} \log \left(\frac{2x}{z} + \sqrt{\left(1 + \frac{4x^2}{z^2}\right)}\right).$$

Dieses ist die Gleichung für die Trajectorie, welche gleiche Bögen abschneidet. Sie wird noch etwas bequemer, wenn man $\frac{2x}{z} = Cotang\,\psi$ setzt, also

$$a - \tfrac{1}{2} z\, Cosec.\,\psi = \tfrac{1}{2} z.\, tang\,\psi.\, log.\left(\frac{Cos\,\psi + 1}{Sin\,\psi}\right)$$

oder $\frac{2a}{z}\, Cotang\,\psi - \frac{Cos\,\psi}{Sin^2\,\psi} = log \sqrt{\frac{1 + Cos\,\psi}{1 - Cos\,\psi}} = log.\,(Cotang\,\tfrac{1}{2}\psi)$.

232. Bei dieser Gleichung verdient wohl Folgendes bemerkt zu werden. Da unser System von Parabeln sich offenbar mit derjenigen anfängt, deren Parameter $= 0$, oder die Axe selbst, ist, und mit derjenigen endiget, deren Parameter $= \infty$ oder die durch den Scheitel gegen die Axe gezogene Senkrechte ist, so muſs die Trajectorie offenbar auch auf diesen graden Linien Stücke, die $= a$ sind, abschneiden, und auch dieses giebt unsre Gleichung bei näherer Betrachtung richtig an. Sie scheint zwar in beiden Fällen etwas Unbestimmtes zu geben, indem

$$z = 2a \cdot \frac{1}{Cosec\,\psi + tang\,\psi.\, log.\,(Cotang\,\tfrac{1}{2}\psi)}$$

in $z = \frac{2a}{1 + \infty \,.\, 0}$ überzugehn scheint für $\psi = 90°$; und eben so scheint $2x = \frac{0}{0}$ zu werden, wenn $\psi = 0$ und $z = 0$ ist. Betrachten wir aber den ersten Fall näher, so finden wir bald, daſs $z = a$ die Grenze ist, welcher jener Bruch sich nähert, wenn ψ nahe an 90 Gr. kömmt. Es sei nämlich $\psi = 90° - 2u$,

$$\text{also } z = \frac{2a}{Sec.\,2u + \frac{log.\,Cotang.\,(45° - u)}{tang.\,2u}},$$

$$\text{oder } z = \frac{2a}{Sec.\,2u + \frac{log.\,tang\,(45° + u)}{tang.\,2u}},$$

Da nun $tang.\,(45° + u) = \frac{1 + tang\,u}{1 - tang\,u} = \frac{1 + u + \frac{1}{3}u^3}{1 - u - \frac{1}{3}u^3}$ ist, wenn man für ein sehr kleines u, $tang\,u = u + \frac{1}{3}u^3$ setzt, so ist

$$tang\,(45° + u) = 1 + 2u + 2u^2 + \tfrac{8}{3}u^3.$$

$$log\,tang\,(45° + u) = 2u + \tfrac{4}{3}u^3$$

und $tang.\, 2u = 2u + \frac{1}{3} . 8 . u^3$,

also $\frac{log.\, tang\,(45° + u)}{tang.\, 2u} = \frac{2 + \frac{4}{3}u^2}{2 + \frac{8}{3}u^2} = 1 - \frac{2}{3}u^2$

und $z = \frac{2a}{1 + 4u^2 + 1 - \frac{2}{3}u^2}$, welches sich der Grenze $z = \frac{2a}{2}$ schnell nähert, wenn u sehr klein ist.

Für $\psi = 0$ ist $z = \frac{2a}{\infty + 0.\, log.\, \infty}$,

und $2x = \frac{z}{tang\, \psi} = \frac{0}{0}$,

aber allgemein ist $\frac{z}{tang\, \psi} = \frac{2a}{Sec.\, \psi + tang^2\, \psi.\, log.\, (Cotang\, \frac{1}{2}\psi)}$

oder $2x = \frac{z}{tang\, \psi} = \frac{2a}{Sec.\, \psi - tang^2\, \psi.\, log.\, (tang.\, \frac{1}{2}\psi)}$

und es ist bekannt (Eulers Differential-Rechnung §. 351.) dafs $u^2.\, log.\, u$ sich dem Werthe $= 0$ nähert wenn u wenig von 0 verschieden ist, also auch hier $tang^2.\, \psi.\, log\, tang\, \frac{1}{2}\psi$ oder $\psi^2.\, log\, (\frac{1}{2}\psi)$ mit ψ zugleich verschwindet, daher $2x = 2a$ die Grenze des Werthes von x ist.

233. Bemerkung. In allen bisher betrachteten Beispielen, wo die Gröfse, welche durch die Trajectorie auf allen Curven gleich begrenzt werden sollte, durch ein integrables Differential gegeben war, und zugleich das System der Curven durch eine in endlichen Gröfsen ausgedrückte Hauptgleichung gegeben ist, war es möglich, diejenige Gröfse, die als veränderlich erscheint, wenn man von einer Curve zur andern übergeht, zu eliminiren; aber es treten neue Schwierigkeiten ein, wenn eine jener beiden Gleichungen eine nicht leicht integrable ist.

Um diese Schwierigkeiten an einem leichten Falle richtig zu beurtheilen, wollen wir zu der Aufgabe, die auf den Parabeln die Puncte, wo gleiche Flächenräume begrenzt würden, anzugeben forderte, zurückkehren.

Hier war für das ganze System der Parabeln $z^2 = px$, und die bei allen gleich zu bestimmende Fläche will ich nun, als ob es ein schwer aufzulösendes Integral wäre $= \int z\, dx = \int p^{\frac{1}{2}}.\, x^{\frac{1}{2}}\, dx$ setzen. Dieses Integrales Werth soll bei allen Parabeln gleich $\int p^{\frac{1}{2}}.\, x^{\frac{1}{2}}\, dx = a^2$ sein, das heifst, wenn für die Parabel AB (Fig. 60.) der Raum $ABC = a^2$ ist, so soll auf der nächsten Parabel der Punct D so bestimmt werden, dafs ADE ebenfalls $= a^2$ sei. Es soll also die Vergröfserung, die dem Flächenraume in einer und derselben Parabel zukäme, genau ausgeglichen werden, durch die Verkleinerung, die eben

dieser Flächenraum erleidet, wenn man von der einen Parabel zur andern übergeht; das hieſse in der Figur, der Raum ABF muſs dem $CFDE$ gleich sein. Aber der Raum ABF ist die Aenderung, welche der Flächenraum bei gleichbleibendem $x = AC$ leidet, indem man von einer Parabel zur andern übergeht, also was bei unendlich wenig verschiedenen Parabeln heiſsen würde, das in Beziehung auf p genommene Differential des Flächenraumes; und $CFDE$ ist bekanntlich wenn $CE = dx$ ist, das Differential des Flächenraumes in Beziehung auf die Aenderung des x; diese beiden Differentiale müssen eine Summe $= 0$ geben, wenn die Fläche gleich groſs werden soll, indem man sie bis zu einem andern Werthe von x und p nimmt; denn BFD kann als eine Gröſse, die von höhern Potenzen der Differentiale abhängt, und die aus den Gründen, welche die Differentialrechnung angiebt, und die man schon bei ihren leichtesten Anwendungen kennen lernt, nicht beachtet zu werden braucht, weggelassen werden.

In unserm Beispiele ist offenbar das in Beziehung auf x genommene Differential des unaufgelösten Integrals $\int p^{\frac{1}{2}} . x^{\frac{1}{2}} dx$, nichts anders als $p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx$; dagegen muſs man, um das Differential in Beziehung auf p zu finden, unter dem Integralzeichen differentiiren, und dieses Differential ist $= \int \frac{1}{2} dp . \frac{x^{\frac{1}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}} dx$, oder da das Integralzeichen sich bloſs auf x bezog, eben dieses $= \frac{1}{2} \frac{dp.}{p^{\frac{1}{2}}} \int x^{\frac{1}{2}} dx$, das ist $= \frac{1}{2} . \frac{dp}{p^{\frac{1}{2}}} . \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$, und dieses soll mit $p^{\frac{1}{2}} . x^{\frac{1}{2}} . dx$ zusammen $= 0$ sein, also $\frac{1}{3} . \frac{dp}{p} = - \frac{dx}{x}$, das ist $p = \frac{C^4}{x^3}$, oder mit andern Worten, damit der Flächenraum immer gleich gefunden werde, muſs man für jedes x die Ordinate bis zu derjenigen Parabel fortführen, deren Parameter dem Cubus der Abscisse umgekehrt proportional ist, oder da in dieser Parabel $z^2 = px = \frac{C^4}{x^2}$ ist, so hat man $zx = C^2$, und die unbestimmte C erhält den Werth, welchen die gegebne Gröſse der Fläche bestimmt, da $\frac{2}{3} zx = a^2$ sein sollte.

234. Ganz ebenso könnte man für den immer gleichen Bogen schlieſsen. Auch da (Fig. 60.) leidet der Bogen eine doppelte Aenderung, eine wenn man von AF zu AB übergeht, und diese ist von den Aenderungen des p abhängig, die andre von x abhängige, wenn man von AF zu AD übergeht.

Der Bogen AD ist also von dem AB um so viel verschieden, als die Summe beider Aenderungen beträgt, und die Summe dieser Aenderungen muſs $= 0$ sein, damit $AD = AB$ sei.

235. Sollte auf solche Weise die Curve bestimmt werden, welche auf der Ellipse gleiche Bögen abschnitte, wenn alle Ellipsen über derselben groſsen Axe $= 2a$ gezeichnet wären, so hätte man, wenn $x = a \, Sin \, \varphi$ und $z = b \, Cos \, \varphi$ ist, den verlangten immer gleichen Bogen

$$= f = a \int \sqrt{\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} Sin^2 \varphi\right)} \, d\varphi.$$

Es sei hier $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = n$, so wird n veränderlich von einer Ellipse zur andern, und da die Summe der beiden Aenderungen, welche der Bogen leidet, indem $x \; n$ und φ beide veränderlich sind, $= 0$ sein soll: so ist

$$\sqrt{(1 - n \, Sin^2 \varphi)} \, d\varphi = - \int \frac{- dn \, . \, Sin^2 \varphi \, . \, d\varphi}{2 \sqrt{(1 - n \, Sin^2 \varphi)}}$$

$$\text{oder} = + \tfrac{1}{2} \, dn \int \frac{Sin^2 \varphi \, . \, d\varphi}{\sqrt{(1 - n \, Sin^2 \varphi)}}.$$

Könnte man also hier die beiden Integrale durch Reihen, die nach n fortgingen, ausdrücken, nämlich

$$\int d\varphi \, . \sqrt{(1 - n \, Sin^2 \varphi)} = t + un + vn^2 + wn^3 + \text{etc.}$$

$$\int \frac{d\varphi \, . \, Sin^2 \varphi}{\sqrt{(1 - n \, Sin^2 \varphi)}} = T + Un + Vn^2 + Wn^3 + \text{etc.}$$

wo also t, u, v, w und T, U, V, W gegebene Functionen von φ wären, so hätte man

$$t + un + vn^2 + wn^3 + \text{etc.} = \tfrac{1}{2} \int dn \, (T + Un + Vn^2 + \text{etc.})$$

$$= C + \tfrac{1}{2} Tn + \tfrac{1}{4} Un^2 + \tfrac{1}{6} Vn^3 + \tfrac{1}{8} Wn^4 + \text{etc.}$$

woraus n sich durch die Functionen von φ ausdrücken und die beständige Gröſse, so wie es die Länge des Bogens f forderte, bestimmen lieſse.

236. **Bemerkung.** Unter dem Namen **gegenseitiger Trajectorien** haben mehrere Mathematiker sich bemüht, Curven zu bestimmen, die folgender Bedingung Genüge thun: Die zu beschreibende Curve ECF (Fig. 61.) soll die Eigenschaft haben, daſs wenn man neben der als Hauptlinie bestimmt angenommenen graden Linie ACB, die Linien NQ, MP in gleichen Abständen zu beiden Seiten mit AB parallel zieht, die Summe der Winkel, die zwischen QN und dem Bogen NC, und zwischen MP und dem Bogen ME liegen, überall eine unveränderliche sei. Ist dies der Fall, so findet von

selbst auch folgendes statt. Man denke sich die Curve $EMCNF$ um die Axe AB gedreht, so daſs sie in die Lage $E'M'CN'F'$ gekommen ist, und nun werde sie mit der Axe parallel fortgeschoben, so daſs M' nach N komme, so schneiden sich diese Curven unter immer gleichen Winkeln, wie weit man auch dieses Fortschieben parallel mit der Axe fortsetzen mag.

(Euler hat viele hieher gehörige Curven zu finden gelehrt, und die Betrachtung sehr allgemein angestellt, in d. Actis academiae scientiarum Petropolitanae, pro anno 1782. Parte poster. pag. 1.)

237. Bemerkung. Eine der nützlichsten Anwendungen der Lehre von den Trajectorien ist die Bestimmung des Weges, den der Lichtstrahl in der Atmosphäre nimmt. Diese Trajectorie schneidet alle die Kreise, welche die gleich dichten Schichten der Atmosphäre darstellen, nach einerlei Gesetze, nämlich nach dem Gesetze, daſs der *Sinus* des Winkels CBA (Fig. 62.), unter welchem der ankommende Strahl gegen den Radius geneigt ist, zu dem *Sinus* des Winkels DBG, unter welchem er nach dem Eintritt in die Schichte geneigt ist, ein durch den Radius GB der Schichte gegebnes Verhältniſs hat. Diese Untersuchung läſst sich hier nicht durchführen, da sie zu viele, anders woher entlehnte Sätze als bekannt voraus setzt.

2. *Betrachtung von Curven, die auf andre Weise in jedem Puncte mit gegebnen Curven in bestimmter Beziehung stehen.*

238. Aufgabe. In der graden Linie AG ist der Punct A (Fig. 63.) gegeben; man soll Curven ABG finden, deren Krümmungshalbmesser BO überall in gleichem Verhältnisse von AG geschnitten werde, so daſs überall $BC : BO = 1 : n$ sei.

Auflösung. Die Aufgabe heiſst mit andern Worten, die Normallinie der Curve soll sich zum Krümmungshalbmesser verhalten, wie $1 : n$, oder wenn man die Curve auf rechtwinkliche Coordinaten x, z bezieht, so soll

$$\frac{z\sqrt{(dx^2+dz^2)}}{dx} : \pm\frac{\sqrt{(dx^2+dz^2)^3}}{dx\,d^2z} = 1 : n$$

sein, und dabei ist dx als constantes Differential angenommen und der Krümmungshalbmesser negativ, wenn er mit der Normallinie in derselben Richtung liegt; also $nz = \pm\frac{dx^2+dz^2}{d^2z}$,

$$\text{das ist } \frac{d^2z}{dx^2}\,.\,nz = \pm\left(1 + \frac{dz^2}{dx^2}\right).$$

Es sei $dz = p\,dx$, so ist eben diese Gleichung

$$\frac{nz\,dp.}{dx} = \frac{nzp\,dp}{dz} = \pm\,(1+p^2),$$

$$\text{also } \frac{dz}{z} = \pm\left(\frac{np\,dp}{1+p^2}\right), \text{ oder } z = C\,(1+p^2)^{\pm\frac{1}{2}n}$$

Diese Gleichung findet also für alle diese Curven zur Bestimmung von z durch $p = \frac{dz}{dx}$ statt, um aber x durch z zu bestimmen, müssen wir die einzelnen Werthe, die n erhalten soll, durchgehn.

1. Da wir schon wissen, dafs die Cycloide die Eigenschaft hat, (1. Th. §. 623.) dafs ihre Krümmungshalbmesser von der Abscissenlinie halbirt werden, so sei $n = 2$, also $z = C\left(1 + \frac{dz^2}{dx^2}\right)^{-1}$,

$$\text{oder } dx = \frac{dz\,.\,\sqrt{z}}{\sqrt{(C-z)}},$$

$$\text{also } x = -\sqrt{(Cz - z^2)} + C\,Arc\,tang\,\sqrt{\frac{z}{C-z}},$$

oder wenn $tang\,\psi = \sqrt{\frac{z}{C-z}}$, das ist $Sin\,\psi = \sqrt{\frac{z}{C}}$; $Cos\,\psi = \sqrt{\left(1 - \frac{z}{C}\right)}$

$$Sin\,2\,\psi = 2\,\frac{\sqrt{(Cz - z^2)}}{C} \text{ ist, } x = C\psi - \tfrac{1}{2}\,C\,Sin\,2\,\psi$$

$$\text{und } z = C - C\,.\,Cos^2\,\psi = \tfrac{1}{2}\,C - \tfrac{1}{2}\,C\,Cos\,.\,2\,\psi$$

welches die Gleichungen für eine Cycloide sind.

2. Aber wir hätten ebensogut $z = C\,(1+p^2)^{\frac{1}{2}n}$ und $n = 2$ setzen können; dann würde eine Curve bestimmt werden, deren Normallinie die Verlängerung des Krümmungshalbmessers nnd der Hälfte desselben gleich wäre.

$$\text{Diese Gleichung giebt } dx = \frac{dz}{\sqrt{\left(\frac{z}{C} - 1\right)}} = dz\,\sqrt{\frac{C}{z-C}}$$

oder $x = 2\sqrt{(zC - C^2)}$,

das ist $x^2 = 4\,C\,(z - C)$, offenbar eine Parabel deren Parameter $= 4\,C$ ist, und zu welcher die Abscissenlinie senkrecht auf die Hauptaxe in der Entfernung vom Scheitel, welche der Entfernung des Brennpunctes vom Scheitel gleich ist, gezogen worden. Die grade Linie also, welche auf der Normallinie an der convexen Seite der Parabel ein Stück dem halben Krümmungshalbmesser gleich abschneidet, ist diejenige, die wir früher (im 1. Th. §. 112.)

die Directrix nannten. Dafs dies richtig ist, hätte sich aus 1. Th. §. 569. leicht folgern lassen.

3. Es sei $n = 1$ also $z^2 = C^2 (1 + p^2)^{+1}$. Betrachte ich hier zuerst den Fall, wo $\frac{z^2}{C^2} = \frac{1}{1+p^2}$ ist, oder $\frac{dz^2}{dx^2} = \frac{C^2}{z^2} - 1$,

oder $dx = \frac{z\,dz}{\sqrt{(C^2 - z^2)}}$, so wird $x = -\sqrt{(C^2 - z^2)}$ die Gleichung für einen Kreis, — in welchem ja auch bekanntlich, wenn die Abscissenlinie durch den Mittelpunct geht, Normallinie und Krümmungshalbmesser gleich sind.

4. Der verwandte Fall, wo auch $n = 1$ ist, aber die Normallinie auf dem Theile, der der convexen Seite zugewandt ist, genommen wird, giebt

$$1 + p^2 = \frac{z^2}{C^2} \text{ oder } dx = \frac{C\,dz}{\sqrt{(z^2 - C^2)}}$$

$$x = C \log \frac{z + \sqrt{(z^2 - C^2)}}{C}, \text{ wenn } z = C \text{ sein soll für } x = 0.$$

Auf ähnliche Weise könnte man mehrere Curven bestimmen, deren Betrachtung ich, da die schwierigern Integrationen nicht zu etwas besonders Wichtigem führen, hier übergehe.

239. Aufgabe. Es ist eine Parabel gegeben, man sucht eine Curve, deren sämmtliche Tangenten die Eigenschaft haben, immer gleiche Flächentheile der Parabel abzuschneiden.

Auflösung. Die gesuchte Curve ist eine der gegebenen völlig gleiche Parabel, deren Scheitel auf der Hauptaxe da liegt, wo eine auf die Axe senkrecht gezogene Sehne von der gegebnen Parabel eine Fläche, jener verlangten gleich, abschneidet.

Beweis. Es liefse sich sehr leicht beweisen, dafs die angegebne Parabel die Eigenschaft hat, dafs ihre Tangenten als Sehnen der gegebnen Parabel betrachtet, solche gleiche Stücke abschneiden; aber dieser Beweis würde uns keine Leitung zu Untersuchung irgend eines andern Falles, wo die gegebne Curve eine von der Parabel verschiedene Curve wäre, darbieten; ich gehe daher auch hier auf dem rechnenden Wege so fort, wie man es in allen Fällen könnte.

Es sei $z^2 = px$ die Gleichung zwischen rechtwinklichen Coordinaten für die Parabel, und a die Abscisse, für welche der zwischen der senkrechten Sehne und dem Bogen enthaltne Flächenraum $= k^2 =$ dem bestimmten Flä-

chenräume ist. Hiernach ist $k^2 = \frac{4}{3} p^{\frac{1}{2}} . a^{\frac{3}{2}}$ oder $a = k^{\frac{4}{3}} \left(\frac{9}{16\, p}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Wir gehen jetzt zur Betrachtung einer gegen die Hauptaxe unter dem Winkel $= \varphi$ geneigten Sehne, und des durch sie abgeschnittenen Flächenraumes über. Eine solche, mit der Abscisse $= u$ auf der Hauptaxe zusammengehörende Sehne ist bekanntlich (1. Th. §. 118.)
$= \frac{2 \sqrt{p} . \sqrt{\{u\, Sin^2 \varphi + \frac{1}{4} p\, Cos^2 \varphi\}}}{Sin^2 \varphi}$, und der durch sie begrenzte Flächenraum

$$= 2 \sqrt{p} . \int \sqrt{\{u + \tfrac{1}{4} p\, Cotang^2 \varphi\}} . du = \tfrac{4}{3} \sqrt{p} . \sqrt{(u + \tfrac{1}{4} p\, Cotang^2 \varphi)^3}.$$

$= \frac{4}{3} p^{\frac{1}{2}} . a^{\frac{3}{2}}$; daher $a = u + \frac{1}{4} p\, Cotang^2 . \varphi$. oder $u = a - \frac{1}{4} p\, Cotang^2 \varphi$. Offenbar wird unsre gesuchte Curve durch die Durchschnittspuncte zweier solcher Sehnen, die unmittelbar auf einander folgen, bestimmt. Betrachten wir diese Sehnen als grade Linien, deren einzelne Puncte durch Abscissen $= w$ auf der Haupt-Axe und darauf senkrechte Ordinaten y ausgedrückt werden, so ist für die eben betrachtete Sehne die Gleichung

$$y = (w - u)\, tang\, \varphi = (w - a)\, tang\, \varphi + \tfrac{1}{4} p\, Cotang\, \varphi;$$

für die zunächst folgende Sehne ist im Allgemeinen für dasselbe w, y in $y + dy$ übergegangen und es ist $\frac{dy}{d\varphi} = (w - a)\, Sec^2 \varphi - \frac{1}{4} p\, Cosec^2 \varphi$; also für den gemeinschaftlichen Durchschnittspunct beider, wo mit w der Werth der Ordinate $= y$ zusammen gehört, oder $dy = 0$ ist, $tang^2 \varphi = \frac{p}{4\,(w - a)}$; folglich der geometrische Ort aller Durchschnittspuncte durch

$$y = \tfrac{1}{2} \sqrt{(pw - pa)} + \tfrac{1}{2} \sqrt{(pw - pa)},$$
oder $y^2 = p\,(w - a)$ gegeben.

240. Man hätte noch leichter so schliefsen können. Unsre gesuchte Curve ist offenbar die Grenzcurve, an welcher die gehörig bestimmten sämmtlichen Sehnen der Parabel Tangenten sein sollen. Wird diese Grenzcurve durch auf einander senkrechte Coordinaten w, y ausgedrückt: so ist $\frac{dy}{dw} = tang\, \varphi$ die trigonometrische Tangente des Winkels φ, den ihre Berührungslinie mit der Abscissenlinie macht. Aus der Gleichung für eine der Tangenten unsrer Curve oder eine der Sehnen der gegebnen Parabel wird also, da $y = (w - a)\, tang\, \varphi + \frac{1}{4} p\, Cotang\, \varphi$ wenn man φ wegschafft,

$y = (w - a)\frac{dy}{dw} + \frac{1}{4}p\frac{dw}{dy}$ giebt, die Differentialgleichung

$$dy^2 - \frac{y\,dw\,dy}{w-a} = -\frac{\frac{1}{4}p\,dw^2}{w-a},$$

oder $dy = \dfrac{\frac{1}{2}y\,dw \pm \surd\left(\frac{1}{4}y^2 - \frac{p}{4}(w-a)\right)dw}{w-a}$ hergeleitet werden. Diese aber hat die besondre Auflösung $y^2 = p\,(w-a)$ für die Grenzcurve, und die allgemeine Auflösung ist $y = Aw + B$, wenn man $B = -\left(\frac{4A^2a - p}{4A}\right)$ setzt.

241. Aufgabe. Es ist eine Ellipse gegeben, man sucht die Curve, deren sämmtliche Tangenten hier gleiche Flächenräume abschneiden.

Auflösung. Es sei die Gleichung $z^2 = \frac{2b^2x}{a} - \frac{b^2x^2}{a^2}$ für die Ellipse gegeben, wo x Abscissen auf der Hauptaxe vom Endpuncte an gerechnet, z die darauf senkrechten Ordinaten sind. Zieht man nun eine unter dem Winkel $= \varphi$ gegen die Haupt-Axe geneigte Sehne, so ist die Länge derselben

$$= \frac{2ab\surd\left((2au - u^2)\,Sin^2\varphi + b^2\,Cos^2\varphi\right)}{a^2\,Sin^2\varphi + b^2\,Cos^2\varphi}$$

oder $= 2ab\,.\,\dfrac{\surd\left(a^2\,Sin^2\varphi + b^2\,Cos^2\varphi - (a-u)^2\,Sin^2\varphi\right)}{a^2\,Sin^2\varphi + b^2\,Cos^2\varphi}$,

und der von ihr begrenzte Flächenraum

$$= \frac{2ab\,Sin\,\varphi}{\surd\left(a^2\,Sin^2\varphi + b^2\,Cos^2\varphi\right)}\int du\,\surd\left(1 - \frac{(a-u)^2\,Sin^2\varphi}{a^2\,Sin^2\varphi + b^2\,Cos^2\varphi}\right)$$

$$= \frac{ab}{\surd\left(a^2 + b^2\,Cotang^2\varphi\right)}\left\{\surd\left(a^2 + b^2\,Cotg^2\varphi\right)Arc.Cos\frac{a-u}{\surd\left(a^2 + b^2\,Cotang^2\varphi\right)} - (a-u)\surd\left(1 - \frac{(a-u)^2}{(a^2 + b^2\,Cotang^2\varphi)}\right)\right\}.$$

Dieser Flächenraum soll bei jedem Werthe von φ gleich bleiben, für $\varphi = 90°$ wird er $= ab\,Arc\,Cos\,\frac{a-u}{a} - b\,(a-u)\surd\left(1 - \frac{(a-u)^2}{a^2}\right)$.

Nenne ich den hierdurch bestimmten Werth von $u = u'$, so ist also

$$Arc\,Cos\frac{a-u}{\surd\left(a^2 + b^2\,Cotang^2\varphi\right)} - Arc\,Cos\left(\frac{a-u'}{a}\right)$$

$$= \frac{(a-u)}{\surd\left(a^2 + b^2\,Cotang^2\varphi\right)}\surd\left(1 - \frac{(a-u)^2}{a^2 + b^2\,Cotg^2\varphi}\right) - \frac{(a-u')}{a}\surd\left(1 - \frac{(a-u')^2}{a}\right).$$

Um dies besser zu übersehn, will ich $\frac{a - u'}{a} = Cos\,\psi'$

und $\frac{a - u}{\sqrt{(a^2 + b^2\,Cotang^2\,\varphi)}} = Cos\,\psi$ setzen; dann ist

$$\psi - \psi' = Cos\,\psi\,.\,Sin\,\psi - Cos\,\psi'\,Sin\,\psi',$$

oder $2\,\psi - 2\,\psi' = Sin\,2\,\psi - Sin\,2\,\psi'$.

Es ist aber einleuchtend, daſs der Unterschied zweier Bögen nie dem Unterschiede ihrer *Sinus* gleich sein kann, wenn nicht diese Bögen gleich sind, $\psi = \psi'$. Nothwendig also ist $\left(\frac{a - u'}{a}\right).\sqrt{(a^2 + b^2\ Cotang^2\,\varphi)} = a - u$, und wenn man jeden Punct der unter dem Winkel $= \varphi$ geneigten Sehne die in der Entfernung $= u$ einschneidet, durch Coordinaten w, y bestimmt, so ist $y = (w - u)\ tang\,\varphi$,

oder $y = w\ tang\,\varphi - a\ tang\,\varphi + \left(\frac{a - u'}{a}\right)\sqrt{(a^2\,tang^2\,\varphi + b^2)}$.

Um nun den geometrischen Ort des Durchschnittspunctes jeder zwei einander nächsten Sehnen zu erhalten, setze ich

$$dy = 0 = (w - a)\,Sec^2\,\varphi\,.\,d\varphi + \left(\frac{a - u'}{a}\right)\frac{a^2\,.\,tang\,\varphi\,.\,Sec^2\,\varphi\,.\,d\varphi}{\sqrt{(a^2\,tang^2\,\varphi + b^2)}},$$

also $(a - w)\sqrt{(a^2\,tang^2\,\varphi + b^2)} = (a - u')\,a\,tang\,\varphi$,

oder $tang^2\,\varphi = \frac{b^2\,(a - w)^2}{a^2\,(a - u')^2 - a^2\,(a - w)^2}$;

und endlich $y = \frac{b}{a}\left(\frac{(w - a)\,(a - w) + (a - u')^2}{\sqrt{((a - u')^2 - (a - w)^2)}}\right)$

$$= \frac{b}{a}\sqrt{((a - u')^2 - (a - w)^2)}.$$

Dies ist die Gleichung für die gesuchte Curve, die demnach eine Ellipse, der gegebnen ähnlich, ist, deren halbe groſse Axe $= (a - u')$, und halbe kleine Axe $= \frac{b\,(a - u')}{a}$ ist.

Wir hätten auch hier eine Differentialgleichung erhalten können, indem $tang\,\varphi = \frac{dy}{dw}$ ist, also die Gleichung $y = (w - u)\ tang\,\varphi$ für jede Sehne, nun giebt

$$y\,dw = w\,dy - u\,dy = (w - a)\,dy + \left(\frac{a - u'}{a}\right)dy\sqrt{\left(a^2 + b^2\,\frac{dw^2}{dy^2}\right)}$$

oder $y^2 dw^2 + 2y(a-w)\,dw\,dy + (a-w)^2 dy^2$
$$= (a-u')^2 dy^2 + \frac{b^2}{a^2}(a-u')^2 dw^2.$$

Daher $dy = dw. \left\{ \frac{y(a-w) \pm (a-u')\sqrt{\left\{y^2 - \frac{b^2}{a^2}((a-u')^2-(a-w)^2)\right\}}}{((a-u')^2 - (a-w)^2)} \right\}$

Eine Gleichung deren besondre Auflösung ist
$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}((a-u')^2 - (a-w)^2)$$
und deren vollständiges Integral man am leichtesten dadurch findet, daſs man die Gleichung
$$y\,dw - (w-a)\,dy = \frac{(a-u')}{a}\sqrt{(a^2 dy^2 + b^2 dw^2)},$$
noch einmal differentiirt, wobei wir dw als unveränderlich ansehen wollen. Dann wird
$$(a-w)\,d^2y = \left(\frac{a-u'}{a}\right)\left(\frac{a^2\,dy\,d^2y}{\sqrt{(a^2 dy^2 + b^2 dw^2)}}\right)$$
und offenbar giebt $d^2y = 0$ das vollständige Integral $y = Aw + B$, welches mit der Gleichung $y = (w-a)\frac{dy}{dw} + \frac{a-u'}{a}\sqrt{\left(\frac{a^2 dy^2}{dw^2} + b^2\right)}$ verbunden, nun giebt $Aw + B = Aw - aA + \left(\frac{a-u'}{a}\right)\sqrt{(a^2A^2 + b^2)}$ und folglich B bestimmt.

Die besondre Auflösung würde aus
$$(a-w)\,.\sqrt{(a^2 dy^2 + b^2 dw^2)} = a(a-u')\,dy$$
oder $dy = \frac{(a-w)\,b\,dw}{a\sqrt{((a-u')^2-(a-w)^2)}}$ herzuleiten sein und eben das wie vorhin geben.

242. Bemerkung. Es läſst sich nun auch wohl übersehn, wie man eine ähnliche Frage in allen Fällen beantworten könnte. Soll (Fig. 67.) nämlich durch die Sehne der Curve immer ein Flächenraum dem ABC gleich abgeschnitten werden, so wird die unter dem Winkel $=\varphi$ geneigte Sehne VW, $= v'' - v'$ vermittelst $BU = u$ gegeben sein, indem sie die Summe der beiden Werthe der Ordinate $UV = v''$, $UW = -v'$ ist; und da $\int (v'' - v')\,du\,Sin\,\varphi = k^2$, so ist u als Function von φ gegeben;

φ aber kann dadurch eliminirt werden, daſs man $tang\, \varphi = \frac{dy}{dw}$ setzt, wenn die Buchstaben eben die Bedeutung wie vorhin haben. Dann ist allemal das besondre Integral die Gleichung für die Curve, deren Tangenten jene Sehnen sind, und das vollständige Integral umfaſst alle jene Sehnen.

Der Grund, warum bei den Curven der zweiten Ordnung die gesuchte Curve, der gegebnen ähnlich wird, würde sich leicht angeben lassen, wir wollen aber hier nicht länger dabei verweilen.

Zweite Haupt-Abtheilung.

Untersuchungen über krumme Flächen und doppelt gekrümmte Linien.

Erster Abschnitt.

Ueber die Bestimmung der Berührungs-Ebenen krummer Flächen, über ihre Asymptoten, doppelten Puncte u. s. w.

243. **Bemerkung.** Die ersten Fragen, die hier vorkommen, zu beantworten, hat bekanntlich keine groſse Schwierigkeit, indem die Lage der Berührungs-Ebne, die Lage und Gröſse der Normallinie und dergleichen leicht zu bestimmen ist. Wollen wir aber weiter gehen, so bietet sich hier eine so groſse Mannigfaltigkeit von Untersuchungen dar, daſs es schwer sein mögte, sie ganz zu erschöpfen. Auch hier kann es Knoten, Spitzen und andre merkwürdige Puncte geben, aber nicht bloſs einzelne Puncte, sondern ganze Reihen von Puncten, denen man diese Namen zueignen mögte; und die Frage, wie sie in der Gleichung für die krumme Fläche entdeckt werden, scheint wohl werth, näher beantwortet zu werden.

244. **Aufgabe.** Die Gleichung für die Berührungs-Ebne einer gegebnen krummen Fläche zu finden.

Auflösung. 1. Die Betrachtungen im 1. Th. §. 748. zeigen, daſs $\left(\frac{dz}{dx}\right)(u-x)+\left(\frac{dz}{dy}\right)(v-y)=w-z$, die gesuchte Gleichung ist, wenn x, y, z die Coordinaten des Berührungspunctes sind, $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, die aus der Gleichung für die krumme Fläche bekannten partiellen Differentialquotienten, und u, v, w die Coordinaten irgend eines Punctes der berührenden Ebne.

2. Wenn man unter $U=0$ die Gleichung für die krumme Fläche versteht, und $A(u-x)+B(v-y)+C(w-z)=0$ die Gleichung für die Ebne ist, welche durch den vermittelst x, y, z bestimmten Punct geht: so soll, damit diese Ebne eine berührende sei, das in Beziehung auf u genommene Differential der letzten Gleichung gleich dem in Beziehung auf x genommenen Differential der erstern oder $A=\left(\frac{dU}{dx}\right)$ sein, und da etwas ganz Aehnliches in Beziehung auf die beiden andern Coordinaten gilt, so ist

$$\left(\frac{dU}{dx}\right)(u-x)+\left(\frac{dU}{dy}\right)(v-y)+\left(\frac{dU}{dz}\right)(w-z)=0$$

die Gleichung für die Tangential-Ebne.

245. Die Uebereinstimmung der letztern Gleichung mit der ersten läſst sich so übersehen. $U=0$ giebt

$$\left(\frac{dU}{dx}\right)dx+\left(\frac{dU}{dy}\right)dy+\left(\frac{dU}{dz}\right)dz=0, \text{ also } \left(\frac{dz}{dx}\right)=-\frac{-\left(\frac{dU}{dx}\right)}{\left(\frac{dU}{dz}\right)}\cdot$$

woraus sich die Uebereinstimmung beider ergiebt.

246. **Aufgabe.** Den Winkel $=\eta$ zu finden, den die Durchschnittslinie der Abscissen-Ebne und Berührungs-Ebne mit der Abscissenlinie macht; und den Neigungswinkel $=\zeta$ der Berührungs-Ebne gegen die Abscissen-Ebne.

Auflösung. Behält man für die berührende Ebne die Gleichung

$$\left(\frac{dU}{dx}\right)(u-x)+\left(\frac{dU}{dy}\right)(v-y)+\left(\frac{dU}{dz}\right)(w-z)=0,$$

so ist da, wo sie in die durch u, v gelegte Abscissen-Ebne einschneidet, $w=0$, also

$$\left(\frac{dU}{dx}\right)u+\left(\frac{dU}{dy}\right)v=\left(\frac{dU}{dx}\right)x+\left(\frac{dU}{dy}\right)y+\left(\frac{dU}{dz}\right)z.$$

und $tang.\eta=-\frac{-\left(\frac{dU}{dx}\right)}{\left(\frac{dU}{dy}\right)}$ die Tangente des Neigungswinkels dieser Linie gegen die Abscissenlinie, worauf die u aufgetragen worden.

Nennt man den Abstand eines durch u, v, in der Abscissen-Ebne gegebnen Punctes von dieser Durchschnittslinie $=t$, so wird t, wenn mit

demselben die Höhe $= w$ zusammen gehören soll,

$$\text{durch } t = \frac{-w \cdot \left(\frac{dU}{dz}\right)}{\sqrt{\left(\left(\frac{dU}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dU}{dy}\right)^2\right)}} \text{ gegeben, und es ist daher}$$

$$tang\ \xi = \frac{-\sqrt{\left(\left(\frac{dU}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dU}{dy}\right)^2\right)}}{\left(\frac{dU}{dz}\right)}.$$

Die Uebereinstimmung dieser Gleichungen mit 1. Th. §. 750. läſst sich leicht zeigen, oder erhellt vielmehr sogleich aus §. 245. Die dortigen Gleichungen

nämlich sind $tang.\eta = -\frac{\left(\frac{dz}{dx}\right)}{\left(\frac{dz}{dy}\right)}$ und $tang\ \zeta = \sqrt{\left(\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}$. *)

247. Es ist wohl der Mühe werth, hier die Bedeutung der + und — Zeichen zu überlegen, damit wir in der Folge jeden Anstoſs vermeiden.

Als Normalfall nehmen wir offenbar am besten den an, wo x, y und z zugleich wachsen, oder wo z zunimmt, sowohl wenn x allein, als wenn y allein wächst; damit das geschehe muſs sowohl

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) \text{ welches } = -\frac{\left(\frac{dU}{dx}\right)}{\left(\frac{dU}{dz}\right)} \text{ war,}$$

$$\text{als } \left(\frac{dz}{dy}\right) = -\frac{\left(\frac{dU}{dy}\right)}{\left(\frac{dU}{dz}\right)} \text{ positiv sein, und wir können daher am besten}$$

$\left(\frac{dU}{dz}\right)$ als eine an sich negative Gröſse ansehn, welches genau eben das ist, als ob wir sagten, daſs sie mit den beiden andern partiellen Differentialen nicht einerlei Zeichen haben kann, wenn der Normalfall statt findet. Hieraus er-

*) Im 1. Th. §. 749. ist $tang\ \zeta = -\sqrt{\left(\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}$ gesetzt, dies ist aber unrichtig und entspringt daher, daſs aus dem negativen $tang\ \eta$ gefolgert ist, $Sin\ \eta$ sei negativ, statt daſs $Cosin\ \eta$ als negativ anzunehmen war.

hellt also dafs $tang'\eta$ in der That negativ ist, indem nur dann bei wachsenden u sowohl, als bei wachsenden v, auch w zunimmt, wenn die Durchschnittslinie mit den positiven u einen Winkel macht, der mit den positiven v an einerlei Seite liegt und ein stumpfer Winkel ist. Dagegen ist $tang.\ \zeta$ als positiv für den Normalfall anzusehn, oder die Ebne geht von der Durchschnittslinie oberhalb der wachsenden u und v an der Seite fort, wo w positiv ist.

248. Aufgabe. Die Gleichungen anzugeben, welche die Lage der Normallinie bestimmen.

Auflösung. Wenn $au + bv = c$ und $a'u' + b'w' = c'$ die Gleichungen für zwei Projectionen der Normallinie sind: so müssen erstlich, weil die Normallinie durch den Punct gehn soll, für welchen x, y, z die Coordinaten sind,

mit den Gleichungen $au + bv = c$ und $a'u' + b'w = c'$

zugleich auch die Gleichungen $ax + by = c$ und $a'x + b'z = c'$

bestehn, also $a(u - x) + b(v - y) = 0$ und $a'(u - x) + b'(w - z) = 0$ sein. Aber die Projection auf der Ebne der u, v mufs mit der Einschnittslinie der Berührungs-Ebne in diese Ebne einen rechten Winkel machen, daher $\frac{v - y}{u - x} = tang(\eta - 90°)$ sein, weil η für den Normalfall ein stumpfer Winkel ist, also $-\frac{a}{b} = -Cotang.\ \eta = \frac{\left(\frac{dU}{dy}\right)}{\left(\frac{dU}{dx}\right)}$, also die erste Gleichung

$$\left(\frac{dU}{dy}\right)(u - x) - \left(\frac{dU}{dx}\right)(v - y) = 0.$$

Durch ganz ähnliche Ueberlegungen würde man auch

$$\left(\frac{dU}{dz}\right)(u - x) - \left(\frac{dU}{dx}\right)(w - z) = 0$$ finden, als Gleichung für die zweite Projection und

$$(v - y)\left(\frac{dU}{dz}\right) - (w - z)\left(\frac{dU}{dy}\right) = 0$$ als Gleichung für die dritte Projection.

Da $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{-\left(\frac{dU}{dx}\right)}{\left(\frac{dU}{dz}\right)}$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{-\left(\frac{dU}{dy}\right)}{\left(\frac{dU}{dz}\right)}$ ist, so sind diese drei Gleichungen mit folgenden einerlei:

$$u - x - \frac{\left(\frac{dz}{dx}\right)}{\left(\frac{dz}{dy}\right)}(v - y) = 0; \quad u - x + \left(\frac{dz}{dx}\right)(w - z) = 0;$$

$$\text{und } v - y + \left(\frac{dz}{dy}\right)(w - z) = 0.$$

249. **Aufgabe.** Die drei Winkel zu bestimmen, welche die Normallinie mit den drei, den Coordinaten parallel gezognen Linien macht.

Auflösung. Wenn die Neigung der Berührungs-Ebne gegen die Ebne der u, v, durch ζ ausgedrückt ist, so ist offenbar die Neigung ZNY der Normallinie ZN (Fig. 68.) gegen eben diese Ebne $= 90° - \zeta$, und daher $YZN = \zeta$, das ist, der Winkel der Normallinie mit den wachsenden z oder w,

$$= 180 - \zeta, \text{ also } tang. \text{ dieses Winkels} = \frac{\sqrt{\left\{\left(\frac{dU}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dU}{dy}\right)^2\right\}}}{\left(\frac{dU}{dz}\right)} = tg. uZw.$$

Um den Winkel zu finden, den die Normallinie mit den wachsenden u macht, lege ich eine Ebne uZw durch die Normallinie und die Ordinate W, eine Ebne wZv durch die Normallinie und eine mit u parallele Linie Zv, endlich uZv durch Zu und Zv. Dann ist $uZv = 90°$,

$$tang\ uZw = \frac{\sqrt{\left(\left(\frac{dU}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dU}{dy}\right)^2\right)}}{\left(\frac{dU}{dz}\right)},$$ und die Neigung der Ebnen uZw, uZv, gegen einander ist $= NYP = \eta - 90°$, folglich (Trigonom. §. 110.) $Cos\, wZv = Cos\,(\eta - 90°).\ Sin\,(uZw)$

$$= Sin\,\eta.\ Sin.\ uZw = \left(\frac{dU}{dx}\right). \frac{1}{\sqrt{\left(\left(\frac{dU}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dU}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dU}{dz}\right)^2\right)}}$$

$$\text{oder } tang\ wZv = \frac{\sqrt{\left(\left(\frac{dU}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dU}{dz}\right)^2\right)}}{\left(\frac{dU}{dx}\right)}.$$

Und ebenso würde man die Tangente des Winkels der Normallinie mit den wachsenden v finden

$$= \frac{\sqrt{\left(\left(\frac{dU}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dU}{dz}\right)^2\right)}}{\left(\frac{dU}{dy}\right)}.$$

250. Bemerkung. Hiernach ist es nun leicht, an einen gegebnen Punct einer gegebenen krummen Fläche die Berührungs-Ebne zu legen, oder die Normallinie zu ziehen, wie die Beispiele im 1. Th. §. 752. 753. zeigen.

Die Lage der Berührungs-Ebne kann aber noch durch andre Bedingungen bestimmt werden, und davon will ich hier einige Beispiele geben.

251. Aufgabe. Es ist ein Punct gegeben, der sich nicht in der krummen Fläche befindet, man sucht eine Gleichung für alle Puncte der krummen Fläche, an welchen eine durch jenen Punct gehende Ebne berühren kann.

Auflösung. Wenn die Lage des gegebnen Punctes durch Coordinaten $u = a$, $v = b$, $w = c$ bestimmt ist, und

$Au + Bv + Cw = D$, die noch ganz unbestimmte Gleichung für die berührende Ebne ist, so mufs hier zugleich

$Aa + Bb + Cc = D$,

also $A(u - a) + B(v - b) + C(w - c) = 0$ sein, weil a, b, c die Coordinaten eines in der Ebne liegenden Punctes sind.

Soll nun eben diese Ebne an einem durch die Coordinaten x, y, z bestimmten Puncte derjenigen Fläche, die durch die Gleichung $U = 0$ gegeben ist, berührend sein, so mufs nach §. 244. zugleich

$$\left(\frac{dU}{dx}\right)(u - x) + \left(\frac{dU}{dy}\right)(v - y) + \left(\frac{dU}{dz}\right)(w - z) = 0,$$

und folglich $$\left(\frac{dU}{dx}\right)(u - a) + \left(\frac{dU}{dy}\right)(v - b) + \left(\frac{dU}{dz}\right)(w - c) = 0,$$

sein, weil A, B, C dieselben Werthe für jeden Punct der Ebne behalten. Es ist also

$$\left(\frac{dU}{dx}\right)(x - a) + \left(\frac{dU}{dy}\right)(y - b) + \left(\frac{dU}{dz}\right)(z - c) = 0,$$

die Gleichung, welche in Verbindung mit $U = 0$ für alle die Puncte statt findet, wo eine durch den gegebnen Punct gehende Ebne berühren kann, und die also die für alle diese Puncte geltende Bedingungsgleichung heifsen kann.

252. Beispiel. Es ist ein Punct aufser der Kugel-Oberfläche gegeben, man sucht alle die Puncte, wo eine durch ihn gelegte Ebne die Kugelfläche berühren kann.

Die Gleichung $U = 0$ sei hier $r^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$, also

$$\left(\frac{dU}{dx}\right) = -2x;\ \left(\frac{dU}{dy}\right) = -2y;$$

$\left(\frac{dU}{dz}\right) = -2z$; so wird, wenn der gegebne Punct durch $x = a$, $y = b$, $z = c$ bestimmt ist, die Bedingungsgleichung

$$x(x-a) + y(y-b) + z(z-c) = 0,$$

oder weil $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ und $z = \sqrt{(r^2 - x^2 - y^2)}$ ist,

$r^2 - xa - yb - c\sqrt{(r^2 - x^2 - y^2)} = 0$, als Gleichung für die Projection der auf die Kugel gezeichneten Linie, in welcher die sämmtlichen Berührungspuncte liegen. Daſs diese Projection eine Ellipse ist, läſst sich leicht zeigen; wir können aber auch leicht zeigen, daſs die Linie auf der Kugelfläche selbst ein Kreis ist. Beziehn wir hier x, y, z bloſs auf Puncte dieser Curve, so ist $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 =$ dem Quadrate des Abstandes von jedem Puncte in ihr zu dem gegebnen Puncte, und es läſst sich leicht zeigen, daſs diese Summe eine unveränderliche ist. Dieses Quadrat nämlich

$$x^2 + y^2 + z^2 + a^2 + b^2 + c^2 - 2ax - 2by - 2cz = s^2$$

giebt, weil $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ist

$$r^2 + a^2 + b^2 + c^2 - 2ax - 2by - 2cz = s^2,$$

oder da $ax + by + cz = r^2$ war

$$a^2 + b^2 + c^2 - r^2 = s^2;$$

jener Abstand $= s$ ist also für alle Puncte der Linie, in welcher die Berührung geschehen kann, gleich groſs. Es erhellt auch leicht, warum $s^2 = a^2 + b^2 + c^2 - r^2$ sein muſs; nämlich weil $\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}$ der Abstand des gegebnen Punctes durch den die Berührungs-Ebne gehen soll, vom Centro ist, und jene Abstandslinie als berührend an der Kugel mit dem Halbmesser einen rechten Winkel bildet, also s, r und $\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}$ die Seiten eines rechtwinklichen Drei-Eckes sind.

253. **Beispiel.** Die Puncte zu finden, wo Ebnen, die durch einen bestimmten Punct gehen, die Oberfläche eines graden Kegels berühren können.

Hier ist $U = 0 = x^2 + y^2 - z^2 \tan^2 \mathfrak{C}$; die Gleichung für die Kegelfläche also

$$\left(\frac{dU}{dx}\right) = 2x;\ \left(\frac{dU}{dy}\right) = 2y;\ \left(\frac{dU}{dz}\right) = -2z.\tan^2 \mathfrak{C}.$$

Die Bedingungsgleichung wird

$$x(x-a) + y(y-b) - z.\tan^2 \mathfrak{C}.(z-c) = 0,$$

oder da $x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \mathfrak{C}$ ist,

$ax + by - zc \,.\, tang^2\, \mathfrak{C} = 0$, und daraus geht für die Projection weil $z\, tang\, \mathfrak{C} = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ ist, die Gleichung

$$ax + by - c \,.\, tang\, \mathfrak{C} \,.\, \sqrt{(x^2 + y^2)} = 0$$

oder $x = \dfrac{y}{a^2 - c^2\, tang^2\, \mathfrak{C}} \left\{ -ab \pm c \,.\, tang\, \mathfrak{C} \,.\, \sqrt{[a^2 + b^2 - c^2\, tang^2\, \mathfrak{C}]} \right\}$

hervor, so daſs die Projection der Linie, in welcher die Berührung geschehen kann, zwei grade Linien darstellt, deren symmetrische Lage gegen den gegebnen Punct sich auch leicht nachweisen lieſse.

254. Beispiel. Es sei ein durch Umdrehung entstandenes elliptisches Sphäroid gegeben, dessen Gleichung $U = 0$, folgende ist:

$$\frac{x^2}{f^2} + \frac{y^2}{f^2} + \frac{z^2}{g^2} = 1,$$

man sucht den geometrischen Ort aller Berührungspuncte, in welchen eine durch den gegebnen Punct gehende Ebne das Sphäroid berühren kann.

Hier ist $\left(\dfrac{dU}{dx}\right) = \dfrac{2x}{f^2}$; $\left(\dfrac{dU}{dy}\right) = \dfrac{2y}{f^2}$; $\left(\dfrac{dU}{dz}\right) = \dfrac{2z}{g^2}$,

also unsre Bedingungsgleichung

$$\frac{x(x-a)}{f^2} + \frac{y(y-b)}{f^2} + \frac{z(z-c)}{g^2} = 0$$

oder da $\dfrac{x^2}{f^2} + \dfrac{y^2}{f^2} + \dfrac{z^2}{g^2} = 1$ ist,

$$1 = \frac{ax + by}{f^2} + \frac{cz}{g^2}.$$

Diese Gleichung in Verbindung mit der Gleichung für die Oberfläche des Sphäroides verstattet, eine der drei Gröſsen zu eliminiren, und Gleichungen für jede der drei Projectionen zu erhalten.

Da der Körper ein runder Körper ist, also die Richtung der x, in der auf die Umdrehungs-Axe senkrechten Ebne willkürlich angenommen werden kann, so will ich annehmen, die Abscissenlinie liege so, daſs die durch x, z gelegte Ebne den gegebnen Punct, durch welchen die Berührungs-Ebne gehen soll, in sich enthalte, also $b = 0$ sei; dann ist die Bedingungsgleichung $1 = \dfrac{ax}{f^2} + \dfrac{cz}{g^2}$ zugleich die Gleichung für die Projection auf die durch die Umdrehungs-Axe und den gegebnen Punct gelegte Ebne; diese Projection ist also eine grade Linie und folglich der geometrische Ort der Berührungspuncte eine ebne Curve, die also gewiſs eine Ellipse ist.

Diese Formeln würden die Frage beantworten, wie die Orte liegen, die man auf der sphäroidischen Erde als Grenze des Horizontes von einem erhabnen Standpuncte aus sehen würde, wenn man auf die Refraction nicht Rücksicht nähme; oder welchen Orten auf der sphäroidischen Erde der Mond in demselben Augenblicke im Horizonte erscheint u. s. w.

255. Aufgabe. Es sind zwei Puncte durch die Coordinaten a, b, c und a', b', c' gegeben; man sucht den Punct einer gegebnen krummen Fläche, in welchem eine durch jene zwei Puncte gelegte Ebne die krumme Fläche berühren kann.

Auflösung. Wenn x, y, z die Coordinaten des Berührungspunctes sind, und $U=0$ die Gleichung für die krumme Fläche, so müssen zugleich die drei Gleichungen

$$\left(\frac{dU}{dx}\right)(u-x)+\left(\frac{dU}{dy}\right)(v-y)+\left(\frac{dU}{dz}\right)(w-z)=0$$

$$\text{und}\quad \left(\frac{dU}{dx}\right)(u-a)+\left(\frac{dU}{dy}\right)(v-b)+\left(\frac{dU}{dz}\right)(w-c)=0$$

$$\text{und}\quad \left(\frac{dU}{dx}\right)(u-a')+\left(\frac{dU}{dy}\right)(v-b')+\left(\frac{dU}{dz}\right)(w-c')=0$$

statt finden. Sie geben auch

$$\left(\frac{dU}{dx}\right)(a-x)+\left(\frac{dU}{dy}\right)(b-y)+\left(\frac{dU}{dz}\right)(c-z)=0,$$

$$\text{und}\quad \left(\frac{dU}{dx}\right)(a'-x)+\left(\frac{dU}{dy}\right)(b'-y)+\left(\frac{dU}{dz}\right)(c'-z)=0,$$

und dies sind die zwei Bedingungsgleichungen, die mit $U=0$ zugleich statt finden müssen, und folglich die drei Coordinaten des Berührungspunctes bestimmen.

256. Beispiel. Die krumme Fläche sei eine Kugel, also die Gleichung $U=0$ sei: $r^2=x^2+y^2+z^2$. Dann werden die beiden Bedingungsgleichungen

$$x(a-x)+y(b-y)+z(c-z)=0,\ \text{oder}\ ax+by+cz=r^2$$

$$\text{und}\quad x(a'-x)+y(b'-y)+z(c'-z)=0,\ \text{oder}\ a'x+b'y+c'z=r'^2.$$

Hieraus folgt

$$z=\frac{r^2-ax-by}{c}=\frac{r^2-a'x-b'y}{c'},$$

also $y = \frac{(c' - c) r^2 - (ac' - a'c) x}{bc' - b'c}$,

$z = \frac{(b - b') r^2 + (b'a - a'b) x}{bc' - b'c}$,

und endlich zur Bestimmung von x

$(bc' - b'c)^2 r^2 = x^2 (bc' - b'c)^2 + r^4 (b - b')^2 + r^4 (c' - c)^2$
$+ 2xr^2 ((a + a')(bb' + cc') - a(b'^2 + c'^2) - a'(b^2 + c^2)) + x^2 (b'a - a'b)^2 + x^2 (c'a - ca')^2$.

Um die Bestimmung zu erleichtern, sei die Abscissenlinie durch einen der beiden gegebnen Puncte gezogen, so daſs $b = c = 0$ ist; dann hätte man als Bedingungsgleichungen $ax = r^2$,
und $a'x + b'y + c'z = r^2$.

Die erstere giebt $x = \frac{r^2}{a}$, also die zweite

$$\frac{a'r^2}{a} + b'y + c'z = r^2, \text{ das ist } z = \frac{r^2 (a - a')}{ac'} - \frac{b'y}{c'},$$

und da auch $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, also nun

$$r^2 = \frac{r^4}{a^2} + y^2 + \frac{b'^2}{c'^2} y^2 - \frac{2b'r^2 (a - a') y}{ac'^2} + \frac{r^4 (a - a')^2}{a^2 c'^2}$$

sein soll,

$$y^2 - \frac{2b'r^2 y (a - a')}{a (b'^2 + c'^2)} = \frac{r^2 c'^2 - r^4 \left(\frac{c'^2 + (a - a')^2}{a^2} \right)}{(b'^2 + c'^2)}$$

oder $y = \frac{b'r^2 (a - a')}{a (b'^2 + c'^2)} \pm \frac{\sqrt{\{(a^2 - r^2)(b'^2 + c'^2) - r^2 (a - a')^2\}}\, rc'}{a (b'^2 + c'^2)}$,

und $z = \frac{r^2 c' (a - a')}{a (b'^2 + c'^2)} \mp \frac{r \cdot b'}{a (b'^2 + c'^2)} \sqrt{\{(a^2 - r^2)(b'^2 + c'^2) - r^2 (a - a')^2\}}$

257. Wir können diese, hier ganz analytisch abgeleitete Bestimmung auch durch eine geometrische Betrachtung finden. Es läſst sich nämlich leicht übersehen, daſs die beiden Berührungspuncte da liegen müssen, wo die beiden Kreise sich schneiden, in welchen die Berührungen statt finden würden, wenn nur entweder der eine oder der andere Punct, durch welchen die Berührungs-Ebne gehen soll, gegeben wäre. Die Ebne des einen Kreises steht da auf der Abscissenlinie senkrecht, wo $x = \frac{r^2}{a}$ ist, die Ebne des andern steht auf der nach dem zweiten Puncte hin gezognen Linie $= \sqrt{(a'^2 + b'^2 + c'^2)}$, da senkrecht, wo der Abstand vom Mittelpuncte $= \frac{r^2}{\sqrt{(a'^2 + b'^2 + c'^2)}}$ ist. Die Neigung dieser Linie gegen die Abscissen-Ebne sei $= \mathfrak{C}$, so ist

$tang\,\beta = \frac{c'}{\sqrt{(a'^2+b'^2)}}$; der Winkel, welchen ihre Projection mit der Abscissenlinie macht, sei $=\alpha$, so ist $tang\,\alpha = \frac{b'}{a'}$.

Um nun den Werth von y für den Punct zu finden, wo die beiden Kreise sich schneiden, suche ich ihre Projection auf der Abscissen-Ebne. Die Projection des einen ist eine auf x senkrechte grade Linie, wie wir schon wissen. Die Projection des andern ist eine Ellipse deren halbe groſse Axe, senkrecht auf die Projection der unter dem Winkel α gegen die Abscissenlinie geneigten Linie, dem Halbmesser des Kreises gleich

$$= \sqrt{\left(r^2 - \frac{r^4}{a'^2+b'^2+c'^2}\right)} = r\sqrt{\left\{\frac{a'^2+b'^2+c'^2-r^2}{a'^2+b'^2+c'^2}\right\}}$$

ist, und deren halbe kleine Axe gleich der halben groſsen Axe multiplicirt mit $Sin\,\beta$ ist, also $= \frac{rc'\sqrt{(a'^2+b'^2+c'^2-r^2)}}{a'^2+b'^2+c'^2}$; ihr Mittelpunct liegt auf der Projection, in dem Abstande $= \frac{r^2 \,.\, Cos\,\beta}{\sqrt{(a'^2+b'^2+c'^2)}} = \frac{r^2\sqrt{(a'^2+b'^2)}}{(a'^2+b'^2+c'^2)}$ vom Mittelpuncte der Kugel. Diese Ellipse würde also durch eine Gleichung zwischen Abscissen $= s$ vom Mittelpuncte der Kugel an und Ordinaten $= t$ darauf senkrecht so bestimmt, daſs

$$\left(s - \frac{r^2\sqrt{(a'^2+b'^2)}}{a'^2+b'^2+c'^2}\right)^2 = \frac{c'^2}{a'^2+b'^2+c'^2}\left\{\frac{r^2(a'^2+b'^2+c'^2-r^2)}{(a'^2+b'^2+c'^2)} - t^2\right\}$$

oder

$$s^2 - \frac{2sr^2\sqrt{(a'^2+b'^2)}}{a'^2+b'^2+c'^2} + \frac{r^4(a'^2+b'^2)}{(a'^2+b'^2+c'^2)^2} = \frac{r^2c'^2 - t^2c'^2}{a'^2+b'^2+c'^2} - \frac{r^4c'}{(a'^2+b'^2+c'^2)^2};$$

$$\text{oder } s^2 - \frac{2sr^2\sqrt{(a'^2+b'^2)}}{a'^2+b'^2+c'^2} = \frac{r^2c'^2 - t^2c'^2 - r^4}{a'^2+b'^2+c'^2};$$

Um diese Gleichung auf x und y zurückzuführen, haben wir

$$s = x\,Cos\,\alpha + y\,Sin\,\alpha = \frac{a'x+b'y}{\sqrt{(a'^2+b'^2)}}$$

$$t = x\,Sin\,\alpha - y\,Cos\,\alpha = \frac{b'x-a'y}{\sqrt{(a'^2+b'^2)}}$$

$$\text{also } \frac{(a'x+b'y)^2}{a'^2+b'^2} - \frac{2r^2(a'x+b'y)}{a'^2+b'^2+c'^2} = \frac{r^2c'^2-r^4}{a'^2+b'^2+c'^2} - \frac{c'^2(b'x-a'y)^2}{(a'^2+b'^2+c'^2)(a'^2+b'^2)}$$

$$\text{oder } (a'x+b'y)^2 + c'^2(x^2+y^2) - 2r^2(a'x+b'y) + r^4 = r^2c'^2$$

$$\text{oder } (a'x+b'y-r^2) = c'\sqrt{(r^2-x^2-y^2)}.$$

oder $y^2(b'^2+c'^2)+2y(a'b'x-r^2b')=r^2c'^2-r^4-c'^2x^2-a'^2x^2+2r^2a'x$

$$y=\frac{b'(r^2-a'x)}{b'^2+c'^2}\pm\surd\left\{\frac{c'^2(r^2-x^2)-(a'x-r^2)^2}{b'^2+c'^2}+\frac{b'^2(r^2-a'x)^2}{(b'^2+c'^2)^2}\right\}.$$

Da es uns hier nur daran liegt, den Werth zu finden, welchen y erhält, wenn $x=\frac{r^2}{a}$ ist, das ist, denjenigen Werth von y, welcher dem Durchschnittspuncte beider Projectionen entspricht, so setze ich diesen Werth für x und erhalte dann

$$y=\frac{b'r^2(a-a')}{a(b'^2+c'^2)}\pm\frac{c'r}{a(b'^2+c'^2)}\surd\left\{(a^2-r^2)(b'^2+c'^2)-r^2(a-a')^2\right\}$$

genau so wie im vorigen §.

258. Es erhellt, dafs hier Fälle vorkommen können, wo es keinen Berührungspunct giebt, nämlich wenn die zwischen den beiden gegebnen Puncten gezogne grade Linie die Kugelfläche schneidet. Dieses wird unstreitig durch ein Unmöglichwerden der Wurzelgröfse angegeben, oder dadurch dafs

$$a^2(b'^2+c'^2)<r^2(b'^2+c'^2+(a-a')^2)\text{ ist;}$$

aber $\surd(b'^2+c'^2+(a'-a)^2)=f$ ist der Abstand der beiden gegebnen Puncte von einander; $\surd(b'^2+c'^2)=g$, ist der senkrechte Abstand des zweiten Punctes von der durch den Mittelpunct und den ersten Punct gezognen Linie. So lange also r nicht gröfser ist als die vierte Proportionallinie zu f, g, a, so lange findet eine Berührung statt. Die Richtigkeit dieses Satzes läfst sich geometrisch zeigen. Legt man nämlich (Fig. 69.) eine Ebne durch den Mittelpunct C der Kugel, den ersten gegebnen Punct A und den zweiten gegebnen Punct B so ist $CA=a$, $AB=f$, $BD=g$, und die Figur stellt die vierte Proportionallinie $\frac{ag}{f}=AE$ dar, wenn man AE senkrecht auf AB und CE senkrecht auf AE zieht. AE ist der senkrechte Abstand des Mittelpunctes C von der zwischen beiden gegebnen Puncten gezognen graden Linie, und r mufs nothwendig kleiner als AE sein, damit nicht AB die Kugel schneide, und die Möglichkeit der Berührung aufhöre.

259. Aufgabe. Es sind zwei krumme Flächen durch die Gleichungen $U=0$ und $V=0$ gegeben, man sucht die Puncte, wo eine Ebne, die zugleich durch einen gegebnen Punct gehen soll, sie beide zugleich berühren kann.

Auflösung. Wenn x, y, z die Coordinaten des Berührungspunctes der ersten Fläche, x', y', z' die Coordinaten des Berührungspunctes der zweiten Fläche sind: so erhalten wir (§. 244.) zwei Gleichungen für die gesuchte berührende Ebne, nämlich

$$\left(\frac{dU}{dx}\right)(u-x)+\left(\frac{dU}{dy}\right)(v-y)+\left(\frac{dU}{dz}\right)(w-z)=0,$$

und $$\left(\frac{dV}{dx'}\right)(u-x')+\left(\frac{dV}{dy'}\right)(v-y')+\left(\frac{dV}{dz'}\right)(w-z')=0.$$

Da nun die Tangente des Winkels $=\eta$, welchen die Durchschnittslinie der Berührungs-Ebne und der Abscissen-Ebne mit der Abscissenlinie macht, durch $\frac{\left(\frac{dU}{dx}\right)}{\left(\frac{dU}{dy}\right)}$ und auch durch $\frac{\left(\frac{dV}{dx'}\right)}{\left(\frac{dV}{dy'}\right)}$ bestimmt wird, so müssen diese Quotienten gleich sein, wenn sie auf die beiden Berührungspuncte bezogen werden. Zugleich wird die Tangente des Neigungswinkels durch

$$-\surd(1+tang^2.\eta).\frac{\left(\frac{dU}{dy}\right)}{\left(\frac{dU}{dz}\right)} \text{ und auch durch } -\surd(1+tang^2\eta.)\frac{\left(\frac{dV}{dy'}\right)}{\left(\frac{dV}{dz'}\right)}$$

ausgedrückt, und es muſs folglich auch $\left(\frac{dU}{dy}\right)\left(\frac{dV}{dz'}\right)=\left(\frac{dU}{dz}\right)\left(\frac{dV}{dy'}\right)$ sein in Beziehung auf die Berührungspuncte.

Diese beiden Bestimmungen ergeben aber bloſs eine Parallelität der Berührungs-Ebnen an beiden Puncten, damit beide Ebnen in e i n e zusammenfallen, muſs auch noch die Abscisse des Punctes, wo beide Ebnen die Abscissenlinie schneiden, eine und dieselbe sein; diese aber ist

$$u=x+y\frac{\left(\frac{dU}{dy}\right)}{\left(\frac{dU}{dx}\right)}+z\frac{\left(\frac{dU}{dz}\right)}{\left(\frac{dU}{dx}\right)},$$

und auch $$u=x'+y'\frac{\left(\frac{dV}{dy'}\right)}{\left(\frac{dV}{dx'}\right)}+z'\frac{\left(\frac{dV}{dz'}\right)}{\left(\frac{dV}{dx'}\right)},$$

also eine dritte Gleichung, welche auſser den Gleichungen $U=0$, $V=0$ statt finden muſs.

Kömmt zu diesen fünf Bestimmungen noch die sechste hinzu, daſs die Berührungs-Ebne durch den vermittelst der Coordinaten a, b, c gegebnen Punct gehen soll, also

$$\left(\frac{dU}{dx}\right)(a-x)+\left(\frac{dU}{dy}\right)(b-y)+\left(\frac{dU}{dz}\right)(c-z)=0$$

sein soll, so haben wir sechs Gleichungen zur Bestimmung der sechs Coordinaten x, y, z, x', y', z', beider Berührungspuncte.

260. Beispiel. Die beiden gegebnen Flächen sind zwei Kugelflächen, deren Mittelpuncte auf der Abscissenlinie liegen.

Es sei $U=0=r^2-x^2-y^2-z^2$, die Gleichung für die eine; $V=0=R^2-(x'-f)^2-y'^2-z'^2$, die Gleichung für die andre Kugelfläche. Dann ist

$$\frac{\left(\frac{dU}{dx}\right)}{\left(\frac{dU}{dy}\right)}=\frac{x}{y};\quad \frac{\left(\frac{dV}{dx'}\right)}{\left(\frac{dV}{dy'}\right)}=\frac{(x'-f)}{y'};\quad \frac{\left(\frac{dU}{dz}\right)}{\left(\frac{dU}{dy}\right)}=\frac{z}{y} \text{ und } \frac{\left(\frac{dV}{dz'}\right)}{\left(\frac{dV}{dy'}\right)}=\frac{z'}{y'};$$

also muſs $\frac{x}{y}=\frac{x'-f}{y'}$, und $\frac{z}{y}=\frac{z'}{y'}$ sein, als die zwei Bedingungsgleichungen, welche sich in Worten so aussprechen lassen, daſs die Berührungs-Ebnen parallel sind, wenn man ähnlich liegende Puncte beider Kugelflächen nimmt.

Diese beiden Bedingungsgleichungen geben

$$x'-f=y'\left(\frac{x}{y}\right);\ z'=y'.\frac{z}{y}, \text{ also}$$

$$R^2=y'^2\left\{\frac{x^2}{y^2}+1+\frac{z^2}{y^2}\right\}=\frac{y'^2 r^2}{y^2};\ \text{ oder } y'=\pm\frac{y.R}{r},$$

so daſs alle Coordinaten des zweiten Berührungspunctes bekannt sind, sobald man den ersten Berührungspunct kennt. Es soll nun aber auch

$$x\left(\frac{dU}{dx}\right)+y\left(\frac{dU}{dy}\right)+z\left(\frac{dU}{dz}\right)=\frac{\left(\frac{dU}{dx}\right)}{\left(\frac{dV}{dx'}\right)}\left(x'\left(\frac{dV}{dx'}\right)+y'\left(\frac{dV}{dy'}\right)+z'\left(\frac{dV}{dz'}\right)\right)$$

sein, das ist

$$x^2+y^2+z^2=\frac{x}{(x'-f)}(x'(x'-f)+y'^2+z'^2),$$

$$\text{oder } r^2=\frac{x}{(x'-f)}(f(x'-f)+R^2)=fx+\frac{R^2x}{x'-f},$$

oder da $x'-f=\pm\frac{Rx}{r}$ ist, auch

$$r^2 = fx \pm rR,$$
$$x = \frac{r}{f}(r \mp R).$$

Hier ist also x schon völlig bestimmt, ohne daſs der gegebne Punct dabei in Betrachtung kömmt und es erhellt leicht, daſs allemal die Berührungs-Ebne entweder den abgekürzten Kegel (Fig. 70.) $ABDC$ oder den Doppelkegel GIE, FIH berühren muſs.

Die letzte Bedingungsgleichung, welche sich auf den gegebnen Punct bezieht, giebt hier

$$x(a-x) + y(b-y) + z(c-z) = 0 \text{ oder}$$
$$r^2 = ax + by + cz,$$

und diese mit $z^2 = r^2 - x^2 - y^2$ verbunden, giebt

$$\left(\frac{r^2}{c} - \frac{ax}{c} - \frac{by}{c}\right)^2 = r^2 - x^2 - y^2,$$

eine Gleichung, die, weil x schon bekannt ist, y fest bestimmt.

Die Betrachtung behält ihre völlige Allgemeinheit, wenn ich $b=0$ setze, indem dieses bloſs heiſst, die auf die Abscissen-Ebne senkrechte Ebne, worin die x, z sich befinden, zugleich durch beider Kugeln Mittelpuncte und durch den gegebnen Punct legen; dann aber ist

$$y^2 = r^2 - x^2 - \frac{(r^2 - ax)^2}{c^2} = (r^2 - x^2) - \frac{\left(\frac{r^2}{a} - x\right)^2 a^2}{c^2},$$

$$\text{und } z^2 = \frac{(r^2 - ax)^2}{c^2}, \text{ oder } z = \frac{r^2 - ax}{c}.$$

Was diese Werthe andeuten, läſst sich leicht in einer Construction nachweisen. Was nämlich x betrifft, so ist der eine Werth $KL = x$ (in Fig. 70.) durch die Proportion $AM : BM = BK : KL$ oder $f : r - R = r : x$ bestimmt, der andre Werth KN durch die Proportion $KP : KF + PE = KF : KN$. In Beziehung auf die beiden übrigen Gröſsen will ich nur den letzten Fall näher betrachten, indem die Anwendung auf den ersten alsdann leicht ist; es ist also $KN = x$, und offenbar $KI = \frac{r^2}{x}$, daher der in unsrer Formel angegebne Werth von z durch die Proportion $c : \frac{r^2}{x} - a = x : z$ oder $c : KI - a = KN : z$ ausgedrückt. Ist also S der gegebne Punct und stellt die Ebne der Tafel diejenige Ebne vor, in welcher die x mit KP parallel, die z darauf senkrecht genommen sind, so ist $KQ = a$, $QS = c$, also soll $QS : QI = KN : z$ sein,

und man findet $z = NT$, wenn man KT so zieht, dafs KT auf SI senkrecht sei; dann liegt also senkrecht über T der Berührungspunct. Die Berührnng wird unmöglich, wenn S innerhalb des Winkels KIH läge.

261. Bemerkung. Eine ganz ähnliche Reihe von Aufgaben liefse sich für die Normallinie aufstellen, zum Beispiel: Es ist ein Punct gegeben, man sucht die Coordinaten des Punctes einer gegebnen krummen Fläche, gegen welchen sich von jenem aus eine Normallinie an die krumme Fläche ziehen läfst; — oder: Es sind zwei krumme Flächen gegeben; man sucht die zwei Puncte auf denselben, welche von derselben graden Linie als Normallinie getroffen werden. Diese und ähnliche Aufgaben lassen sich nach Anleitung des vorigen leicht auflösen; ich verweile daher nur bei einer derselben, um sie nach einer andern Methode aufzulösen.

262. Aufgabe. Es ist ein Punct gegeben, man sucht auf einer gegebenen krummen Fläche den Punct, wo eine durch jenen gezogne Linie die Fläche senkrecht trifft.

Auflösung. Es sei $U = 0$ die Gleichung für die krumme Fläche, also $dU = \left(\frac{dU}{dx}\right)dx + \left(\frac{dU}{dy}\right)dy + \left(\frac{dU}{dz}\right)dz = 0$ die Differentialgleichung. Sind nun a, b, c die drei Coordinaten des gegebnen Punctes, x, y, z die drei Coordinaten des gesuchten Punctes, so ist
$v^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$, das Quadrat des Abstandes beider von einander. Dieser Abstand mufs ein Gröfstes oder Kleinstes sein, wenn die Linie eine Normallinie ist; dann also ist
$(x-a)\,dx + (y-b)\,dy + (z-c)\,dz = 0$, als Bedingungsgleichung, welcher Genüge geschehn mufs, wenn die Linie eine Normallinie sein soll. Um hier die Projection auf die Ebne x, y zu finden, müssen wir überlegen, dafs bei unveränderlichem z, sich $\left(\frac{dU}{dx}\right)dx + \left(\frac{dU}{dy}\right)dy = 0$

und $(x-a)\,dx + (y-b)\,dy = 0$, finden mufs, also

$$\frac{(x-a)}{y-b} = \frac{\left(\frac{dU}{dx}\right)}{\left(\frac{dU}{dy}\right)} \text{ oder } (x-a)\left(\frac{dU}{dy}\right) - (y-b)\left(\frac{dU}{dx}\right) = 0$$

als Gleichung für diese Projection, wie sich aus §. 248. ebenfalls finden würde. Die übrigen Projectionen werden ebenso bestimmt.

Von der Bestimmung der gröſsten und kleinsten Werthe der Coordinaten.

263. Bemerkung. Wenn die Ordinate z einer krummen Fläche durch x und y ausgedrückt ist, so deutet das Verschwinden des einen partiellen Differentiales $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ an, daſs z nicht wächst, obgleich x sich ändert, und daſs man also in einem solchen Puncte eine mit x parallele Berührungslinie an die krumme Fläche ziehen kann. Dieses ist zum Beispiel in jedem Puncte der Cylinderfläche der Fall, wenn x mit des Cylinders Axe parallel ist. — Eben dieses in Beziehung auf y gilt für $\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0$. Wenn aber beide partielle Differentiale zugleich verschwinden, so ist ganz gewiſs jede an diesen Punct gezogne Berührungslinie, und folglich die an demselben berührende Ebne, mit der Ebne der Coordinaten x, y parallel.

264. Bemerkung. In sehr vielen Fällen ist in einem solchen Puncte nun auch die Ordinate z ein Gröſstes oder Kleinstes, jedoch hängt dieses hier noch von einem Umstande ab, der bei krummen Linien nicht vorkam. Dort nämlich, wo z nur die Function einer Gröſse war, gab das Taylorsche Theorem

$$z + \Delta z = z + \frac{dz}{dx}\Delta x + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{d^2 z}{dx^2}\Delta x^2 + \tfrac{1}{6}\frac{d^3 z}{dx^3}\Delta x^3 + \text{etc.}$$

wo allemal, wenn $\frac{dz}{dx} = 0$ ist, das folgende Glied einerlei Zeichen erhält für positive und negative Δx und daher der damit zusammen gehörende Werth von z nur dann kein Gröſstes oder Kleinstes wurde, wenn $\frac{d^2 z}{dx^2}$ ebenfalls $= 0$ war; hier hingegen erhalten nicht nothwendig alle Glieder der zweiten Ordnung einerlei Zeichen für positive und negative Differenzen der beiden Gröſsen, von denen z abhängt. Hier nämlich ist (Lacroix traité élem. §. 132.)

$$\begin{aligned} z + \Delta z = z &+ \left(\frac{dz}{dx}\right)\Delta x + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)\Delta x^2 \quad &&+ \tfrac{1}{6}\left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right)\Delta x^3 + \\ &+ \left(\frac{dz}{dy}\right)\Delta y + \left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right)\Delta x\,\Delta y &&+ \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^3 z}{dx^2 . dy}\right)\Delta x^2\,\Delta y + \\ &\qquad + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right)\Delta y^2 &&+ \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2 z}{dx . dy^2}\right)\Delta x\,\Delta y^2 + \\ & &&+ \tfrac{1}{6}\left(\frac{d^3 z}{dy^3}\right)\Delta y^3 + \end{aligned}$$

und da offenbar das Glied $\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right)\Delta x\,\Delta y$ sein Zeichen nicht ungeändert behält für jeden Werth der Differenzen, so kann auch das ganze Glied der zweiten Ordnung in manchen Fällen aus $+$ in $-$ übergehn.

265. Lehrsatz. Die Ordinate z krummer Flächen hat nur da einen gröfsten oder kleinsten Werth, wo $\left(\frac{dz}{dx}\right)=0$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)=0$ ist, und zugleich die Gleichung $\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)\Delta x^2+2\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right)\Delta x\Delta y+\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right)\Delta y^2=0$, keine mögliche Wurzeln hat.

Beweis. Wenn eine Function $Au^2+2Bu+C^2=0$ keine mögliche Wurzeln hat, so behält die Summe aller Glieder immer einerlei Zeichen, welchen Werth man auch u beilegen mag, und eben dieses ist daher für die im Lehrsatz angegebne Gleichung der Fall, man mag $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ wie man will annehmen. In diesem Falle erhält also z einen gröfsten Werth, wenn die Summe dieser Glieder immer negativ ist, einen kleinsten Werth, wenn sie immer positiv ist.

266. Beispiel. Für die drei ersten Arten der Flächen zweiter Ordnung war $z^2=f^2+lx^2+my^2$,

also $\left(\frac{dz}{dx}\right)=\frac{lx}{z}$; $\left(\frac{dz}{dy}\right)=\frac{my}{z}$;

$$\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)=\frac{l}{z}-\frac{lx}{z^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)=\frac{l}{z^3}(z^2-lx^2),$$

$$\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right)=-\frac{lx}{z^2}\left(\frac{dz}{dy}\right)=-\frac{mlxy}{z^3};$$

$$\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right)=\frac{m}{z^3}(z^2-my^2).$$

Wenn $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ verschwinden sollen, so mufs $x=y=0$ sein, also $z=f$, und dann wird das zweite Glied der Differenzreihe

$\frac{l}{z}\Delta x^2+\frac{m}{z}\Delta y^2$. Dieses Glied behält für jeden Werth der Differenzen einerlei Zeichen, wenn l und m entweder beide positiv oder beide negativ sind; haben sie aber entgegengesetzte Zeichen, so kann, je nachdem man das Verhältnifs der Werthe von Δx, Δy wählt, die Summe aus dem Positiven ins Negative übergehn. Für das elliptische Ellipsoid und das elliptische Hyperboloid ist also (1. Th. §. 712.) $z=f$ ein Gröfstes oder Kleinstes; ein Gröfstes für das erstere, wo l, m negativ sind, ein Kleinstes für das letztere, wo beide

positiv sind. Im hyperbolischen Ellipsoid dagegen ist (1. Theil Figur 192.) wenn ich die z mit CG parallel nehme $z = f = CG$ weder ein Gröſstes noch ein Kleinstes, sondern die Ebne, welche in G eine berührende heiſsen muſs, weil sie drei unendlich nahe an einander liegende Puncte mit der krummen Fläche gemein hat, schneidet zugleich die krumme Fläche, indem der ganze Schnitt NGO rechts, der ganze Schnitt MGK links von dieser Ebne liegt. Die Summe $l\Delta x^2 + m\Delta y^2$ wird nämlich, wenn m negativ ist, nur solange positiv als $\Delta y^2 < \frac{l}{m}\Delta x^2$ ist, und hiemit ist zugleich die Richtung der graden Linien gegeben, in welchen jene Ebne die krumme Fläche schneidet.

267. **Beispiel.** Für die fünfte Fläche der zweiten Ordnung oder das hyperbolische Paraboloid hatten wir die Gleichung (1. Theil §. 733.) $mv^2 - nw^2 = au$; wollen wir also untersuchen, ob u gröſste oder kleinste Werthe erhalten könne, so müssen wir $\left(\frac{du}{dv}\right) = \frac{2mv}{a}$,
$\left(\frac{du}{dw}\right) = -\frac{2nw}{a}$; $\left(\frac{d^2u}{dv^2}\right) = \frac{2m}{a}$; $\left(\frac{d^2u}{dw^2}\right) = -\frac{2n}{a}$, $\left(\frac{d^2u}{dv.dw}\right) = 0$, suchen. Damit nun u ein Gröſstes oder Kleinstes sei, muſs also $w = v = 0$ sein und zugleich müſste $m\Delta v^2 - n\Delta w^2$ immer einerlei Zeichen behalten, was aber nicht der Fall ist. (Vgl. 1. Th. §. 753.) Um zu sehen, ob v einen gröſsten oder kleinsten Werth erhalten kann, müssen wir
$\left(\frac{dv}{du}\right) = \frac{a}{2mv} = 0$ und $\left(\frac{dv}{dw}\right) = \frac{nw}{mv} = 0$ setzen. Dieses findet nur für $v = \infty$ statt, und die Betrachtung läſst sich also hier nicht weiter anwenden.

268. **Bemerkung.** Im Allgemeinen erhellt hieraus, daſs da wo kein Gröſstes oder Kleinstes vorkömmt, obgleich die Berührungs-Ebne senkrecht auf die eine Ordinate ist, dieses darum geschieht, weil die berührende Ebne zugleich eine schneidende ist. Uebrigens erhellt nun leicht, daſs da, wo das ganze zweite Glied $= 0$ würde, hier ebenso wenig, als bei den krummen Linien ein Gröſstes oder Kleinstes vorhanden sein könnte, wenn nicht zugleich alle Glieder der dritten Ordnung verschwänden.

Von den Asymptoten krummer Flächen.

269. **Bemerkung.** Die Bestimmung der asymptotischen Flächen, die sich an gegebne krumme Flächen um desto enger anschlieſsen, je weiter man auf ihnen fortgeht, läſst sich nicht auf dem Wege erreichen, auf welchem wir zur Kenntniſs der Asymptoten bei Linien gelangten. Wollten wir versuchen,

auch hier blofs durch die Betrachtung des höchsten Gliedes der Gleichung unsern Zweck zu erreichen, so stellt sich uns sogleich eine grofse Schwierigkeit entgegen, die ich nur an dem leichtesten Falle erörtern will, wo das höchste Glied einen einzigen möglichen einfachen Factor hat. Wenn in der Gleichung für eine Curve dieser Fall eintritt, so kann man vermittelst dieses Factors, von der Form $\alpha x + \beta z$, eine der veränderlichen Gröfsen ganz wegschaffen, und dann indem man für unendliche x, z, den Factor $= \lambda$ setzt, die beiden höchsten Glieder gegen einander aufheben, und λ bestimmen. Hier hingegen würde ein solcher Factor von der Form $\alpha x + \beta y + \gamma z$ sein, und eben die Anordnung der Rechnung, die wir dort anwandten, könnte im Allgemeinen nur dahin führen, eine der drei Gröfsen wegzuschaffen, wodurch aber bei weitem nicht immer eine solche Bestimmung aus den zwei höchsten Gliedern zu erhalten wäre, wie wir sie dort fanden. Betrachtungen, den bei Curven angewandten ähnlich, können in einzelnen Fällen zur Bestimmung asymptotischer Ebnen dienlich sein, aber einige Beispiele werden zeigen, dafs sie keine vollständige Entscheidung geben, ob die krumme Fläche in einem endlichen Raume eingeschlossen ist oder nicht, ob sie eine Ebne zur Asymptote hat oder nicht. Ich theile hier einige Lehrsätze mit, die dies näher übersehen lassen.

270. Lehrsatz. Wenn eine krumme Fläche in einem endlichen Raume enthalten ist, so hat das höchste Glied der für sie geltenden Gleichung gewifs keine einfache, mögliche Factoren; aber man darf nicht umgekehrt schliefsen, dafs eine Gleichung, deren höchstes Glied keine mögliche einfache Factoren hat, nothwendig einer im endlichen Raume begrenzten Fläche zugehöre.

Beweis. Wenn die Fläche ganz in einem endlichen Raume enthalten ist, so mufs ganz gewifs z unmöglich werden für unendliche x und y. Hätte aber das höchste Glied einen einfachen möglichen Factor $\alpha x + \beta y + \gamma z$, so würde es Querschnitte der Fläche geben, die gradlinige Asymptoten hätten, also sich ins Unendliche erstreckten; denn dann ist $\alpha x + \beta y$ ein Factor der von z unabhängigen Theile des höchsten Gliedes, also ein Factor in dem höchsten Gliede derjenigen Gleichung, welche für irgend einen mit x, y parallelen Querschnitt gilt.

Dagegen ist es offenbar, dafs das ganze höchste Glied gar wohl ohne mögliche einfache Factoren sein kann, während die von x und y allein abhängenden Glieder für sich allein betrachtet, solche einfache Factoren enthalten. Ist das letztere aber der Fall, so giebt es unendlich fortgehende Durchschnittscurven der Fläche, und die Fläche dehnt sich ins Unendliche aus, obgleich ihr ganzes höchstes Glied sich nicht so in Factoren zerlegen läfst, dafs ein möglicher einfacher Factor hervorgehe.

271. **Beispiel.** Die Gleichung $x^3 + y^3 + z^3 - a^3 = 0$, hat in ihrem höchsten Gliede keinen möglichen, einfachen Factor, aber wenn man für $z = h$ den mit x, y parallelen Querschnitt sucht, so ist seine Gleichung $x^3 + y^3 = a^3 - h^3$, und diese Curve hat eine durch $x = -y$ ausgedrückte gradlinige Asymptote. Und ebenso haben die mit x, z und mit y, z parallelen Schnitte Asymptoten.

272. **Lehrsatz.** Wenn die allgemeine Gleichung für zwei auf einander senkrechte Schnitte der krummen Fläche zeigt, dafs diese beiden Durchschnittslinien nie unendliche Aeste haben, so ist auch die krumme Fläche selbst ganz in einem endlichen Raume begrenzt.

Beweis. Wenn alle mit x, y paralleie Querschnitte begrenzte Curven sind, so erstreckt auch die Fläche sich nicht nach den Richtungen dieser beiden Coordinaten ins Unendliche hinaus; und wenn eben das für die mit x, z parallelen Schnitte statt findet, so ist gewifs die ganze Fläche im endlichen Raume begrenzt.

273. **Lehrsatz.** Betrachtet man in der Gleichung für die krumme Fläche eine der drei Coordinaten als eine beständige Gröfse und findet man dann, dafs das in Beziehung auf die beiden übrigen Coordinaten sich ergebende höchste Glied keine mögliche einfache Factoren hat; sieht man ebenso eine zweite Ordinate als beständig an und findet das in Beziehung auf die beiden andern Coordinaten genommene höchste Glied ohne mögliche einfache Factoren: so ist die Fläche in einem endlichen Raume begrenzt.

Der Beweis ist aus §. 272. klar.

274. **Beispiel.** Für das elliptische Ellipsoid ist $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, und da $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, und $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}$ Ausdrücke sind, die keine mögliche einfache Factoren enthalten, so zeigt die Gleichung, dafs diese Fläche im endlichen Raume begrenzt ist.

Beispiel. Es sei $x^4 + y^4 + x^2 z^2 + z^4 - a^2 y^2 + b^4 = 0$, so ist in Beziehung auf x, y das höchste Glied $x^4 + y^4$, in Beziehung auf x, z, das höchste Glied $x^4 + x^2 z^2 + z^4$, und beide haben keine mögliche einfache Factoren; die ganze Fläche ist also im endlichen Raume begrenzt.

Die mit x, y parallelen Querschnitte sind Linien der vierten Ordnung, die $y^2 = \frac{1}{2} a^2 \pm \sqrt{\{\frac{1}{4} a^4 - b^4 - x^4 - x^2 z^2 - z^4\}}$ geben und hier kann nicht x unendlich werden; dieselbe Gleichung zeigt, dafs z nicht unendlich sein darf.

275. **Aufgabe.** Wenn das in Beziehung auf zwei Coordinaten x, y genommene höchste Glied einen einzigen einfachen, möglichen Factor hat, die

Fläche zu bestimmen, die sich aus den hiedurch gefundenen Asymptotenlinien als asymptotische Fläche ergiebt.

Auflösung. Man betrachte die dritte Coordinate z als eine beständige Gröfse, und suche die Gleichung für die gradlinige Asymptote jener mit x, y parallelen Schnitte, so hat man nur nöthig, in der so gefundenen Gleichung für die Asymptote z als veränderlich anzusehen, um die Gleichung für die asymptotische Fläche oder den geometrischen Ort aller Asymptoten zu erhalten.

276. Beispiel. Es sei $x^3+y^3+z^3=f^3$, so hat x^3+y^3 den möglichen Factor $x+y$, und es ergiebt sich bald, dafs $x+y=0$ die Gleichung für die Asymptote jedes mit x, y parallelen Schnittes ist. Hier findet die Vorschrift, in dieser Gleichung z als veränderlich anzusehn, keine Anwendung, sondern die durch diese Asymptote auf die Ebne x, y senkrecht gesetzte Ebne ist eine Asymptoten-Ebne.

Nähme man nämlich auf dieser Asymptote die Abscisse u und senkrecht auf sie die Ordinaten v, so hätte man $\frac{(u+v)^3}{2\sqrt{2}}+\frac{(v-u)^3}{2\sqrt{2}}+z^3=f^3$, oder $\frac{3u^2v+v^3}{\sqrt{2}}=f^3-z^3$, und folglich für sehr kleine v, $v=\frac{(f^3-z^3)\sqrt{2}}{3u^2}$ welches erst für $u=\infty$ verschwindet. — Dafs aufserdem $v=0$ ist für $z=f$ gehört nicht in die Betrachtung der Asymptote.

Das Anschliefsen an diese Ebne wird immer langsamer, je gröfser $+z$ oder $-z$ wird; aber so lange man z endliche, wenn gleich sehr grofse Werthe beilegt, wird es doch so grofse u geben können, wobei $\frac{z^3}{u^2}$ über alle Grenzen klein wird. Jene Ebne hat also die Eigenschaft einer Asymptoten-Ebne allerdings in so fern als sie sich nach der Richtung der u hin an die krumme Fläche anschliefst; aber übersehn dürfen wir es gleichwohl auch nicht, dafs dieses Anschliefsen, da wo z sehr grofs wird, erst in den aller gröfsesten Entfernungen eintritt.

277. Beispiel. Es sei $xyz-y^3-x^2y-bx^2=0$, so ist $y=-b$, die Gleichung für die Asymptote und es ist also die mit x, z parallel in der Entfernung $y=-b$ gelegte Ebne eine Asymptote.

278. Beispiel. Es sei $yzx^2-ax^3-bxy^2+z^2y^2+c^4=0$ diese Gleichung, obwohl sie vom vierten Grade ist, hat doch in Beziehung auf zwei der veränderlichen Gröfsen nur ein höchstes Glied von der dritten Ordnung und in Beziehung auf x, y ist $x(ax^2+by^2-zxy)$ das höchste Glied, also $x=\lambda$ die Gleichung für die Asymptote eines Schnittes und $\lambda=\frac{+z^2}{b}$.

Hier ist also $bx - z^2 = 0$ die Gleichung für die sämmtlichen Asymptoten der mit x, y parallelen Schnitte, und diese Asymptoten liegen daher alle in einer parabolischen Cylinderfläche, die auf der Ebne der x, z senkrecht steht.

Hätte man in Beziehung auf z, x das höchste Glied gesucht, so wäre dieses $(yz - ax)x^2$, und vermöge des ersten Factors hätte man $yz - ax = \lambda^2$ als Gleichung für die Asymptote und dann $x^2 = \frac{-z^2y^2 + bxy^2 - c^4}{\lambda^2}$, oder bei der bloſsen Betrachtung des höchsten Gliedes, wenn x und z unendlich werden $x^2 = \frac{-a^2x^2}{\lambda^2}$; welches $a^2 + yz - ax = 0$, als Gleichung für alle jene gradlinigten Asymptoten giebt. Diese sämmtlichen Asymptoten also, welche den auf y senkrechten Querschnitten zugehören, liegen in einer Fläche der zweiten Ordnung, die folglich eine Asymptotische Fläche ist.

279. Bemerkung. Es erhellt wohl, daſs man auf diesem Wege auch dann den geometrischen Ort aller Asymptoten der parallelen Schnitte finden kann, wenn diese Asymptoten keine grade Linien sind. Dieser geometrische Ort oder die Fläche, worin alle diese Asymptoten liegen, kann unstreitig mit Recht eine Asymptotenfläche heiſsen, und kann allemal dazu dienen, die gegebne krumme Fläche näher kennen zu lernen. Aber da sehr oft der eine Querschnitt sich minder als der andre an die Asymptote anschlieſst, da bei unendlichem Zunehmen der dritten Coordinate diese Ungleichheit sehr bedeutend werden kann, so bedarf es immer noch einer nähern Untersuchung, wie die Asymptotenfläche sich an die gegebne Fläche anschlieſst, und die Frage, ob sich statt der so gefundenen Asymptotenflächen nicht noch bequemere angeben lieſsen, müſste im einzelnen Falle besonders untersucht werden.

Für diejenigen Flächen der zweiten Ordnung zum Beispiel, deren Gleichung $x^2 - my^2 - nz^2 = f^2r$ ist, würden wir zwei Asymptoten-Ebnen durch die Gleichungen $x + y\sqrt{m} = 0$ und $x - y\sqrt{m} = 0$, ausgedrückt erhalten, und wirklich sind diese Ebnen Asymptoten der im 1. Th. Fig. 193. dargestellten Fläche, denn die Asymptoten aller mit x, y parallelen Schnitte liegen in den hiedurch ausgedrückten Ebnen. Aber da die Scheitel der Hyperbeln, denen diese Asymptoten zugehören, ins Unendliche hinauf rücken, so erscheinen diese Ebnen nicht als die passendsten Asymptoten, sondern der elliptische Kegel, der jene Asymptoten-Ebnen berührt, würde uns weit bequemer die Beschaffenheit der unendlich fortgeführten Fläche übersehen lassen. Es lieſsen sich nun auch wohl die Hülfsmittel angeben, durch welche wir in dem eben erwähnten Falle von den Asymptoten-Ebnen, deren sich eine ganze Folge ergiebt, zu der Kegelfläche, deren Tangenten sie sind, gelangen können;

aber die Betrachtung dieses einzelnen Falles führt zu keinen allgemeinen Regeln. Ich begnüge mich daher, hier nur noch eine andre Untersuchung beizufügen, nämlich die Anleitung zur Beantwortung der Frage, ob eine gegebne krumme Fläche sich an eine Cylinderfläche oder Kegelfläche irgend einer Art anschliefse.

280. Erklärung. Es ist aber nothwendig zu bemerken, dafs wir unter Cylinderflächen hier alle diejenigen verstehen, die von jeder Berührungs-Ebne in parallelen Linien berührt werden, oder auf welchen man durch jeden in der krummen Fläche liegenden Punct eine grade, ganz in der Oberfläche liegende Linie ziehen kann, die mit allen andern in der Oberfläche liegenden graden Linien parallel ist.

Ebenso verstehen wir unter Kegelflächen alle die, welche von ihren sämmtlichen Berührungs-Ebnen in graden Linien berührt werden, die sich alle in demselben Puncte durchschneiden.

Jene können angesehn werden, als ob sie entständen, indem man eine grade Linie immer mit sich selbst parallel, übrigens auf willkürliche Weise oder einer gegebnen Curve als Richtungslinie folgend, fortführt. Diese können angesehen werden, als entstehend durch die Bewegung einer graden, in einem Puncte festgehaltenen Linie.

Die verschiedenen krummen Linien, in welchen man einen Punct jener graden parallel bleibenden Linie fortführt, bestimmen die Grundfläche des Cylinders; und die krumme Linie, an welche die in einem Puncte festgehaltne grade Linie sich bei ihrer Fortbewegung anlehnt, bestimmt die Grundfläche des Kegels.

281. Lehrsatz. Alle Cylinderflächen sind in der Gleichung $y - mz = funct:(x - nz)$ enthalten.

Beweis. Wenn man die grade Linie, welche durch ein mit ihrer anfänglichen Lage paralleles Fortrücken die Cylinderfläche beschreibt, durch ihre beiden Projectionen auf die Ebne x, z und auf die Ebne y, z bestimmt, so stellen diese Projectionen für die verschiedenen Lagen eine Folge von Parallellinien dar. Ist also $y - mz = a$ die Gleichung für die eine Projection, so behält m für alle Lagen der die Cylinderfläche beschreibenden Linie einerlei Werth, und nur a wird bei jeder Lage anders. Ebenso ist in der Gleichung $x - nz = b$ für die zweite Projection n unveränderlich, b aber erhält nach und nach andre Werthe.

Für jede einzelne bestimmte Lage jener Linie hat a sowohl als b einen fest bestimmten Werth, dagegen ändern sich, weil die Linie parallel fortrücken soll, beide, wenn sich eine ändert. Das aber ist ja im Allgemeinen der Begriff der Function, dafs die abhängige Gröfse andre Werthe erhält, wenn die Gröfse, von welcher sie abhängt, eine Aenderung leidet, und es ist also

$b = funct:(a)$, oder $x - nz = funct:(y - mz)$, oder eben so gut $y - mz = funct:(x - nz)$.

Diese Gleichung umfaſst also alle Lagen der graden Linie, die parallel fortrückt, also alle Cylinderflächen.

282. Die Gleichung $y - mz = f:(x - nz)$, giebt auch

$y - \frac{m}{n}x = funct:(x - nz)$, also auch $y - mz = Funct:(ny - mx)$.

Setzt man nämlich $x - nz = u$, also $mz = \frac{m}{n}(x - u)$, so sollte $\left(y - \frac{m}{n}x\right) + \frac{m}{n}u = funct:(u)$ sein, oder da $-\frac{m}{n}u + funct:(u)$ selbst eine Function von u ist, $y - \frac{m}{n}x =$ einer Function von u oder von $x - nz$.

283. **Lehrsatz.** Alle Kegelflächen sind in der Gleichung $\frac{y-b}{z-c} = funct:\left(\frac{x-a}{z-c}\right)$ enthalten.

Beweis. Wenn $x = a$, $y = b$, $z = c$ die drei Coordinaten der Kegelspitze sind, so geht allemal die auf der Ebne x, z gezeichnete Projection der Linie, welche die Kegelfläche beschreibt, durch den Punct, dessen Coordinaten a, c sind, ihre allgemeine Gleichung ist also $z - c = (x - a)\,tang.\,\zeta$. oder $\frac{x-a}{z-c} = Cotang\,\zeta$, wenn ζ der Winkel ist, welchen die Projection mit x macht. Ebenso ist $z - c = (y - b)\,tang\,\eta$, in der zweiten Projection oder $\frac{y-b}{z-c} = Cotang\,\eta$.

Bei einer bestimmten Lage der Linie, welche die Kegelfläche beschreibt, hat η sowohl als ζ einen bestimmten Werth, dagegen ändern sie sich im Allgemeinen beide, wenn die Lage der Linie sich ändert, und es ist daher $Cotang\,\eta = funct:(Cotang\,\zeta)$, welches eben die für alle Kegelflächen angegebne Gleichung ist.

284. Aus $\frac{y-b}{z-c} = funct:\left(\frac{x-a}{z-c}\right)$ folgt auch,

$\frac{x-a}{y-b} = Funct:\left(\frac{z-c}{x-a}\right)$. Es sei nämlich $\frac{x-a}{z-c} = u$, so geht $\frac{y-b}{z-c} = funct:(u)$ in $\frac{(y-b).u}{x-a} = funct:(u)$ über; aber $\frac{1}{u}.funct:(u)$ ist

selbst eine Function von u, also $\frac{y-b}{x-a}$ = einer Funct. von $\left(\frac{x-a}{z-c}\right)$ oder von $\frac{z-c}{x-a}$. Aber die Form der Function, welche $\frac{x-a}{y-b}$ durch $\frac{z-c}{x-a}$ ausdrückt, ist eine andre als der Function, welche $\frac{y-b}{z-c}$ durch $\frac{x-a}{z-c}$ darstellt.

Wäre zum Beispiel $\frac{y-b}{z-c} = m\left(\frac{x-a}{z-c}\right)^2$, so ist $\frac{y-b}{x-a} = m\left(\frac{x-a}{z-c}\right)$.

285. Beispiel. Die Gleichung für den hyperbolischen Cylinder $my^2 - nz^2 = b^2$, paſst allerdings unter die Form $\gamma x - \alpha z = funct : (y - \beta z)$. Es sei nämlich $\gamma = 0$ und $\beta = 0$, so ist $-\alpha z = f : (y)$, oder $z = funct : y$, und in der That ist $z = \sqrt{\frac{my^2 - b^2}{n}}$ eine bloſse Function von y und beständigen Gröſsen.

286. Beispiel. Die Gleichung

$$(x+mz)^2 (y+nz)^2 = \{b^2 - (y+nz)^2\} . \{a - y - nz\}^2$$

gehört einer Cylindrischen Fläche. Es erhellt nämlich sogleich, daſs

$$(x+mz)^2 = \left(\frac{b^2}{(y+nz)^2} - 1\right)(a - (y+nz))^2$$

also $= funct\ (y+nz)$ ist.

Diese Gleichung gehört einem schiefen, über der Conchoide (1. Th. §. 469.) errichteten Cylinder, dessen Axe unter dem Winkel $= \vartheta$, dessen *Cotangente* $= \sqrt{(m^2+n^2)}$ gegen die Abscissen-Ebne geneigt ist, und eine solche Lage hat, daſs ihre Projection mit den Abscissen x einen Winkel macht, dessen Tangente $tang. \eta = \frac{n}{m}$ ist.

287. Beispiel. Für die gewöhnliche Kegelfläche ist $x^2 = (h-z)^2\, tang^2\, \beta - y^2$. Um diese Gleichung mit der allgemeinen Form $\frac{x-a}{y-b} = funct : \left(\frac{z-c}{x-a}\right)$ zu vergleichen, setze ich zuerst $a = 0$, und erhalte dann

$$x^2 = (y-b)^2 \left(f : \left(\frac{z-c}{x}\right)\right) = -(y-(h-z)\,tg\,\beta)(y+(h-z)\,tg\,\beta).$$

Es sei $\frac{z-c}{x}$ oder $\frac{z-c}{\sqrt{((h-z)^2\, tang^2\, \beta - y^2)}} = u$,

also $y^2 = (h-z)^2\, tang^2\, \beta - \frac{(z-c)^2}{u^2}$, so wird

$$x = \left(-b + \sqrt{\left[(h-z)^2 \, tang^2 \, 6 - \frac{(z-c)^2}{u^2}\right]} f : u = \frac{z-c}{u}\right).$$

Setze ich also hier $b = 0$ und $c = h$, so wäre

$$(z-h)\sqrt{\left(tang^2 \, 6 - \frac{1}{u^2}\right)} f : u = \frac{z-h}{u}$$

oder $f : u = \frac{1}{\sqrt{(u^2 \, tang^2 \, 6 - 1)}}$, und folglich

$$f : \left(\frac{z-h}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{(z-h)^2}{x^2} tang^2 \, 6 - 1\right)}}$$

$$\text{oder} = \frac{x}{\sqrt{((z-h)^2 \, tang^2 \, 6 - x^2)}}.$$

Die allgemeine Gleichung für conische Flächen geht also hier über in

$$\frac{x}{y} = funct : \left(\frac{z-h}{x}\right) = \frac{x}{\sqrt{((z-h)^2 \, tg^2 \, 6 - x^2)}}$$

oder $y^2 = (z-h)^2 \, tang^2 \, 6 - x^2$.

288. Aufgabe. Zu bestimmen, ob eine krumme Fläche, deren Gleichung gegeben ist, eine Cylinderfläche zur Asymptote hat.

Auflösung. Man fasse die höchsten Glieder der Gleichung zusammen, und untersuche, ob ihre Summe, wenn man eine oder zwei oder alle Coordinaten als unendlich ansieht, sich unter die allgemeine Gleichung für alle Cylinderflächen fügen läſst, oder man suche aus andern Umständen die Gleichung für unendliche Werthe der Coordinaten, und sehe, ob sie den Bedingungen, die für die Cylinder gelten, entspricht.

289. Beispiel. Es sei $z^2 = \frac{(b^2 - (c + \sqrt{(x^2+y^2)})^2)(a - c - \sqrt{(x^2+y^2)})}{(c + \sqrt{(x^2+y^2)})^2}$ die Gleichung für eine krumme Fläche. Hier zeigt sich sogleich, daſs weder x noch y unendlich werden kann, da z unmöglich wäre, wenn man $c + \sqrt{(x^2+y^2)}$ gröſser als b annehmen wollte. Dagegen wird z unendlich, wenn $\sqrt{(x^2+y^2)} = -c$ ist, und dieses ist also die Gleichung, welche die unendlich entfernten Puncte annähernd umfaſst. Sie gehört einem senkrechten Cylinder, dessen Querschnitte Kreise vom Halbmesser $= c$ sind, und würde aus der allgemeinen Form $x - nz = f : (y - mz)$ gefunden, wenn $m = n = 0$ gesetzt wird, so wie dieses allemal statt findet, wenn die Cylinderfläche auf die durch x, y gelegte Ebne senkrecht ist.

290. Lehrsatz. Alle Gleichungen, in welchen die sämmtlichen Glieder in Beziehung auf die drei Coordinaten alle eine gleiche Anzahl von Dimen-

sionen enthalten, gehören Kegelflächen an, deren Spitze im Anfangspuncte der Coordinaten liegt.

Beweis. In einer Gleichung wie $x^3 + xy^2 + z^2 y + y^3 = 0$, läfst sich, indem man mit der höchsten Potenz der einen Gröfse überall dividirt, die Form $\frac{x}{z} = f : \left(\frac{y}{z}\right)$ erhalten, hier zum Beispiel, $\frac{x^3}{z^3} + \frac{x}{z} \cdot \frac{y^2}{z^2} + \frac{y}{z} + \frac{y^3}{z^3} = 0$, und so erhellet, dafs die Fläche eine Kegelfläche ist.

290.* Lehrsatz. Wenn man das höchste Glied der Gleichung für eine krumme Fläche $= 0$ setzt, so erhält man eine Kegelfläche, die als Asymptotenfläche kann angesehen werden, für alle die Puncte der Kegelfläche, deren drei Ordinaten im Unendlichen von einerlei Ordnung sind.

Beweis. Es sei zum Beispiel $x^3 + y^3 + z^3 + ax^2 + ay^2 + a^2 x = 0$ die Gleichung für eine krumme Fläche. Das höchste Glied bietet eine Kegelfläche dar, deren Ordinate w, mit z parallel, durch $w^3 = -x^3 - y^3$ angegeben wird. Setze ich nun, um den Unterschied der Ordinaten z, w anzugeben, $z = w + u$, so ist, weil $w^3 + x^3 + y^3 = 0$,

$$3w^2 u + 3u^2 w + u^3 + a(x^2 + y^2) + a^2 x = 0.$$

Wenn also w mit x, y von einerlei Ordnung ist, indem sie unendlich werden, so mufs u einen endlichen Werth erhalten, damit die Glieder $3uw^2 + ax^2 + ay^2$ sich gegenseitig aufheben können.

290.** Es scheint mir, dafs der Lehrsatz nur mit dieser Einschränkung gelten darf, und allerdings schliefst sich also, wenn man $y = mx$, $w = nx$ setzt, wo n durch m bestimmt wird, die Kegelfläche in allen denjenigen Puncten an die gegebne krumme Fläche an, wo m und n Werthe haben, die von 0 und ∞ verschieden sind.

In unserm Beispiele wird für die Kegelfläche $n = -\sqrt[3]{(1 + m^3)}$, und für die andre krumme Fläche, wenn ich $z = nx + u$ nenne

$$3n^2 ux^2 + 3nu^2 x + u^3 + a(1 + m^2)x^2 + a^2 x = 0,$$

also für sehr grofse x nahe genug $\frac{-a(1 + m^2)}{3n^2} = u$;

oder etwas mehr genähert $u^2 + nux = -\frac{a(1 + m^2)x}{3n} - \frac{a^2}{3n}$

$$\text{das ist } u = -\tfrac{1}{2}nx + \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}n^2x^2 - \left(\frac{a(1 + m^2)x + a^2}{3n}\right)\right)}$$

$$= -\left(\frac{ax(1 + m^2) + a^2}{3n^2 x}\right) - \frac{a^2(1 + m^2)^2}{9n^3 x}$$

Also nur für sehr kleine Werthe von n wird u sehr grofs, und die Kegelfläche kann allerdings als Asymptotenfläche angesehn werden.

Von den doppelten Puncten krummer Flächen.

291. **Bemerkung.** Um die Untersuchung über die Fälle, wo die berührende Ebne mehr als eine Lage erhalten kann, sicherer zu führen, kehre ich noch einmal zu der Betrachtung der gewöhnlichen Fälle zurück.

Aus der gegebnen Gleichung für die Fläche erhält man allemal, wenn man x in $x+\Delta x$, y in $y+\Delta y$, z in $z+\Delta z$ verwandelt, eine Differenzgleichung, die drei Glieder der ersten Ordnung, sechs Glieder der zweiten Ordnung u. s. w. enthält. Von den drei Gliedern der ersten Ordnung kann im Allgemeinen keines fehlen, und bloſs die auf eine der Coordinaten-Ebnen senkrechten Cylinderflächen machen hier eine Ausnahme, indem die Gleichung für sie von der dritten Coordinate gar nicht abhängt, und bei ihnen für alle Puncte das gilt, was sonst nur für einzelne Puncte der Oberfläche statt findet. Es sei also $V=0$, die Gleichung für die krumme Fläche und

$$0=\begin{cases}L\Delta x+M\Delta y+N\Delta z\\ +P\Delta x^2+Q\Delta x\Delta y+R\Delta x\Delta z+S\Delta y^2\\ \qquad +T\Delta y\Delta z+U\Delta z^2+\text{etc.}\end{cases}$$

die Differenzgleichung. Wenn hier L, M, N für den zu betrachtenden Punct endliche Werthe haben, so hat die Bestimmung der Berührungs-Ebne keine Schwierigkeit; ist eine dieser drei Gröſsen $=0$, so ist die Berührungs-Ebne derjenigen Ordinate parallel, bei deren Differenz der Coefficient $=0$ steht; und endlich wenn zwei jener Gröſsen verschwinden, so steht die Berührungs-Ebne auf derjenigen Ordinate senkrecht, bei deren Differenz der nicht verschwindende Coefficient steht.

292. **Aufgabe.** Wenn keiner der Coefficienten verschwindet, den Werth von Δz in einer Reihe entwickelt darzustellen.

Auflösung. Es sei $\Delta z=p\Delta x+q\Delta y+r\Delta x^2+s\Delta x\Delta y+t\Delta y^2+\text{etc.}$ so wird, wie die Entwicklung sogleich zeigt,

$$p=-\frac{L}{N};\ q=-\frac{M}{N};\ r=\frac{-(p^2U+Rp+P)}{N}$$

$$s=\frac{-(2pqU+Tp+Rq+Q)}{N};\ t=\frac{-(q^2U+Tq+S)}{N}.$$

293. Daſs hier $p=\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $q=\left(\frac{dz}{dy}\right)$, $r=\frac{1}{2}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$ und so weiter, ist, darf ich als bekannt voraussetzen, nach dem Taylorschen Theorem. Auch L, M, etc. hätten wir durch $L=\left(\frac{dU}{dx}\right)$ u. s. w. ausdrücken können.

294. Wenn in der Differenzgleichung §. 291. der Coefficient $N=0$ ist, so scheinen alle Glieder der Reihe für $\triangle z$ unendlich zu werden, und diese erfordert also eine andre Entwickelungsform.

295. **Aufgabe.** Die Reihe für $\triangle z$ zu finden, wenn $N=0$ oder $\left(\frac{dV}{dz}\right)=0$ ist.

Auflösung. Um hier wenigstens die Glieder der zweiten Ordnung in dem Werthe von $\triangle z$ zu finden, müssen in der Differenzgleichung noch die Glieder der dritten Ordnung mit berücksichtiget werden; ich setze daher

$$\begin{aligned}
&L\triangle x + M\triangle y \\
0 = &+ P\triangle x^2 + Q\triangle x\triangle y + R\triangle x\triangle z + S\triangle y^2 + T\triangle y\triangle z + U\triangle z^2 \\
&+ \alpha\triangle x^3 + \beta\triangle x^2\triangle y + \gamma\triangle x^2\triangle z + \delta\triangle x\triangle y^2 + \varepsilon\triangle x\triangle y\triangle z \\
&+ \zeta\triangle x\triangle z^2 + \eta\triangle y^3 + \vartheta\triangle y^2\triangle z + \iota\triangle y\triangle z^2 + \varkappa\triangle z^3 + \lambda\triangle z^4 + \text{etc.}
\end{aligned}$$

Die Entwickelung scheint mir hier allgemein in folgender Form enthalten zu sein,

$$\triangle z = \sqrt{(p\triangle x + q\triangle y)} + r\triangle x + s\triangle y + \frac{t\triangle x^2 + u\triangle x\triangle y + v\triangle y^2}{\sqrt{(p\triangle x + q\triangle y)}}$$

welche folgendes giebt:

$$\begin{array}{llll}
0 = L\triangle x & & + P\triangle x^2 & + Q\triangle x\triangle y + S\triangle y^2 \\
\;+ M\triangle y & & & \\
& + R\triangle x\sqrt{(p\triangle x + q\triangle y)} & + Rr\triangle x^2 & + Rs\triangle x\triangle y \\
& + T\triangle y\sqrt{(p\triangle x + q\triangle y)} & + & \;\; Tr\triangle x\triangle y + Ts\triangle y^2 \\
+ Up\triangle x & + 2Ur\triangle x\sqrt{(p\triangle x + q\triangle y)} & + 2Ut\triangle x^2 & + 2Uu\triangle x\triangle y + 2Uv\triangle y^2 \\
+ Uq\triangle y & + 2Us\triangle y\sqrt{(p\triangle x + q\triangle y)} & + Ur^2\triangle x^2 & + 2Urs\triangle x\triangle y + Us^2\triangle y^2 \\
& & + p\zeta\triangle x^2 & + q\zeta\triangle x\triangle y \\
& & & + \iota p\triangle x\triangle y \;\; + \iota q\triangle y^2 \\
& + \varkappa p\triangle x\sqrt{(p\triangle x + q\triangle y)} & + 3\varkappa pr\triangle x^2 & + 3\varkappa qr\triangle x\triangle y \\
& + \varkappa q\triangle y\sqrt{(p\triangle x + q\triangle y)} & & + 3\varkappa ps\triangle x\triangle y + 3\varkappa qs\triangle y^2 \\
& & + \lambda p^2\triangle x^2 & + 2\lambda pq\triangle x\triangle y + \lambda q^2\triangle y^2
\end{array}$$

$$\text{also } p = \frac{-L}{U};\; q = -\frac{M}{U};$$

$$r = \frac{-R}{2U} - \frac{\varkappa p}{2u};\; s = \frac{-T}{2U} - \frac{\varkappa q}{2U};$$

und auch t, u, v, liefsen sich leicht finden.

296. Ein leichtes Beispiel giebt die Kugel, wo $V=0=r^2-x^2-y^2-z^2$, also $L=-2x$; $M=-2y$, $N=-2z$ ist, also $N=0$, für $z=0$. Ferner $Q=R=T=0$, und $P=S=U=-1$, weil $P=\frac{1}{2}\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)$,

$S = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2 V}{dy^2}\right)$, $U = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2 V}{dz^2}\right)$ ist. Hier ist also $p = -2x$; $q = -2y$, $r = s = 0$, und aus der allgemeinen Entwickelung findet man leicht, weil die meisten Glieder verschwinden, $t = \frac{-P}{2U} = -\frac{1}{2}$; $u = 0$;

$v = \frac{-S}{2U} = -\frac{1}{2}$, und eben das hätte sich für $z = 0$ aus dem Werthe

$\Delta z = \sqrt{\{-2x\Delta x - 2y\Delta y - \Delta x^2 - \Delta y^2\}}$, ergeben, nämlich

$$\Delta z = \sqrt{\{-2x\Delta x - 2y\Delta y\}} - \frac{1}{2}\,\frac{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}{\sqrt{(-2x\Delta x - 2y\Delta y)}} + \text{etc.}$$

297. **Bemerkung.** Die Entwickelung bleibt dieselbe, wenn auch L oder $M = 0$ wäre; sind aber beide zugleich $= 0$, also $L = M = N = 0$, so tritt eine andre Entwickelung ein. In diesem Falle schiene $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{0}{0}$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{0}{0}$ zu werden, und offenbar deutet das auf eine doppelte Lage der Berührungs-Ebne hin.

298. **Aufgabe.** Wenn $L = M = N = 0$ ist, die Reihe für Δz zu finden.

Auflösung. Der Werth von Δz muſs, wenn nicht $U = 0$ ist, mit Gliedern der ersten Ordnung anfangen, denn da in der Gleichung die Differenzen alle in der zweiten Potenz, als der niedrigsten vorkommen, so müssen sie alle zu einerlei Ordnung gehören. Der Werth von Δz fängt also entweder mit $p\Delta x + q\Delta y$ an, oder mit $\sqrt{(u\Delta x^2 + v\Delta x\Delta y + w\Delta y^2)}$; mit einer Wurzel höherer Ordnung kann er nicht anfangen, da das Quadrat rational werden muſs, sobald nicht $U = 0$ ist.

1. Es sei also $\Delta z = p\Delta x + q\Delta y +$ so geben die Glieder der zweiten Ordnung in §. 291.

$$\begin{aligned}
&P\Delta x^2 &&+ Q\Delta x\Delta y &&+ S\Delta y^2\\
&Rp\Delta x^2 &&+ Rq\Delta x\Delta y &&\\
& &&+ Tp\Delta x\Delta y &&+ Tq\Delta y^2\\
&+ Up^2\Delta x^2 &&+ 2Upq\Delta x\Delta y &&+ Uq^2\Delta y^2,
\end{aligned}$$

$$\text{also ist } p = -\frac{R}{2U} \pm \sqrt{\left(\frac{R^2 - 4PU}{4U^2}\right)},$$

$$q = -\frac{T}{2U} \pm \sqrt{\left(\frac{T^2 - 4SU}{4U^2}\right)}.$$

Zugleich aber mufs auch $2Upq + Rq + Tp + Q = 0$ sein, oder wenn die Hauptgleichung $V = 0$ war,

$$\left(\frac{d^2 V}{dz^2}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right) + \left(\frac{d^2 V}{dx\,dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right) + \left(\frac{d^2 V}{dy\,dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{d^2 V}{dx\,dy}\right) = 0.$$

Diese Bedingungsgleichung findet immer statt; denn $V = 0$ in Beziehung auf x differentiirt giebt

$\left(\frac{dV}{dx}\right) + \left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$; und diese in Beziehung auf y differentiirt, giebt

$$\left(\frac{d^2 V}{dx\,dy}\right) + \left(\frac{d^2 V}{dx\,dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right) + \left(\frac{d^2 V}{dz\,dy}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{d^2 V}{dz^2}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right) + \left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) = 0,$$

welche für $\left(\frac{dV}{dz}\right) = 0$ mit jener Bedingungsgleichung übereinstimmt, wenn nicht etwa $\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) = \infty$ ist.

2. Die zweite Form könnte diese sein:

$$\Delta z = \sqrt{(p\Delta x^2 + q\Delta x\Delta y + r\Delta y^2)} + \text{etc.}$$

Sie giebt:

$$\begin{aligned} & P\Delta x^2 + Q\Delta x\Delta y + S\Delta y^2 \\ & + R\Delta x\sqrt{(p\Delta x^2 + q\Delta x\Delta y + r\Delta y^2)} \\ & + T\Delta y\sqrt{(p\Delta x^2 + q\Delta x\Delta y + r\Delta y^2)} \\ & + pU\Delta x^2 + qU\Delta x\Delta y + rU\Delta y^2 + \text{etc.} \end{aligned}$$

als zweites Glied, und wenn R und T verschwinden, (welches offenbar eine Bedingung dieser Entwickelungsform ist), wird

$$p = -\frac{P}{U};\ q = -\frac{Q}{U},\ r = -\frac{S}{U}.$$

299. **Beispiel.** Schon die gewöhnliche Kegelfläche bietet uns ein Beispiel zu diesen Bestimmungen dar.

Die Gleichung $x^2 + y^2 = z^2\,tang^2.\,\mathfrak{C}$. giebt nämlich

$$\begin{aligned} 0 = \ & 2x\Delta x + \Delta x^2 \\ & + 2y\Delta y + \Delta y^2 \\ & - 2z\Delta z.\,tang^2\mathfrak{C} - \Delta z^2\,tang^2\mathfrak{C}, \end{aligned}$$

also für $x = y = z = 0$,

$$\Delta z = Cotang\,\mathfrak{C}.\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}.$$

Der Werth von dz bleibt also ungeändert, wenn man $dx^2 + dy^2$ oder den Abstand vom Nullpuncte nach allen Seiten hin gleich nimmt; aber $\frac{dz}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$

ist die Tangente des Neigungswinkels, unter welchem irgend eine der Seitenlinien des Kegels, oder der durch die Spitze gehenden Berührungslinien, gegen die Abscissen-Ebne geneigt ist.

Für den elliptischen Kegel wäre auf ähnliche Art $x^2 + ny^2 = z^2 \, tang^2 \mathfrak{E}$, und $dz = Cotang\, \mathfrak{E} \,.\, \sqrt{(\Delta x^2 + n \Delta y^2)}$ womit die verschiedene Neigung der von der Spitze ausgehenden Seitenlinien für die verschiedenen Verhältnisse von Δx, Δy angegeben wird.

300. **Beispiel.** Es sei für eine krumme Fläche die Gleichung $r^2 - z^2 = (a + \sqrt{(x^2 + y^2)})^2$ gegeben.

Diese Gleichung steigt, wenn man sie rational macht auf den vierten Grad und giebt

$$x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2 - 2(r^2 + a^2)x^2 - 2(r^2 + a^2)y^2$$
$$- 2(r^2 - a^2)z^2 + (r^2 - a^2)^2 = 0.$$

Die Differenzgleichung giebt also:

$$0 = \left\{ \begin{array}{llll} 4x^3\Delta x & + 6x^2\Delta x^2 & + 4x\Delta x^3 & + \Delta x^4 \\ 4y^3\Delta y & + 6y^2\Delta y^2 & + 4y\Delta y^3 & + \Delta y^4 \\ 4z^3\Delta z & + 6z^2\Delta z^2 & + 4z\Delta z^3 & + \Delta z^4 \\ 4xy^2\Delta x & + 2y^2\Delta x^2 & & \\ 4yx^2\Delta y & + 8xy\Delta x\Delta y & + 4y\Delta x^2\Delta y & \\ & + 2x^2\Delta y^2 & + 4x\Delta x\Delta y^2 & + 2\Delta x^2\Delta y^2 \\ 4xz^2\Delta x & + 2z^2\Delta x^2 & & \\ 4zx^2\Delta z & + 8xz\Delta x\Delta z & + 4z\Delta x^2\Delta z & \\ & 2x^2\Delta z^2 & + 4x\Delta x.\Delta z^2 & + 2\Delta x^2\Delta z^2 \\ +4yz^2\Delta y & + 2z^2\Delta y^2 & & \\ 4zy^2\Delta z & + 8yz\Delta y\Delta z & + 4z\Delta y^2\Delta z & \\ & 2y^2\Delta z^2 & + 4y\Delta y\Delta z^2 & + 2\Delta z^2\Delta y^2 \\ \multicolumn{4}{l}{- 4(r^2 + a^2)x\Delta x - 2(r^2 + a^2)\Delta x^2} \\ \multicolumn{4}{l}{- 4(r^2 + a^2)y\Delta y - 2(r^2 + a^2)\Delta y^2} \\ \multicolumn{4}{l}{- 4(r^2 - a^2)z\Delta z - 2(r^2 - a^2)\Delta z^2.} \end{array} \right.$$

Setzt man hier $x = y = 0$, womit $z^2 = r^2 - a^2$ zusammengehört, so heben sich alle Glieder der ersten Ordnung auf, und die Glieder der zweiten Ordnung kommen auf folgende zurück:

$$(z^2 - r^2 - a^2)\Delta x^2 + (z^2 - r^2 - a^2)\Delta y^2 + 2z^2\Delta z^2$$
$$\text{oder } - 2a^2\Delta x^2 - 2a^2\Delta y^2 + 2(r^2 - a^2)\Delta z^2,$$

und daraus $\Delta z = \pm a \sqrt{\left(\dfrac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{r^2 - a^2}\right)}$, übereinstimmend mit den allgemeinen Formeln. Auch hier sind alle von dem doppelten Puncte aus, zu Puncten hin, für welche $\Delta x^2 + \Delta y^2$ gleiche Werthe hat, gezognen Linien gleich geneigt gegen die Abscissen-Ebne und um diesen Punct liegen also zwei den Kegelspitzen ähnliche Theile der krummen Fläche.

Dieses hätte sich aus der Entstehung der krummen Fläche voraussehen lassen, da nämlich z eine Function von x^2+y^2 ist, so ist der Körper ein runder Körper, der durch Umdrehung um eine gegen die Ebne x, y, senkrechte Linie entstanden ist. Betrachtet man die Fläche näher, so erhält man für $x=0$, die aus zwei Kreisen bestehende Durchschnittslinie, die durch $z^2=r^2-(a\pm x)^2$ angegeben wird. Man überzeugt sich daher leicht, daſs die Fläche entsteht, indem ein Kreis sich um eine, vom Durchmesser verschiedene, mit z parallele Sehne dreht, deren Abstand vom Centro $=a$ ist.

301. Beispiel. Die Gleichung für die krumme Fläche sei folgende: $y^3+x^2y-xyz+bx^2=0$.

Die sämmtlichen mit x, y parallelen Querschnitte dieser Fläche stellen die im 1. Th. §. 404. betrachtete Curve dar, aber bei jedem Werthe von z ist das Verhältniſs $b:z$ ein andres, und diese Querschnitte sind also einander unähnlich; es erhellt aber sogleich, daſs für $x=y=0$ eine ganze Folge doppelter Puncte gefunden wird. Sucht man die Differenzgleichung nur in Beziehung auf diese Werthe von x, y, so ist

$$0=\begin{cases} \qquad\qquad\quad +\Delta y^3 \\ \qquad\qquad\quad +\Delta x^2\Delta y \\ -z\Delta x\Delta y -\Delta z\Delta x\Delta y \\ +b\Delta x^2 \end{cases}$$

Betrachtet man hier bloſs das Glied der zweiten Ordnung, so sieht man, daſs Δz ganz unabhängig von den beiden andern Differenzen ist, also in alle den Puncten, wo $x=y=0$, ist die Berührungs-Ebne senkrecht gegen die Ebne der x, y; ihre Richtung in Beziehung auf diese letztern Coordinaten wird auf doppelte Weise, entweder durch $\Delta x=0$, das ist $\frac{dy}{dx}=\infty$, oder auch durch $\frac{dy}{dx}=\frac{b}{z}$ bestimmt; die erstere Berührungs-Ebne, welche gegen die x senkrecht ist, berührt in allen Höhen; die zweite berührt in einer bestimmten Höhe und zwar so, daſs sie den einen Theil der Fläche an der einen Seite, den andern an der andern Seite läſst. Die Linie, die im Nullpuncte der x, y senkrecht auf dieser Ebne steht, giebt also eine Reihe von Knoten, so daſs man sie eine Knotenfurche nennen mögte.

302. So wie die Gleichung hier angenommen ist, paſst sie unter keine der beiden in §. 298. angegebnen Entwickelungsformen, weil für $U=0$ offenbar eine andre Entwickelung eintreten muſs, von der ich hier, da sie aus §. 25. 2ten Fall sich übersehen läſst, nicht reden will. Um die Untersuchung unter jene Form zu bringen, will ich statt x schreiben $x+mz$, also

$$y^3+(x+mz)^2(y-b)-yz(x+mz)=0.$$

Hier wird die vollständige Differenzgleichung folgende

$$0 = \left\{ \begin{array}{lll} 3y^2\,\Delta y & +\,3y\,\Delta y^2 & +\,\Delta y^3 \\ 2(x+mz)(y-b)\Delta x & +\,(y-b)\,\Delta x^2 & \\ +\,2(x+mz)m(y-b)\Delta z & +\,2m(y-b)\Delta x\Delta z & \\ & +\,m^2\,(y-b)\Delta z^2 & \\ +\,(x+mz)\;\Delta y & +\,2(x+mz)\,\Delta x\,\Delta y & \\ & +\,2m\,(x+mz)\,\Delta z\,\Delta y & +\,\Delta x^2\,\Delta y \\ & & +\,2m\,\Delta x\Delta z\Delta y \\ & & +\,m^2\,\Delta z^2\,\Delta y \\ -(x+mz)\,y\Delta z & & \\ -(x+mz)\,z\Delta y & -(x+mz)\,\Delta y\,\Delta z & \\ -yz\,\Delta x & -y\,\Delta x\,\Delta z & \\ & -z\,\Delta x\,\Delta y & -\Delta x\,\Delta y\,\Delta z \\ -myz\,\Delta z & -my\,\Delta z^2 & \\ & -mz\,\Delta y\,\Delta z & -m\,\Delta y\,\Delta z^2 \end{array} \right.$$

Wenn hier $y=0$ und $x+mz=0$ ist, so verschwindet das ganze erste Glied und das zweite kömmt auf

$$-b\Delta x^2 - z\Delta x\Delta y - 2mb\Delta x\Delta z - mz\Delta y\,\Delta z - m^2 b\,\Delta z^2$$

so dafs hier $P=-b;\ \ Q=-z;\ \ R=-2mb,$
$S=0,\ \ T=-\,mz;\ \ U=-\,m^2 b$ ist,

also $p=-\dfrac{1}{m};\ q=\dfrac{-z}{2mb}\mp\dfrac{z}{2mb}$ in der ersten Entwickelungsform ist.

Wir erhalten also $dz=-\dfrac{1}{m}dx-\dfrac{zdy}{2mb}(1\mp 1)$, so dafs die Berührungs-Ebne durch einen doppelten Werth der in §. 244. 1. angegebnen Gleichung bestimmt wird; das obere Zeichen giebt $-\dfrac{1}{m}(u-x)+0\,(v-y)=w-z$, so

dafs v unbestimmt bleibt, und $w-z=\dfrac{-1}{m}(u-x)$ oder weil $x=-mz$ sein sollte, $mw=-u$, gefunden wird, als Gleichung für die Einschnittslinie dieser Ebne, die auf der durch x, z gelegten Ebne senkrecht ist. Das untere Zeichen giebt, als Gleichung für die Berührungs-Ebne

$$-\frac{1}{m}(u-x)\;\frac{z}{mb}\;(v-y)=w-z,$$

oder weil in diesen Puncten $y=0$ und $x=-mz$ ist $-u-\dfrac{vz}{b}=mw.$

Diese Ebnen, die für jeden Werth von z andre werden, schneiden also in die mit x, z parallele Ebne immer so ein, dafs $u=-mw$ die Gleichung für die Durchschnittslinie ist; — auf dieser graden Linie, die für alle Werthe von z

einerlei bleibt, liegen nämlich alle jene doppelten Puncte und sie bildet an sich die Knotenfurche.

303. Beispiel. Es sei

$$\{(x^2+y^2)(z^2+a^2-b^2+x^2+y^2)-a^2b^2\}^2=4a^2(b^2-x^2-y^2)^2(x^2+y^2)$$

die Gleichung für eine krumme Fläche.

Um hier nicht die weitläuftigen Differenzreihen zu entwickeln, will ich jeden Coefficienten einzeln berechnen, indem ich die ganze Gleichung unter $V=0$ zusammen fasse. Es ist also

$$V=0=z^2(x^2+y^2)-(a-\sqrt{(x^2+y^2)})^2(b^2-x^2-y^2),$$

oder wenn ich $a-\sqrt{(x^2+y^2)}=u$ setze,

$$V=0=z^2(x^2+y^2)-u^2(b^2-x^2-y^2).$$

Daraus also

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)=L=2z^2x+2xu^2+2u\frac{(b^2-x^2-y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)}};$$

$$\left(\frac{dV}{dy}\right)=M=2z^2y+2u^2y+2u\frac{(b^2-x^2-y^2)y}{\sqrt{(x^2+y^2)}};$$

$$\left(\frac{dV}{dz}\right)=N=2z(x^2+y^2);$$

$$\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)=2P=2z^2+2u^2-\frac{4ux^2}{\sqrt{(x^2+y^2)}}-\frac{2x^2}{x^2+y^2}(b^2-x^2-y^2)$$
$$+\frac{2u(b^2-x^2-y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)}}-\frac{4ux^2}{\sqrt{(x^2+y^2)}}-\frac{2ux^2(b^2-x^2-y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}};$$

$$\left(\frac{d^2V}{dx\,dy}\right)=Q=-\frac{4xuy}{\sqrt{(x^2+y^2)}}-\frac{2xy}{x^2+y^2}(b^2-x^2-y^2)-\frac{4uxy}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$$
$$-\frac{2uxy(b^2-x^2-y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}};$$

$$\left(\frac{d^2V}{dx\,dz}\right)=R=4zx;$$

$$\left(\frac{d^2V}{dy^2}\right)=2S=2z^2+2u^2-\frac{4uy^2}{\sqrt{(x^2+y^2)}}-\frac{2y^2(b^2-x^2-y^2)}{(x^2+y^2)}$$
$$+\frac{2u(b^2-x^2-y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)}}-\frac{4uy^2}{\sqrt{(x^2+y^2)}}-\frac{2uy^2(b^2-x^2-y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}};$$

$$\left(\frac{d^2V}{dy\,dz}\right)=T=4zy;$$

$$\left(\frac{d^2V}{dz^2}\right)=2U=2(x^2+y^2).$$

Hier werden, weil mit $z=0$, $u=0$ zusammengehört, für $z=u=0$, die Glieder der ersten Ordnung $=0$, dagegen

$$2P=\frac{-2x^2b^2}{x^2+y^2}+2x^2;$$

$$Q=\frac{-2xyb^2}{x^2+y^2}+2xy;$$

$$R=0;\ \text{und}\ T=0;$$

$$2S=\frac{-2b^2y^2}{x^2+y^2}+2y^2;\ \text{und}\ 2U=2(x^2+y^2).$$

Nach §. 298. 2. ist also

$$p=\frac{-P}{U}=\frac{x^2(b^2-x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2};$$

$$q=\frac{-Q}{U}=\frac{xy(b^2-x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$r=-\frac{S}{U}=\frac{y^2(b^2-x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

oder $dz=\frac{\sqrt{(b^2-x^2-y^2)}}{x^2+y^2}\sqrt{(x^2dx^2+xydxdy+y^2dy^2)}$.

oder da an dieser Stelle $x^2+y^2=a^2$ sein sollte,

$$dz=\frac{\sqrt{(b^2-a^2)}}{a^2}\sqrt{(x^2dx^2+xydxdy+y^2dy^2)}.$$

Wenn man dies in die Ausdrücke §. 246. setzt, so wäre

$$\text{tang}\ \eta=-\frac{x}{y}=-\frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)}},$$

$$\text{tang}\ \zeta=\sqrt{\frac{(x^2+y^2)\sqrt{(b^2-a^2)}}{a^2}}=\sqrt{\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)}$$

also der Neigungswinkel der Berührungs-Ebne gegen die Abscissen-Ebne in allen den hier zu betrachtenden Puncten gleich, und beide Berührungs-Ebnen gleich geneigt, gegen die Abscissen-Ebne, die eine an der einen, die andre an der andern Seite derselben. Der Winkel ζ aber erhält nun erstlich einen bestimmten, von 0 verschiedenen Werth, wenn $b>a$ ist, oder 2. er wird $=0$, wenn $b=a$ ist, oder 3. der Werth ist unmöglich, wenn $b<a$ ist. Im ersten Falle bildet sich eine Knotenfurche, im zweiten Falle eine ganze Folge von Rückkehrpuncten oder eine Rückkehrfurche, im dritten Falle ein mit der Fläche zusammen gehörender, zugeordneter Kreis.

Da unsre Fläche keine andre ist, als die durch Umdrehung der Conchoide um ihre Asymptote entstandene, so läfst sich dies aus 1. Th. Fig. 115. 116. 117. leicht übersehn; der erste Fall nämlich tritt ein, wenn die Curve Fig. 115. sich um die Axe AB dreht, der zweite wenn Fig. 116., der dritte wenn Fig. 117. sich dreht; bei allen ist es der Punct C, der durch den eben betrachteten Kreis fortgeführt wird, und offenbar beschreibt im letzten Falle der zugeordnete Punct C einen zugeordneten Kreis.

304. Lehrsatz. Um zu entscheiden, ob die Fläche nur einen einzelnen doppelten Punct hat, um welchen herum die Fläche eine Art von Kegelspitze bildet, oder ob sie eine ganze Folge doppelter Puncte hat, die als Knotenfurche oder Rückkehrfurche, (Knotenkante oder Rückkehrkante) eine fortlaufende Linie bilden, mufs man den Werth von x, y und z, wodurch $\left(\frac{dV}{dx}\right)=0$, $\left(\frac{dV}{dy}\right)=0$, $\left(\frac{dV}{dz}\right)=0$ wird, in die Hauptgleichung setzen, und wenn diese dann nur einen oder einzelne Werthe für x vermittelst einer bestimmten Gleichung irgend eines Grades angiebt, so findet das erstere statt; das zweite dagegen ist der Fall, wenn sich vermittelst jener drei Bedingungen nur eine der drei Coordinaten wegschaffen läfst, also ein geometrischer Ort, eine ebne oder doppelt gekrümmte Curve, gefunden wird, in welcher sich die doppelten Puncte befinden. — Der Beweis erhellt von selbst.

305. In unsern Beispielen war es §. 299. die einzige Spitze des Kegels, in §. 300. waren es die beiden durch $x=y=0$, $z=\pm\sqrt{(r^2-a^2)}$ gegebnen Puncte, die sich als doppelte zeigten; dagegen in §. 302. giebt die Gleichung $x=-mz$ eine grade Linie, in §. 303. die Gleichung $x^2+y^2=a^2$ einen Kreis als Knotenfurche.

306. Bemerkung. Ich brauche nicht zu bemerken, dafs die hier betrachteten Fälle lange nicht alles erschöpfen, was hieher gehört; sie scheinen mir aber hinreichend, um zur Anleitung für eine Untersuchung zu dienen, die, so viel ich weifs, bisher noch gar nicht angestellt ist.

307. Anmerkung. Da ich die Fläche, deren Gleichung $y^3+x^2y-xzy+bx^2=0$ ist, öfter erwähnt habe, so will ich von ihr doch noch eine merkwürdige Eigenschaft anführen.

Lehrsatz. Durch jeden Punct der in §. 276. 301. betrachteten Fläche läfst sich eine ganz in dieser Fläche liegende grade Linie ziehen, und alle diese graden Linien treffen die Abscissen-Ebne so dafs die Durchschnittspuncte in einer Cissoide liegen.

Beweis. Die Gleichung für diese Fläche war

$$y^3+x^2y-xzy+bx^2=0.$$

Denken wir uns also irgend einen durch die drei Coordinaten x', y', z' be-

stimmten Punct der Fläche und legen durch ihn eine auf die Abscissen-Ebne senkrechte Ebne, deren Gleichung $m(v-y')=u-x'$ ist, so läſst sich leicht die Gleichung für die Durchschnittslinie dieser Ebne mit der krummen Fläche finden, wenn man $x=u=x'+my-my'$ in die Hauptgleichung setzt; dadurch wird

$$\begin{aligned} y^3(1+m^2)+2my^2(x'-my')&+y(x'-my')^2 \\ +bm^2y^2 \qquad &+2bmy(x'-my')+b(x'-my')^2 \\ -my^2z \qquad &+yz(x'-my') \\ &=0. \end{aligned}$$

Nimmt man die auf die Abscissen-Ebne senkrechte Ebne so an, daſs sie durch den Anfangspunct geht, so muſs $my'=x'$ sein, also $y(1+m^2)+bm^2-mz=0$, ist dann die Gleichung für die Durchschnittslinie, welche in dem Falle eine grade Linie wird. Das heiſst: Wo man immer auf der krummen Fläche den durch x', y', bestimmten Punct annehme, allemal ist die Durchschnittslinie der durch diesen Punct und den Anfangspunct senkrecht auf die Abscissen-Ebne gesetzten Ebne mit der krummen Fläche eine grade Linie.

Diese grade Linie trifft da in die Abscissen-Ebne ein, wo $z=0$, oder $y=\frac{-bm^2}{1+m^2}$ ist, also weil $x=my$, für jeden Punct der senkrechten Ebne ist, da wo $y=\frac{-b}{\frac{y^2}{x^2}+1}$ oder $x^2=\frac{y^3}{b+y}$.

Die Puncte also, wo jene auf der krummen Fläche gezognen graden Linien in die Abscissen-Ebne eintreffen, liegen in einer Cissoide, die einerlei mit derjenigen Durchschnittscurve unsrer Fläche ist, welche die Abscissen-Ebne mit ihr bildet.

Es lieſse sich auch leicht das Gesetz angeben, nach welchem die grade Linie fortrücken müſste, um diese Fläche zu beschreiben.

Zweiter Abschnitt.

Von der Krümmung der Flächen.

308. **Bemerkung.** Wenn man auf die Betrachtungen zurücksieht, die wir über ebne Curven angestellt haben, so würde es natürlich scheinen, daſs man, um die Krümmung der Flächen zu bestimmen, nach einer Kugel fragte, die mit der gegebnen Fläche in dem gegebnen Puncte gleiche Krümmung hätte.

Aber hier stellt sich uns ein Hindernifs entgegen, welches uns bei ebnen Curven nicht vorkommen konnte. Wir können uns allerdings an zwei, einander sehr nahe liegenden Puncten der krummen Fläche Normallinien gezogen denken, und ihr Durchschnittspunct würde etwas dem Mittelpuncte des Krümmungskreises Entsprechendes angeben; aber nicht jede zwei solche Normallinien, selbst wenn sie sehr nahe an einander liegenden Puncten zugehören, haben einen Durchschnittspunct, sondern es ist gar wohl möglich, dafs sie nicht in einer Ebne liegen. Wir müssen daher hier fragen, wie man auf der krummen Fläche fortgehen müsse, um Normallinien zu erhalten, die in derselben Ebne liegen, und dann erst können wir die Bestimmungen über die Krümmung weiter verfolgen.

309. Aufgabe. Es ist die Gleichung für eine krumme Fläche gegeben, man soll bestimmen, nach welcher Richtung man auf ihr von einem gegebnen Puncte aus fortgehen mufs, um zu einem unendlich nahen Puncte zu gelangen, dessen Normallinie mit der Normallinie des ersten Punctes einen Durchschnittspunct gemein hat.

Auflösung. Es sei die Ordinate z des gegebenen Punctes in der krummen Fläche durch die beiden andern Coordinaten x, y bestimmt: so ist die Normallinie dieses Punctes durch die zwei Gleichungen, welche ihre Projectionen ausdrücken, (§. 248.)

$$(u-x)+\left(\frac{dz}{dx}\right)(w-z)=0,$$

$$\text{und } (v-y)+\left(\frac{dz}{dy}\right)(w-z)=0,$$

gegeben. Ein diesem unendlich nahe liegender Punct hat die drei Coordinaten $x+dx$, $y+dy$, $z+\left(\frac{dz}{dx}\right)dx+\left(\frac{dz}{dy}\right)dy$; und die an ihn gezogne Normallinie wird, durch die beiden Gleichungen

$$0=(u-x-dx)+\left\{\left(\frac{dz}{dx}\right)+\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)dx+\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)dy\right\}\left(w-z-\left(\frac{dz}{dx}\right)dx-\left(\frac{dz}{dy}\right)dy\right);$$

und

$$0=(v-y-dy)+\left\{\left(\frac{dz}{dy}\right)+\left(\frac{d^2z}{dy\,dx}\right)dx+\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)dy\right\}\left(w-z-\left(\frac{dz}{dx}\right)dx-\left(\frac{dz}{dy}\right)dy\right);$$

bestimmt. Lasse ich hier die Glieder weg, welche vermöge der beiden ersten Gleichungen sich aufheben, und auch die, welche zwei Differentialfactoren enthalten, so ist

$$0 = -dx + (w-z)\left\{\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)dy + \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)dx\right\} - \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)dy - \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 dx;$$

$$\text{und } 0 = -dy + (w-z)\left\{\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)dx + \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)dy\right\} - \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)dx - \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 dy.$$

Soll also derjenige Punct durch u, v, w bestimmt werden, der beiden Normallinien als Durchschnittspunct gemeinschaftlich ist, so muſs, zufolge der letzten beiden Gleichungen

$$w-z = \frac{dx\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right) + \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)dy}{\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)dx + \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)dy};$$

$$\text{und auch } w-z = \frac{dy\left(1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right) + \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)dx}{\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)dy + \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)dx}$$

sein. Hiedurch und durch die beiden ersten Gleichungen werden die drei Coordinaten u, v, w, des Durchschnittspunctes gegeben; aber der doppelte Werth von $w-z$ zeigt, daſs eine Bedingungsgleichung statt findet, oder daſs nur dann jene drei Coordinaten bestimmt werden können, wenn der Quotient $\frac{dy}{dx}$ den Werth hat, welchen die Gleichsetzung der beiden Werthe von $(w-z)$ fordert, das heiſst, man muſs nach der Richtung auf der krummen Fläche fortgehen, deren Projection durch die Gleichung

$$\frac{dy^2}{dx^2}\cdot\left\{\left(1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) - \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\right\} +$$

$$+\frac{dy}{dx}\left\{\left(1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) - \left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\right\} +$$

$$+\left\{-\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) + \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\right\}$$

$$= 0;$$

bestimmt wird.

310. Beispiel. Für die gewöhnliche Kegelfläche sei $x^2+y^2=nz^2$, so ist $\left(\frac{dz}{dx}\right)=\frac{x}{nz}$; $\left(\frac{dz}{dy}\right)=\frac{y}{nz}$;

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)=\frac{1}{nz}-\frac{z^2}{n^2z^3}=\frac{y^2}{n^2z^3};\ \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)=-\frac{xy}{n^2z^3};$$

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)=\frac{1}{nz}-\frac{y^2}{n^2z^3}=\frac{x^2}{n^2z^3}.$$

Die Bedingungsgleichung wird also

$$\frac{dy^2}{dx^2}\left(\frac{n^2z^2+x^2+y^2}{n^4z^5}\right)xy-\frac{dy}{dx}\left(\frac{n^2z^2(y^2-x^2)+(y^2+x^2)(y^2-x^2)}{n^4z^5}\right)$$
$$-\left(\frac{n^2z^2+x^2+y^2}{n^4z^5}\right)xy=0,$$

oder $\frac{dy^2}{dx^2}-\frac{y^2-x^2}{xy}\frac{dy}{dx}-1=0$,

also $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-x^2}{2xy}\pm\frac{y^2+x^2}{2xy}$.

Der doppelte Werth von $\frac{dy}{dx}$ ist also entweder $=\frac{y}{x}$, oder $=-\frac{x}{y}$; und da bestimmt der erste, dafs $x\,dy-y\,dx=0$ oder $x=C.y$ sein, der zweite, dafs $y\,dy+x\,dx=0$, oder $x^2+y^2=D^2$ sein soll. Von jedem Puncte der Kegelfläche kann man also nach zwei verschiedenen, und zwar auf einander senkrechten Richtungen so fortgehn, dafs die beiden nächsten Normallinien in einerlei Ebne liegen, und diese beiden Richtungen liegen, die eine in der durch den ersten Punct gezognen Seitenlinie des Kegels, die andre in dem durch den ersten Punct gezogenen, der Grundfläche parallelen Kreise.

311. Lehrsatz. Von jedem Puncte einer Fläche kann man nach zwei Richtungen zu benachbarten Puncten fortgehen, deren Normallinien die Normallinie des ersten Punctes schneiden, und diese beiden Richtungen sind auf einander senkrecht.

Beweis. Dafs es zwei solche Richtungen giebt, erhellt schon aus der für $\frac{dy}{dx}$ gefundenen quadratischen Gleichung, die für diesen Quotienten einen doppelten Werth giebt. Um aber die gegenseitige Lage jener beiden Richtungen sogleich auf die bequemste Projection zu beziehen, wollen wir annehmen, die Ebne der x, y sei mit der Berührungs-Ebne in dem zu betrachtenden Puncte parallel. Dieses ist keine Beschränkung unsrer vorigen Betrachtungen,

denn die Projection auf die Ebne der x, y, erhalten wir durch jene Gleichungen immer, welche Lage auch diese Ebne habe; ist sie aber der Berührungs-Ebne parallel, so giebt der Werth von $\frac{dy}{dx}$ nicht Projectionen der beiden verlangten Richtungen, sondern diese selbst an, und zugleich ist nun $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{dz}{dy}\right) = 0$. Daher wird unsre Gleichung nun

$$\frac{dy^2}{dx^2} \cdot \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) + \frac{dy}{dx}\left\{\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) - \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\right\} - \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) = 0,$$

also wenn ich kurz $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = r$; $\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) = s$; $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = t$ nenne,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t-r}{2s} \pm \frac{\sqrt{\{4s^2 + (t-r)^2\}}}{2s},$$

so dafs der eine Werth

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(t-r) + \sqrt{(4s^2 + (t-r)^2)}}{2s},$$

der andre $\frac{dy}{dx} = \frac{(t-r) - \sqrt{(4s^2 + (t-r)^2)}}{2s}$ ist.

Das Product beider Werthe ist bekanntlich gleich dem letzten Gliede der Gleichung, wenn diese so vorbereitet worden, dafs ihr höchstes Glied keinen Coefficienten mehr bei sich hat; also ist, wenn ich den ersten Werth durch $\frac{dy'}{dx'} = tang\,\zeta'$, den andern durch $\frac{dy''}{dx''} = tang\,\zeta''$, andeute,

$\frac{dy'}{dx'} \cdot \frac{dy''}{dx''} + 1 = 0$, oder $tang\,\zeta' \cdot tang\,\zeta'' + 1 = 0$,

oder $Sin\,\zeta'\,Sin\,\zeta'' + Cos\,\zeta'\,Cos\,\zeta'' = 0$, oder $Cos\,(\zeta' - \zeta'') = 0$, das ist $\zeta' - \zeta'' = 90°$, oder beide Richtungen auf einander senkrecht.

312. Bemerkung. Im Allgemeinen sind diese zwei, auf einander senkrechten Richtungen die einzigen, nach welchen man auf der krummen Fläche fortgehen darf, wenn man Normallinien antreffen will, welche die erste Normallinie schneiden; aber es giebt Fälle, wo man nach allen Richtungen fortgehen dürfte. Dieses ist zum Beispiel in jedem Puncte der Kugelfläche und im Scheitelpuncte der durch Umdrehung entstandenen Flächen der Fall.

Für die Kugel nämlich würde, wenn $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ist, die in §. 309. gefundene Bedingungsgleichung in jedem einzelnen Gliede identisch, also gültig für jeden Werth von $\frac{dy}{dx}$. Und eben das fände statt, wenn man im Sphä-

roid, dessen Gleichung $\frac{x^2+y^2}{l^2}+\frac{z^2}{m^2}=f^2$, den Punct nähme, für welchen $x=y=0$, $z=mf$ ist; und so ist es am Scheitel jeder durch Umdrehung entstandenen Fläche.

313. Erklärung. Wenn man von irgend einem Puncte zu demjenigen benachbarten Puncte fortgeht, der eine die vorige Normallinie schneidende Normallinie hat, wenn man von diesem nach derselben Gegend zu einem dritten fortgeht, dessen Normallinie die des zweiten Punctes schneidet, und wenn man so von Punct zu Punct fortfährt, so verfolgt man eine der Krümmungslinien der krummen Fläche. Ebenso hätte man von demselben Puncte ausgehn, und nach der auf jene Richtung senkrechten Richtung zur nächsten schneidenden Normallinie und in demselben Sinne fortgehend zu allen den Puncten gelangen können, deren unendlich nahe Normallinien einander schneiden, und beschriebe so die zweite durch jenen Punct gehende Krümmungslinie.

Alle andern von jenem Puncte ausgehenden Linien auf der krummen Fläche haben keine sich schneidende Normallinien, man kann also nach diesen andern Richtungen hin, der Fläche keine bestimmte Krümmung zuschreiben, und wenn man eine andre krumme Linie auf der Fläche beschreibt, so sind die Krümmungshalbmesser, die man der Curve, als Linie betrachtet, beilegen würde, keinesweges Krümmungshalbmesser der Fläche, vielmehr nicht einmal Normallinien derselben.

Solche zwei auf einander senkrechte Krümmungslinien kann man nun von jedem Puncte der Fläche aus ziehen und wir legen daher der Fläche in jedem Puncte zwei verschiedene Krümmungen bei, deren Halbmesser sich angeben lassen.

314. Aufgabe. Die beiden Krümmungshalbmesser der Fläche für einen gegebnen Punct zu finden.

Auflösung. In §. 309. ergaben sich drei Gleichungen zur Bestimmung der drei Coordinaten u, v, w des den beiden Normallinien gemeinschaftlichen Durchschnittspunctes. Da $u-x$, $v-y$, $w-z$, die Unterschiede zwischen seinen Coordinaten und denjenigen Coordinaten sind, welche dem Puncte der krummen Fläche zugehören, so hat man offenbar die Länge beider Normallinien bis zum Durchschnittspuncte, oder den Krümmungshalbmesser $=\sqrt{((u-x)^2+(v-y)^2+(w-z)^2)}$, der aus den ersten zwei Gleichungen

$$=(w-z)\cdot\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}} \text{ ist.}$$

$(w-z)$ aber wird gefunden, wenn man aus den beiden dortigen Werthen das $\frac{dy}{dx}$ eliminirt. Man erhält nämlich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(w-z)\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) - \left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)}{\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right) - (w-z)\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)} = \frac{(w-z)\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) - \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)}{1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 - (w-z)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)}$$

$$\text{also } (w-z)^2 \left\{\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) - \left(\frac{d^2z}{dx.dy}\right)^2\right\}$$

$$+(w-z)\left\{2\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) - \left(1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) - \left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\right\}$$

$$+1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 = 0.$$

Ich will diese Gleichung kurz durch

$$(w-z)^2 \cdot g + (w-z)\,h + k^2 = 0$$

ausdrücken, damit $w - z = \frac{-h}{2g} \pm \frac{\sqrt{(h^2 - 4gk^2)}}{2g}$

also der Krümmungshalbmesser $= (w-z) \cdot k$

$$= \frac{hk}{2g} \mp \frac{k}{2g}\sqrt{(h^2 - 4gk^2)}, \text{ werde,}$$

wo man für g, h, k^2 ihre Werthe setzen müſste.

Der Werth des Krümmungshalbmessers wird als ein doppelter gefunden, weil eben der Ausdruck für beide Krümmungslinien gilt; und ebenso hat $w - z$ zwei Werthe, um die beiden Durchschnittspuncte anzugeben, die auf der Normallinie des Punctes, von welchem wir ausgingen, durch die nächste Normallinie der einen und der andern Krümmungslinie gebildet werden.

315. Wenn man statt der ganz allgemeinen Bestimmung diejenige suchte, wo die Ebne der x, y, der Berührungs-Ebne an dem ersten Puncte parallel genommen, also

$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{dz}{dy}\right) = 0$ ist, so wäre $k^2 = 1$ und $h = -\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) - \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$

und wenn man kurz $\left(\frac{dz}{dx}\right) = p$; $\left(\frac{dz}{dy}\right) = q$;

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = r; \quad \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) = s; \quad \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = t,$$

setzt, so ist in dieser Voraussetzung

$$\text{der Krümmungshalbmesser} = \frac{-(r+t) \mp \sqrt{((r-t)^2+4s^2)}}{2(rt-s^2)}.$$

316. Beispiel. Den Krümmungshalbmesser eines Paraboloids zu finden, dessen Gleichung $y^2 + nx^2 = az$ ist.

Hier ist $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{2nx}{a}$; $\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{2y}{a}$;

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = \frac{2n}{a};\quad \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) = 0;\quad \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \frac{2}{a},$$

also $g = \frac{4n}{a^2}$; $h = -\left(1+\frac{4y^2}{a^2}\right)\frac{2n}{a} - \left(1+\frac{4n^2x^2}{a^2}\right)\cdot\frac{2}{a}$;

$$k^2 = 1 + \frac{4(n^2x^2+y^2)}{a^2};$$

woraus der Krümmungshalbmesser gefunden wird:

$$= \frac{\sqrt{(a^2+4n^2x^2+4y^2)}}{8n}\cdot\left\{-2(n+1) - \frac{8(y^2+nx^2)n}{a^2}\right.$$
$$\left.\pm\sqrt{\left\{4\left(n+1+\frac{4n(y^2+nx^2)}{a^2}\right)^2 - \frac{16n(a^2+4n^2x^2+4y^2)}{a^2}\right\}}\right\}.$$

Dieser Ausdruck zeigt, dafs für ein negatives n, oder für das hyperbolische Paraboloid, die beiden Werthe entgegengesetzte Zeichen erhalten, also die Krümmung der Krümmungslinien immer so beschaffen ist, dafs sie ihre Convexität nach entgegengesetzten Seiten kehren.

Für $n = -1$ ist

$$R = \frac{-\sqrt{(a^2+4(x^2+y^2))}}{a^2}\left\{y^2 - x^2 \pm \sqrt{\left[(y^2-x^2)^2 + \frac{a^4}{4} + a^2(x^2+y^2)\right]}\right\}.$$

Beim elliptischen Paraboloid haben beide Krümmungshalbmesser einerlei Zeichen. Im Scheitel dieser Flächen, wo $x = y = 0$, erhalten wir den Krümmungshalbmesser

$$= \frac{-(n+1)a}{4n} \mp \frac{a}{4n}(1-n)$$

der für ein positives n zwei negative Werthe $= -\frac{a}{2n}$

und $= -\frac{a}{2}$;

erhält; für ein negatives n dagegen, einen positiven Werth und einen negativen Werth, wie es den beiden auf einander senkrechten parabolischen Schnitten dieser Flächen gemäfs ist.

317. Bemerkung. Durch diese Betrachtungen gelangen wir also zur Beantwortung der Frage, wiefern hier von einer Kugel, die mit der Fläche gleiche Krümmung habe, die Rede sein darf. Geben wir dem Halbmesser dieser Kugel den einen der eben gefundnen zwei Werthe, so sind die in dem ersten und zweiten Puncte der Krümmungslinie an die Fläche gelegten Berührungs-Ebnen zugleich Berührungs-Ebnen der Kugel, und diese hat folglich eben die Krümmung, welche die krumme Fläche nach der Richtung der Krümmungslinie hat. Ebenso ließe sich für die zweite Krümmungslinie eine zweite Kugel von einem anderm Halbmesser (nämlich dem zweiten Werthe des Krümmungshalbmessers gleich,) angeben, die ebenfalls nach dieser zweiten Richtung die Krümmung der Fläche angäbe.

Wenn man andre Ebnen durch die Normallinie des ersten Punctes legt, so bilden diese allerdings mit der krummen Fläche Durchschnittscurven, und man könnte den Krümmungshalbmesser dieser Durchschnittscurven suchen. Daſs diese Krümmungshalbmesser nicht als der Fläche zugehörig angesehen werden können, erhellt aus dem Vorigen; ihre Betrachtung aber führt zu einer merkwürdigen Eigenschaft jener Krümmungshalbmesser, die den Krümmungslinien zugehören.

318. Lehrsatz. Wenn man durch die Normallinie irgend eines Punctes der krummen Fläche mehrere Ebnen legt, und den Krümmungshalbmesser für jede der so entstehenden Durchschnittslinien in eben jenem Puncte sucht; so erhält dieser seinen gröſsten Werth bei derjenigen Durchschnittslinie, die in den zunächst liegenden Puncten mit der einen Krümmungslinie zusammenfällt, und seinen kleinsten Werth bei derjenigen Durchschnittslinie, die in ihren nächsten Puncten mit der andern Krümmungslinie zusammenfällt oder sie berührt.

Beweis. Um sogleich, da die Wahl der Coordinaten uns frei steht, diejenigen Coordinaten zu wählen, welche die bequemsten Formeln geben, wollen wir x, y, als in einer auf der Normallinie jenes zu betrachtenden Punctes senkrechten Ebne liegend ansehn, z ist dann mit der Normallinie parallel. Wenn wir uns nun eine Ebne so durch die Normallinie gelegt denken, daſs $dy = m\,dx$ ist, für die Durchschnittslinie dieser Ebne mit der Ebne der x, y: so sind die Differentiale der in der Ebne der Durchschnittscurve liegenden Coordinaten u und z, durch $du = dx\sqrt{(1+m^2)}$ und dz bestimmt, und diese beiden kleinen Linien du, dz sind in der Ebne der Durchschnittscurve auf einander senkrecht. Da aber die Ebne der x, y, in welcher sich auch u befindet, so liegt, daſs $dz = 0$ ist, (die Tangente nämlich mit jener Ebne parallel), so ist $ds = du$, und wenn man du als das unveränderliche Differential annimmt, so ist der Krümmungshalbmesser $= \frac{ds^3}{du \,.\, d^2z} = \frac{(1+m^2)\,dx^2}{d^2z}$.

Aber $d^2 z$ ist als Function zweier Gröſsen anzusehen,

$$d^2 z = \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) dx^2 + 2 \left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) dx\,dy + \left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) dy^2,$$

also hier, wo $dy = m\,dx$ ist,

$$d^2 z = dx^2 \left\{ \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) + 2m \left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) + m^2 \left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) \right\}$$

und der Krümmungshalbmesser der Durchschnittscurve ist

$$R = \frac{1 + m^2}{\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) + 2m \left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) + m^2 \left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right)}.$$

Wenn man von einer dieser Durchschnittscurven zur andern übergeht, so ändert sich bloſs m, indem alle durch denselben Punct gehen, dessen Normallinie mit der Ordinate z parallel ist. Soll also R ein Gröſstes oder Kleinstes werden, so muſs $dR = 0$ sein, wenn man in Beziehung auf m differentiirt; das heiſst, es muſs

$$2m \left\{ \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) + 2m \left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) + m^2 \left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) \right\} - (1 + m^2) \left\{ 2 \left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) + 2m \left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) \right\},$$

$$\text{oder } m \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) + (m^2 - 1) \left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) - m \left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = 0, \text{ sein.}$$

Für die Durchschnittscurven also, welche den gröſsten oder kleinsten Krümmungshalbmesser haben, ist, wenn ich $\frac{dy}{dx}$ statt m setze,

$$\frac{dy^2}{dx^2} \cdot \left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) + \frac{dy}{dx} \left\{ \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) - \left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) \right\} - \left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) = 0$$

und dadurch wird für $\frac{dy}{dx}$ eben der Werth bestimmt, den wir §. 311. für die Krümmungslinien fanden.

319. **Aufgabe.** Die Projectionen der ganzen Krümmungslinien auf die Ebnen der Coordinaten zu finden.

Auflösung. Die Gleichung für $\frac{dy}{dx}$ (in §. 309.) giebt zwar zunächst nur die Richtung an, nach welcher man zu dem nächsten Puncte fortgehen muſs, wenn man auf der Projection der Krümmungslinie bleiben will; aber da alle übrigen Gröſsen gegebne Functionen von x und y sind, so bedarf es offenbar nur der Integration der zwischen dy und dx gefundenen Gleichung, um die ganze Projection zu finden. Eine zweite Projection würde man auf eben

dem Wege finden. Die Integration wird, vermöge des doppelten Werthes für $\frac{dy}{dx}$, die Projectionen beider Krümmungslinien auf die eine Ebne zugleich geben.

320. Beispiel. Die Krümmungslinien des Paraboloides zu bestimmen. Die Gleichung für jedes Paraboloid ist $nx^2 + y^2 = az$. Die allgemeine Gleichung für die Projection der Krümmungslinien auf die Ebne der x, y wird also nach §. 309.

$$\frac{dy^2}{dx^2}\left[-\frac{8nxy}{a^3}\right] + \frac{dy}{dx}\left[\frac{2n(a^2+4y^2)}{a^3} - \frac{2(a^2+4n^2x^2)}{a^3}\right] + \frac{8n^2xy}{a^3} = 0,$$

$$\text{oder } dy^2 - \left(\frac{a^2+4y^2}{4xy} - \frac{a^2+4n^2x^2}{4nxy}\right) dy\,dx - n\,dx^2 = 0.$$

Wenn man aus dieser Gleichung dy suchen und dann integriren wollte, so käme man auf sehr verwickelte Gleichungen; ich will daher nach Monge's Anleitung *) das Integral vermittelst einer zweiten Differentiirung suchen.

Die obige Differentialgleichung läſst sich so ausdrücken,

$$xy\,dy - \left(\tfrac{1}{4}a^2 + y^2 - \frac{a^2}{4n} - nx^2\right) dx - nxy\,\frac{dx^2}{dy} = 0$$

und gewährt dann den Vortheil, daſs beim abermaligen Differentiiren die Gröſse a sogleich wegfällt, und

$$\left\{1 + n\,\frac{dx^2}{dy^2}\right\}\left\{xy\,d^2y - y\,dx\,dy + x\,dy^2\right\} = 0$$

gefunden wird. Es muſs also offenbar der letzte Factor gleich Null oder $\frac{y}{x}d^2y + dy \,.\, d\frac{y}{x} = 0$ sein, das ist $\frac{y\,dy}{x} = C\,dx$. Daraus würde $y^2 = Cx^2 + D$ folgen; aber da wir nur von einer Differentialgleichung des ersten Grades ausgegangen sind, so wird eine der beiden Gröſsen C, D durch die gegebnen beständigen Gröſsen bestimmt. Setzen wir nämlich in die gegebne Gleichung

$$y\,dy = Cx\,dx;\; y^2 = Cx^2 + D \text{ und } \frac{y}{dy} = \frac{x}{dx} + \frac{D}{Cx\,dx},$$

so ergiebt sich daſs $D = \frac{1-n}{n\,.\,(C+n)} \cdot \frac{1}{4}a^2 C.$ sein muſs;

also $y^2 = C\left(x^2 + \frac{1-n}{n.(C+n)} \cdot \frac{1}{4}a^2\right)$ ist.

*) Monge application de l'analyse à la Geometrie pag. 123. Section XVI.

Diese Projectionen sind also Hyperbeln oder Ellipsen, je nachdem C positiv oder negativ wird. Aber C wird durch die gegebne Lage des Punctes durch welchen die Krümmungslinie gehen soll, bestimmt; soll zum Beispiel für ihn $x=\lambda a$ und $y=\mu a$ sein, so muſs $\mu^2 - C\lambda^2 = \frac{C(1-n)}{4n(C+n)}$ sein,

$$C = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\mu^2}{\lambda^2} - n - \frac{1-n}{4n\lambda^2}\right) \pm \sqrt{\left\{\frac{n\mu^2}{\lambda^2} + \tfrac{1}{4}\left(\frac{\mu^2}{\lambda^2} - n - \frac{1-n}{4n\lambda^2}\right)^2\right\}}.$$

Daraus lassen sich die Projectionen beider durch diesen Punct gehender Krümmungslinien bestimmen, deren eine elliptisch, die andre hyperbolisch wird.

Um eine zweite Projection zu erhalten, will ich y als die durch x, z ausgedrückte Gröſse ansehn, und dann $\frac{dz}{dx}$ suchen, wofür offenbar die Gleichung folgende sein wird

$$\frac{dz^2}{dx^2}\left(\left\{1+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right\}\left(\frac{d^2y}{dx\,dz}\right) - \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dy}{dz}\right)\left(\frac{d^2y}{dz^2}\right)\right)$$
$$+\frac{dz}{dx}\left(\left\{1+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right\}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) - \left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}\left(\frac{d^2y}{dz^2}\right)\right)$$
$$-\left(\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}\left(\frac{d^2y}{dx\,dz}\right) - \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dy}{dz}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\right) = 0$$

Aber aus $y^2 = az - nx^2$ folgt

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{nx}{y};\quad \left(\frac{dy}{dz}\right) = \frac{a}{2y};$$
$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = -\frac{n}{y} - \frac{n^2x^2}{y^3} = \frac{-naz}{y^3};$$
$$\left(\frac{d^2y}{dx\,dz}\right) = \frac{anx}{2y^3};\quad \left(\frac{d^2y}{dz^2}\right) = -\frac{a^2}{4y^3},$$

also $\frac{dz^2}{dx^2}.4anx(az-nx^2) - \frac{dz}{dx}.2a(4nz+na-a)(az-nx^2)$
$$-4anx(1-n)(az-nx^2) = 0;$$

oder $\frac{dz^2}{dx^2} - \frac{dz}{dx}\,\frac{(4nz+(n-1)a)}{2nx} + (n-1) = 0;$

eine Gleichung deren Integral offenbar in der Form $z = \alpha x^2 + \beta$ enthalten ist, wenn man α unbestimmt läſst, β aber $= \frac{(n-1)}{4\alpha} - \tfrac{1}{4}\,\frac{a(n-1)}{n}$ setzt.

Man hätte diese Gleichung $z = \alpha x^2 + \mathfrak{C}$ leichter gefunden, wenn man mit Hülfe der ersten Projection den Werth von z gesucht hätte, welcher irgend einem Puncte der Krümmungslinie zukömmt. Setzen wir nämlich in der Hauptgleichung $nx^2 + y^2 = az$, $y^2 = Cx^2 + D$, so ist für Puncte in der Krümmungslinie $(n + C)x^2 + D = az$,

$$\text{also } \alpha = \frac{n+C}{a} \text{ und } \mathfrak{C} = \frac{D}{a} = \frac{(1-n)}{4n\alpha}(a\alpha - n).$$

321. Wenn $y = 0$ sein soll, oder man die Krümmungslinien für einen Punct sucht, der sich in dem durch x, z gelegten Hauptschnitte befindet: so wird in der ersten Projection der doppelte Werth von C so bestimmt, daſs $\mu = 0$ ist; der eine Werth von C ist also $= 0$ und deshalb $y = 0$; der zweite Werth von C ist $= -\left(n + \frac{1-n}{4n\lambda^2}\right)$, also

$$y^2 = \left(n + \frac{1-n}{4n\lambda^2}\right)(-x^2 + a^2\lambda^2) =$$

und es ergiebt sich also, daſs die Projection der einen Krümmungslinie die Axe selbst ist, oder daſs diese Krümmungslinie mit dem Hauptschnitte zusammenfällt; die Projection der andern Krümmungslinie ist eine Ellipse so lange $4n^2\lambda^2 + 1 > n$ ist, oder so lange $\lambda^2 > \frac{n-1}{4n^2}$. Für ein negatives n wird die Projection immer eine Hyperbel, indem für $n = -m$,

$$y^2 = \frac{4m^2\lambda^2 + 1 + m}{4m\lambda^2}(x^2 - a^2\lambda^2) \text{ ist.}$$

Wenn zugleich $\lambda = 0$ ist, oder der Punct, von welchem die Krümmungslinien ausgehen, im Scheitel selbst liegt, so ist entweder $y = 0$, oder $y^2 = \frac{n-1}{0} \cdot x^2$, welches $x = 0$ giebt; da sind also die beiden Hauptschnitte selbst die Krümmungslinien. Für jeden andern Punct eines Hauptschnittes fällt zwar die eine Krümmungslinie mit dem Hauptschnitte zusammen, die andre aber ist eine doppelt gekrümmte Curve, die unter einem rechten Winkel in jene eintrifft.

322. Wenn das elliptische Paraboloid ein durch Umdrehung entstandenes ist, so hat man $n = 1$, und dann kann C in der Gleichung $y^2 = Cx^2 + \frac{Ca^2(1-n)}{n(C+n)}$ die beiden Werthe $\frac{\mu^2}{\lambda^2}$ oder -1 erhalten; der erste Werth giebt eine gradlinigte, der andre eine durch $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{n}$ ausgedrückte, also Kreisförmige Projection, wie es auch bei runden Körpern sein

mufs, wenn man die Projectionen in Beziehung auf die Ebne sucht, gegen welche die Umdrehungs-Axe senkrecht ist.

323. **Lehrsatz.** Für jeden Punct irgend einer Kegelfläche ist die eine durch ihn gehende Krümmungslinie eine grade Linie, die andre eine krumme Linie, die für alle Puncte eine ähnliche Gestalt hat.

Beweis. Wenn man die Spitze der Kegelfläche zum Anfangspuncte der Coordinaten macht, so ist $z = y.f:\left(\frac{x}{y}\right)$ die Gleichung für jede Kegelfläche. Nach der gewöhnlichen Bezeichnungs-Art, wo $= d.f:u = duf':u$, ist, also hier

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = f':\frac{x}{y};\ \left(\frac{dz}{dy}\right) = f:\frac{x}{y} - \frac{x}{y}f':\frac{x}{y};$$

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = \frac{1}{y}f''.\frac{x}{y};\ \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) = -\frac{x}{y^2}f'':\frac{x}{y};$$

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = +\frac{x^2}{y^3}f'':\frac{x}{y}.$$

Die Formel für $\frac{dy}{dx}$ wird also, wenn ich statt der Functionen nur f, f', f'' schreibe

$$\frac{dy^2}{dx^2}\left\{-\frac{x}{y^2}f''\left(1+f^2-\frac{2x}{y}ff'+\frac{x^2}{y^2}f'^2\right)-\frac{x^2}{y^3}ff'f''+\frac{x^3}{y^4}f'^2f''\right\}$$

$$+\frac{dy}{dx}\left\{\frac{1}{y}f''\left(1+f^2-\frac{2x}{y}ff'+\frac{x^2}{y^2}f'^2\right)-\frac{x^2}{y^3}f''(1+f'^2)\right\}$$

$$+\left\{(1+f'^2)\frac{x}{y^2}f''+\frac{1}{y}f'f''\left(f-\frac{x}{y}f'\right)\right\}=0,$$

oder

$$\left\{\frac{x\,dy}{y\,dx}-1\right\}\left\{-\left(\frac{dy}{dx}+\frac{x}{y}\right)f''-\frac{dy}{dx}f^2f''+\left(\frac{x\,dy}{y\,dx}-1\right)ff'f''\right\}=0$$

Diese Gleichung kann also auf doppelte Weise $=0$ werden, erstlich indem $x\,dy = y\,dx$ oder $y = Cx$ ist, und dieses ist die Gleichung für die grade Linie als eine der beiden Krümmungslinien, zweitens indem $\frac{dy}{dx}\left\{1+f^2-\frac{x}{y}ff'\right\} = -\frac{x}{y} - ff'$ ist. Aber $1+f^2-\frac{x}{y}ff'$ ist offenbar eine blofse Function von $\frac{x}{y}$ und ebenso ist $\frac{x}{y}+ff'$ eine blofse Func-

tion von $\frac{x}{y}$, also soll vermöge des zweiten Factors, oder für die zweite Krümmungslinie $\frac{dy}{dx} = \varphi : \left(\frac{x}{y}\right)$ sein, wenn ich den Quotienten jener zwei Functionen $= \varphi : \frac{x}{y}$ setze, und hiedurch wird angezeigt, dafs diese Projectionen allemal ähnliche Curven bilden. Denn so lange $\frac{x}{y}$ einerlei bleibt, das ist, so lange man auf einer und derselben Seitenlinie des Kegels fortgeht, bleibt vermöge dieser Gleichung der Werth von $\frac{dy}{dx}$ ungeändert, oder mit andern Worten, für alle diese Puncte sind die an den Projectionen der Krümmungslinien gezogenen Tangenten parallel, und dafs damit die Aehnlichkeit gegeben ist, erhellt von selbst.

Dieser Beweis geht zwar anscheinend nur auf eine Projection der Krümmungslinien; aber da die Lage der Ebne, worauf projicirt wird, ganz unbestimmt ist, so gilt dasselbe für die Projectionen auf alle Ebnen, und folglich sind auch die Krümmungslinien selbst einander ähnlich.

324. Bemerkung. Wenn man, auf einer dieser Krümmungslinien fortgehend, sich die sämmtlichen Normallinien der krummen Fläche denkt, die den verschiedenen Puncten jener Linie zugehören: so liegen diese alle in einer zusammenhängenden Fläche, welche zu denen gehört, die wir in der Folge als einer Abwickelung fähig werden kennen lernen. Ohne jetzt diese Eigenschaft näher zu untersuchen, läfst sich wenigstens übersehen, dafs unter den graden Linien, woraus die ganze Fläche gleichsam zusammen gesetzt ist, jede zwei einander unendlich nahe liegenden sich in dem Krümmungs-Mittelpuncte des Punctes der krummen Fläche, dem sie angehören, durchschneiden; dafs also die ganze Folge dieser Linien eine Reihe solcher Durchschnittspuncte, folglich das bilden wird, was ich im Vorigen eine Knotenfurche genannt habe, die hier freilich von eigenthümlicher Beschaffenheit ist. Alle Krümmungsmittelpuncte, die dieser Krümmungslinie angehören, liegen auf dieser Knotenfurche. Es läfst sich ferner leicht übersehn, dafs jede einzelne Normallinie eine Berührende dieses geometrischen Ortes der Durchschnittspuncte ist, weil sowohl die ihr zunächst vorgehende, als die ihr zunächst folgende Normallinie in sie einschneidet, und dadurch zwei auf ihr liegende unendlich nahe Puncte jener Linie bestimmt.

Wenn man, von einem bestimmten Puncte der krummen Fläche ausgehend, beide Krümmungslinien verfolgt, so durchschneiden sich die beiden Normalflächen einander senkrecht, und die Normallinie, von welcher man

ausging, ist die Durchschnittslinie. Jede dieser Normalflächen hat ihre eigne Knotenfurche, die im Allgemeinen einander nicht schneiden, sondern von jener gemeinschaftlichen Durchschnittslinie in den zwei Puncten berührt werden, wo die beiden Krümmungs-Mittelpuncte jenes Punctes der krummen Fläche liegen.

325. Betrachtet man eine ganze Folge der in demselben Sinne von verschiedenen Puncten aus gezogenen Krümmungslinien, und stellt sich die ihnen zugehörenden Normalflächen mit ihren Knotenfurchen vor: so befindet sich die ganze Folge dieser Knotenfurchen in einer neuen krummen Fläche. Da jede der Knotenfurchen eine ganze Folge der Krümmungs-Mittelpuncte einer Krümmungslinie enthielt, so liegen alle Krümmungs-Mittelpuncte aller in demselben Sinne gezogener Krümmungslinien auf dieser Fläche, die also die Fläche der Krümmungs-Mittelpuncte ist.

Genau ebenso könnte man die Fläche der Krümmungs-Mittelpuncte für die zweite Folge von Krümmungslinien finden. Beide Flächen werden von allen Normallinien der krummen Fläche berührt. Jede Berührungs-Ebne einer der Normalflächen ist auch eine Berührungs-Ebne der jenem Systeme von Normalflächen zugehörenden Fläche der Krümmungs-Mittelpuncte.

Legt man durch einen Punct A der krummen Fläche zwei Berührungs-Ebnen an die durch ihn gehenden Normalflächen: so berührt die eine derselben die eine Fläche der Krümmungs-Mittelpuncte, die andre derselben die andre Fläche der Krümmungs-Mittelpuncte. Die Berührungspuncte liegen auf ein und derselben, nämlich der von A ausgehenden Normallinie, und da die Ebnen auf einander senkrecht sind, so würde ein in A befindliches Auge die Richtungen, in welchen die Berührungen an beiden Flächen der Krümmungs-Mittelpuncte liegen, als auf einander senkrecht sehen. Daraus folgt der merkwürdige Satz, dafs die beiden Flächen der Krümmungs-Mittelpuncte, welche zu einer krummen Fläche gehören, so gegen einander liegen, dafs ihre scheinbaren Umrisse von irgend einem Puncte A aus gesehn, sich in irgend einem Puncte unter rechten Winkeln zu durchschneiden scheinen.

326. Im Allgemeinen liegen die beiden Krümmungs-Mittelpuncte, welche einem bestimmten Puncte der krummen Fläche entsprechen, in verschiedenen Puncten derselben Normallinie; es kann aber der Fall vorkommen, dafs sie in einen Punct zusammenfallen. Da wo dieses statt findet, hat die krumme Fläche eine vollkommen sphärische Krümmung, das heifst, alle durch diesen Punct auf der krummen Fläche gezognen Curven haben hier einerlei Krümmung, und die Kugel, die mit einer der Krümmungslinien an dieser Stelle gleiche Krümmung hat, schliefst sich gleich eng an sie alle an. Dafs dieses der Fall sein mufs, erhellt daraus, weil die Krümmungshalbmesser der beiden durch denselben Punct gehenden Krümmungslinien die äufsersten

Werthe sind, zwischen welchen die Krümmungshalbmesser aller andern durch jenen Punct gehenden auf der Fläche gezognen Curven liegen; sind also jene gleich, so sind diese alle gleich.

327. Aufgabe. Diejenigen Puncte auf einer gegebnen krummen Fläche zu bestimmen, welche eine sphärische Krümmung haben.

Auflösung. Da hier die Krümmungshalbmesser beider durch denselben Punct gehender Krümmungslinien gleich sein müssen: so verschwindet der irrationale Theil in dem Ausdrucke für den Krümmungshalbmesser, und in §. 314. ist $h^2 = 4gk^2$, die Gleichung, welche, in Verbindung mit der Hauptgleichung für die krumme Fläche, alle die Puncte angiebt, wo die Krümmung sphärisch ist.

328. Beispiel. Anzugeben, ob es auf dem Paraboloid Puncte sphärischer Krümmung giebt. Nach §. 316. muſs für sie

$$\frac{4n}{a^2}(a^2 + 4n^2x^2 + 4y^2) = \left(n + 1 + \frac{4n}{a^2}(y^2 + nx^2)\right)^2,$$

$$\text{oder } (n-1)^2 - 8n(n-1)\left(\frac{nx^2 - y^2}{a^2}\right) + \frac{16n^2}{a^4}(y^2 + nx^2)^2 = 0,$$

$$\text{oder } y^4 + y^2\left(\frac{4n^2x^2 + (n-1)a^2}{2n}\right) = -\left(n^2x^4 - \tfrac{1}{2}(n-1)a^2x^2 + \frac{(n-1)^2a^4}{16n^2}\right)$$

$$y^2 = -nx^2 - \frac{n-1}{4n}a^2 \pm \sqrt{\{n-1\}}\,ax.$$

Dieser Werth von y^2 wird nur möglich, wenn n positiv und gröſser als 1 ist, y selbst wird aber immer unmöglich; also haben die Paraboloide keine Puncte sphärischer Krümmung.

329. Aufgabe. Die Gleichung für die krumme Fläche zu finden, worin die Krümmungs-Mittelpuncte einer gegebnen Fläche liegen.

Auflösung. Die in §. 314. für $w - z$ angegebne Gleichung giebt w als Function von x, y, z an, und da die Gleichungen in §. 309. die Coordinaten u und v durch w und eben jene drei Gröſsen bestimmen, so haben wir drei Gleichungen zwischen diesen 6 Gröſsen, die nämlich dienen, die Lage des Krümmungs-Mittelpunctes für irgend einen gegebnen Punct der krummen Fläche anzugeben. Wenn man aus diesen die Gröſsen x, y, z mit Hülfe der Hauptgleichung eliminirt, so hat man eine Gleichung zwischen u, v, w, die für alle Krümmungs-Mittelpuncte paſst und also die Gleichung für den geometrischen Ort der Krümmungs-Mittelpuncte ist.

330. Um hier doch ein Beispiel zu geben, das nicht in allzu großse Verwickelungen führt, will ich in §. 316. $n = 1$ setzen oder das durch Umdrehung entstandene elliptische Paraboloid betrachten. Dann wird (§. 314. 316.)

$$w - z = \tfrac{1}{2}a + \frac{x^2 + y^2}{a} \pm \sqrt{\left\{\tfrac{1}{4}a^2 + (x^2 + y^2) + \frac{(x^2 + y^2)^2}{a^2} - \frac{a^2}{4} - (x^2 + y^2)\right\}}$$

oder $w - z = \tfrac{1}{2}a + \frac{x^2 + y^2}{a} \pm \frac{x^2 + y^2}{a} = \tfrac{1}{2}a + z \pm z,$

$$u - x = -\frac{2x}{a}(w - z) = -\frac{x}{a}(a + 2z \pm 2z),$$

$$v - y = -\frac{y}{a}(a + 2z \pm 2z).$$

Für die eine Fläche der Mittelpuncte ist also

$$w = \tfrac{1}{2}a + 3z; \quad \text{oder } z = \tfrac{1}{3}w - \tfrac{1}{6}a,$$

$$x = -\tfrac{6}{4}\frac{au}{2w - a} \text{ und } y = -\tfrac{3}{2}\frac{av}{2w - a},$$

woraus $\tfrac{27}{2}a(u^2 + v^2) = (2w - a)^3$ folgt, oder $u^2 + v^2 = \tfrac{16}{27}\frac{(w - \frac{1}{2}a)^3}{a}$

und dieses ist (wie voraus zu sehen war,) die Gleichung für diejenige Fläche, welche durch Umdrehung der Evolute der Parabel (§. 56.) entsteht. Für die andre Fläche der Mittelpuncte ist $z = w - \tfrac{1}{2}a$, $u = 0 = v$, also der geometrische Ort aller zu diesem Systeme gehörigen Krümmungs-Mittelpuncte ist die Axe des Paraboloides, für welche $u = v = 0$ ist.

331. Auch für das hyperbolische Paraboloid ließse sich, wenn $n = -1$ ist, die Rechnung noch wohl durchführen, indem

$$w - z = \frac{y^2 - x^2}{a} \pm \frac{\sqrt{((x^2 - y^2)^2 - \frac{1}{4}a^4 - (x^2 + y^2)a^2)}}{a}$$

oder $w - z = z \pm \sqrt{(z^2 - \tfrac{1}{4}a^2 - (x^2 + y^2))}$, ist, und daraus die Gleichung zwischen u, v, w gefunden würde.

332. Anmerkung. Welche Anwendung die hier vorgetragenen Lehren auf die Bestimmung der besten Form der Gewölbesteine gestatten, hat Monge in den Application de l'analyse à la géométrie, p. 121, gezeigt. — Auch die allgemeinen, hier vorgetragenen Sätze sind dort vollständig erläutert, so daſs sein Vortrag mir zum Muster gedient hat.

Dritter Abschnitt.

Von den doppelt gekrümmten Curven.

333. Aufgabe. Es sind zwei grade Linien durch Gleichungen für zwei Projectionen auf Ebnen, die gegen einander senkrecht sind, gegeben, man soll bestimmen, ob diese beiden graden Linien in einer Ebne liegen.

Auflösung. Wenn $y = \alpha + \beta x$ und $z = \gamma + \varepsilon x$, die Gleichungen für die eine Linie sind, und $v = \alpha + \beta' x$, $w = \gamma' + \varepsilon' x$ die Gleichungen für die andre Linie: so muſs es, wofern die Linien einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct haben oder in einer Ebne liegen sollen, einen Werth von x geben, wo $v = y$, $w = z$ wird. Da wo dies der Fall ist, mag x' die Abscisse sein, so ist $\alpha + \beta x' = \alpha' + \beta' x'$
und $\gamma + \varepsilon x' = \gamma' + \varepsilon' x'$,

also $x' = \frac{\alpha - \alpha'}{\beta' - \beta} = \frac{\gamma - \gamma'}{\varepsilon' - \varepsilon}$. Hierin liegt also die Bedingung, wodurch bestimmt wird, daſs die beiden Linien einander schneiden, wenn
$\frac{\alpha - \alpha'}{\beta - \beta'} = \frac{\gamma - \gamma'}{\varepsilon - \varepsilon'}$ in den Gleichungen für die gegebnen Linien sind.

Wenn $\beta = \beta'$ und $\varepsilon = \varepsilon'$ so sind die Linien parallel.

334. Aufgabe. Es sind die Gleichungen für zwei Projectionen einer krummen Linie auf zwei gegen einander senkrechte Ebnen gegeben; man soll bestimmen, ob die Curve eine ebne oder eine doppelt gekrümmte sei.

Auflösung. Wenn man die beiden Projectionen kennt, so läſst sich (1. Th. §. 760.) die Lage jeder Tangente angeben, und nach §. 333. bestimmen, ob diese im Allgemeinen in derselben Ebne liegen.

335. Wenn für zwei Puncte der krummen Linie die drei Coordinaten x', y', z' und x'', y'', z'' sind, so erhellt (1. Th. §. 760.) daſs

$$v = y' + \left(\frac{dy'}{dx'}\right)(u - x') \text{ und } w = z' + \left(\frac{dz'}{dx'}\right)(u - x'),$$

die beiden Gleichungen für die Projectionen der Tangente am ersten Puncte, dagegen

$$v = y'' + \left(\frac{dy''}{dx''}\right)(u - x'') \text{ und } w = z'' + \left(\frac{dz''}{dx''}\right)(u - x''),$$

die Gleichungen für die Projectionen der Tangente am zweiten Puncte sind, wenn man nämlich unter u, v, w die drei Coordinaten irgend eines Punctes dieser Tangenten versteht. Damit diese in einer Ebne liegen, muſs

$$\frac{y'-y''+\frac{dy''}{dx''}.x''-\frac{dy'}{dx'}.x'}{\frac{dy'}{dx'}-\frac{dy''}{dx''}}=\frac{z'-z''+\frac{dz''}{dx''}.x''-\frac{dz'}{dx'}x'}{\frac{dz'}{dx'}-\frac{dz''}{dx''}}$$

sein.

336. Beispiel. Für zwei Projectionen der Schraubenlinie waren (1. Th. §. 662.)

$$y^2=r^2-x^2 \text{ und } z=n.r.\,Arc\,Cos\,\frac{x}{r}.$$

also $\frac{dy}{dx}=\frac{-x}{y}$; $\frac{dz}{dx}=\frac{-nr.}{\sqrt{(r^2-x^2)}}$.

Es sei nun $x'=0$ und $x''=r.\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, so ist $y'-y''=r(1-\sqrt{\tfrac{1}{2}})$;

$z'-z''=\frac{nr\pi}{4}$.

$\frac{x''dy''}{dx''}-\frac{x'dy'}{dx'}=-r\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ und $\frac{dy'}{dx'}-\frac{dy''}{dx''}=1$,

$\frac{x''dz''}{dx''}-\frac{x'dz'}{dx'}=-nr$ und $\frac{dz'}{dx'}-\frac{dz''}{dx''}=n(\sqrt{2}-1)$;

da nun $1-\sqrt{\tfrac{1}{2}}-\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ nicht $=\frac{\frac{n\pi}{4}-n}{n(\sqrt{2}-1)}$ ist, so liegen jene zwei Tangenten nicht in einer Ebne.

337. Beispiel. Wenn wir in §. 252. nicht aus andern Gründen die dort gefundene Curve als eine ebne Curve anerkannt hätten, so würden wir hier folgende Bestimmung erhalten.

Es sei, um die Rechnung etwas abzukürzen, $a=0$
also $r^2-by-c\sqrt{(r^2-x^2-y^2)}=0$ die Gleichung für eine
und $r^2-cz-b\sqrt{(r^2-x^2-z^2)}=0$ die Gleichung für die andre Projection.
Daraus wird für jene

$$y=\frac{br^2+c\sqrt{\{(b^2+c^2)(r^2-x^2)-r^4\}}}{b^2+c^2} \text{ und}$$

für diese $$z=\frac{cr^2+b\sqrt{\{(b^2+c^2)(r^2-x^2)-r^4\}}}{b^2+c^2},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-cx}{\sqrt{\{(b^2+c^2)(r^2-x^2)-r^4\}}};\quad \frac{dz}{dx} = \frac{-bx}{\sqrt{\{(b^2+c^2)(r^2-x^2)-r^4\}}}.$$

Ich will diese Gleichungen zu Bestimmung der Tangente an den zwei Puncten, wo $x' = 0$ und $x'' = r.\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ ist, anwenden, dann wird

$$y' - y'' = \frac{br^2 + cr.\sqrt{(b^2+c^2-r^2)}}{b^2+c^2} - \frac{br^2 + cr\sqrt{(\tfrac{1}{2}b^2+\tfrac{1}{2}c^2-r^2)}}{b^2+c^2}$$

$$z' - z'' = \frac{br.\{\sqrt{(b^2+c^2-r^2)} - \sqrt{(\tfrac{1}{2}b^2+\tfrac{1}{2}c^2-r^2)}\}}{b^2+c^2};$$

$$\frac{x''dy''}{dx''} - \frac{x'dy'}{dx'} = \frac{+cx'^2}{r\sqrt{(b^2+c^2-r^2)}} - \frac{cx''^2}{r.\sqrt{(\tfrac{1}{2}b^2+\tfrac{1}{2}c^2-r^2)}} = \frac{-\tfrac{1}{2}cr}{\sqrt{(\tfrac{1}{2}b^2+\tfrac{1}{2}c^2-r^2)}}$$

also wenn ich $\sqrt{(b^2+c^2-r^2)} - \sqrt{(\tfrac{1}{2}b^2+\tfrac{1}{2}c^2-r^2)} = A$ nenne

$$y' - y'' + \frac{x''dy''}{dx''} - \frac{x'dy'}{dx'} = \frac{Acr}{b^2+c^2} - \frac{\tfrac{1}{2}cr}{\sqrt{(\tfrac{1}{2}b^2+\tfrac{1}{2}c^2-r^2)}} = \frac{-A\sqrt{(b^2+c^2-r^2)}.cr.}{(b^2+c^2)\sqrt{(\tfrac{1}{2}b^2+\tfrac{1}{2}c^2-r^2)}}$$

$$\text{und}\quad \frac{y' - y'' + \frac{x''dy''}{dx''} - \frac{x'dy'}{dx'}}{\frac{dy'}{dx'} - \frac{dy''}{dx''}} = \frac{-A.\sqrt{(b^2+c^2-r^2)}\,r\sqrt{2}}{(b^2+c^2)}.$$

Genau eben das giebt der von z abhängige Theil der Gleichung und die so bestimmten zwei Tangenten liegen in einer Ebne. Da für jede zwei andern Tangenten aber das statt fände, so ist die Curve eine ebne Curve.

338. Erklärung. Obgleich die doppelt gekrümmten Curven so beschaffen sind, dafs man kein endliches Stück derselben als in ein und derselben Ebne liegend, ansehn kann, so ist es doch offenbar, dafs man durch jede drei unmittelbar auf einander folgende Puncte eine Ebne legen kann. Wir wollen diese für irgend einen gegebenen Punct die sich anschliefsende Ebne nennen. Dagegen versteht man unter Normal-Ebne für irgend einen Punct diejenige, welche auf der an diesen Punct gezogenen Tangente senkrecht ist.

339. Aufgabe. Es ist eine Curve durch zwei Gleichungen zwischen drei Coordinaten gegeben, man sucht die Gleichung für die sich in einem bestimmten Puncte anschliefsende Ebne.

Auflösung. Es sei $Au + Bv + w + D = 0$ die Gleichung für die gesuchte Ebne. Da sie durch den vermittelst x, y, z bestimmten Punct gehn soll, so erhellt sogleich, dafs $A(u-x) + B(v-y) + w - z = 0$ sein mufs. Aber sie soll auch durch den Punct gehn, dessen drei Coordinaten $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ sind, und endlich durch den Punct, dessen Coordinaten

$x + 2dx + d^2x$; $y + 2dy + d^2y$; $z + 2dz + d^2z$, also ist auch
$Adx + Bdy + dz = 0$, und
$Ad^2x + Bd^2y + d^2z = 0$.

Daraus ergiebt sich $B = \frac{dz\, d^2x - dx\, d^2z}{dx.d^2y - dy.d^2x}$ und

$$A = \frac{dy\, d^2z - dz\, d^2y}{dx\, d^2y - dy\, d^2x}$$

und die Gleichung für die anschliefsende Ebne ist

$$(u - x)(dy d^2z - dz d^2y) + (v - y) dz d^2x - dx d^2z) + (w - z)(dx d^2y - dy d^2x) = 0,$$

die man etwas abkürzen kann, wenn man die Aenderungen der einen Ordinate als immer gleich, zum Beispiel $d^2x = 0$ annimmt.

340. Beispiel. Für die Schraubenlinie ist

$$y^2 = r^2 - x^2 \text{ und } z = nr\, Arc\, Cos\, \frac{x}{r},$$

$$dy = \frac{-rdx}{y};\ d^2y = -\frac{r^2dx^2}{y^3}; \text{ wenn } d^2x = 0 \text{ ist,}$$

$$\text{und } dz = \frac{-nrdx}{y};\ d^2z = \frac{-nrxdx^2}{y^3}.$$

Die allgemeine Gleichung für die anschliefsende Ebne ist daher $uny - vnx - r(z - w) = 0$.

Wendet man dies auf einzelne Puncte an, zum Beispiel wo $x = 0$, $y = r$, $z = n.r.\frac{1}{2}\pi$ ist, so ist da $nu - \frac{1}{2}n\pi r = -w$, oder die an dieser Stelle sich anschliefsende Ebne schneidet in die Abscissen-Ebne so ein, dafs für die ganze Durchschnittslinie mit der Grundfläche des Cylinders u den constanten Werth $= +\frac{1}{2}\pi r$ hat, diese Einschnittslinie also mit v parallel ist. Diese Durchschnittslinie bleibt dieselbe bei jedem Werthe von n, weil n zwar die Höhe des um einen Quadranten entfernt liegenden Punctes E (Fig. 71.) ändert, aber genau ebenso auch die Neigung des bei E liegenden Elementes der Curve, so dafs die Entfernung CU immer gleich der Länge des Quadranten AF bleibt. Für $x = r$, $y = 0$, $z = 0$, wäre die Gleichung $vn = w$; sie pafst (Fig. 71.) auf den Punct A, und zeigt dafs die Ebne in AC die Grundfläche schneidet, und eine Neigung $= \zeta$ hat, die durch $tang\, \zeta = n$ angegeben wird.

341. Bemerkung. Die Bestimmung dieser Ebne lehrt nun auch die Curve als eine ebne oder als eine doppelt gekrümmte erkennen, indem bei den ebnen Curven die anschliefsende Ebne einerlei bleibt, für alle Puncte der Curve.

342. Aufgabe. Die Gleichungen für die Normal-Ebne in jedem Puncte einer Curve zu bestimmen.

Auflösung. Wenn $A(u-x)+B(v-y)+w-z=0$ die Gleichung für die Normal-Ebne an dem durch x, y, z bestimmten Puncte ist, so ist $\frac{B}{A}=+\frac{dy}{dx}$ und $\frac{1}{A}=+\frac{dz}{dx}$, also die Gleichung

$$dx(u-x)+dy(v-y)+dz(w-z)=0.$$

Die Normal-Ebne mufs nämlich die Eigenschaft haben, dafs ihre Durchschnittslinie mit der Ebne x, y, senkrecht gegen die in dieser Ebne gezeichnete Projection der Berührungslinie ist, und eben das mufs in Beziehung auf die Ebne x, z gelten. Da nun die Tangente des Winkels, welchen die erste Projection mit x macht, $=\frac{dy}{dx}$ ist, so wird die Tangente des Winkels, den jene erste Durchschnittslinie mit x macht $=-\frac{dx}{dy}$ sein müssen, wie es unsre Gleichung ergiebt.

343. Bemerkung. Wenn man diese Normal-Ebnen für zwei, einander sehr nahe liegende Puncte sucht, so haben sie eine gemeinschaftliche Durchschnittslinie, und wenn man so fortgeht, so kann man den geometrischen Ort aller dieser Durchschnittslinien bestimmen. Auf jeder solcher Durchschnittslinie zweier Normal-Ebnen befindet sich der Krümmungs-Mittelpunct für die Stelle der Curve, denen die Normal-Ebnen zugehören, und die Bestimmung der Krümmungshalbmesser hängt also von diesen Ebnen und ihren Durchschnittslinien ab.

344. Aufgabe. Die Gleichungen für die Durchschnittslinie zweier unmittelbar auf einander folgender Normal-Ebnen zu finden.

Auflösung. Wenn die Gleichung für eine dieser Ebnen ist

$$dx(u-x)+dy(v-y)+dz(w-z)=0,$$

so ist die Gleichung für die nächste

$$(dx+d^2x)(u-x-dx)+(dy+d^2y)(v-y-dy)$$
$$+(dz+d^2z)(w-z-dz)=0,$$

also $(u-x)d^2x+(v-y)d^2y+(w-z)d^2z-dx^2-dy^2-dz^2=0.$

Da nun für die Durchschnittslinie beider, diese beiden Gleichungen zu gleicher Zeit gelten, so kann man aus ihnen eine der drei Coordinaten eliminiren, und erhält für die Projectionen der Durchschnittslinie, wenn man $dx^2+dy^2+dz^2=ds^2$ setzt,

$$(u-x)(dz\,d^2x-dx\,d^2z)+(v-y)(dz\,d^2y-dy\,d^2z)-ds^2\,dz=0,$$
$$(u-x)(dy\,d^2x-dx\,d^2y)+(w-z)(dy\,d^2z-dz\,d^2y)-ds^2\,dy=0,$$
$$(v-y)(dx\,d^2y-dy\,d^2x)+(w-z)(dx\,d^2z-dz\,d^2x)-ds^2\,dx=0.$$

345. Aufgabe. Eine Gleichung für den geometrischen Ort aller dieser Linien oder für die krumme Fläche zu finden, welche diese sämmtlichen Durchschnittslinien in sich enthält.

Auflösung. Mit Hülfe der Gleichungen, die man erstlich als Gleichungen für die krumme Linie, und dann als Gleichungen für zwei Projectionen der Durchschnittslinie der Normal-Ebnen hat, (denn die Gleichung für die dritte Projection ist in diesen zweien schon enthalten), eliminirt man die drei Gröfsen x, y, z, um die Rücksicht auf einen besondern Punct der Linie aufzuheben: so hat man die gesuchte Gleichung.

346. Beispiel. Für die Schraubenlinie ist

$$y^2 = r^2 - x^2,\ z = nr.\,Arc\ Cos\ \frac{x}{r}.$$

$$dy = -\frac{x\,dx}{y};\quad dz = \frac{-nr\,dx}{y}.$$

$$d^2y = -\frac{r^2\,dx^2}{y^3}.$$

$$d^2z = \frac{-nrx\,dx^2}{y^3}.$$

Die Gleichungen für die Projectionen der Durchschnittslinien sind also

$$ux + vy + n^2r^2 = 0,$$
$$ru - nwy + nzy + n^2rx = 0,$$
$$vr + nwx - nzx + n^2ry = 0,$$

und es ergiebt sich nun zum Beispiel, dafs für $y = 0$, womit $x = r$, $z = 0$ zusammengehört, $u = -n^2r$, $v = -nw$ wird. In dem Puncte A also (Fig. 71.) den wir den Anfangspunct der Schraubenlinie nennen können, liegt die Durchschnittslinie zweier Normal-Ebnen so, dafs sie sich in einer auf AC senkrechten Ebne befindet, und in ihr unter einem Winkel gegen die Grundfläche geneigt ist, dessen Cotangente $= n$ ist.

Wenn man in der Gleichung für die erste Projection statt y seinen Werth setzt, so ist sie

$$ux + v\sqrt{(r^2 - x^2)} + n^2r^2 = 0,$$

und wenn man in der letzten Gleichung y und z durch x ausdrückt, also

$$vr + nwx - n^2xr\ Arc\ Cos\ \frac{x}{r} + n^2r\sqrt{(r^2 - x^2)} = 0$$

so müfste aus diesen beiden Gleichungen x eliminirt, nämlich in der letzten

$$x = \frac{-n^2r^2u \pm \sqrt{(u^2 + v^2 - n^4r^2)}\,rv}{u^2 + v^2}$$

gesetzt werden, um die Fläche zu finden, in welcher alle jene Durchschnittslinien sich befinden.

347. Diese Fläche wird allemal von allen Normal-Ebnen berührt und da die sämmtlichen Berührungslinien eben jene graden Durchschnittslinien sind, so ist, wie wir in der Folge sehen werden, diese Fläche eine abwickelbare, das ist eine solche, die man wie die Cylinder- und Kegelfläche in eine Ebne ausbreiten könnte, ohne dafs es irgend einer Zertrennung oder Faltung bedürfte.

348. Bemerkung. Wenn man durch irgend einen Punct A der Curve (Fig. 72.) die Normal-Ebne $FGHI$ legt, und ebenso durch den nächsten Punct B die Normal-Ebne $KLMN$, so haben diese die eben betrachtete Durchschnittslinie HI; fährt man so fort, so haben jede zwei nächste Normal-Ebnen eine gemeinschaftliche Durchschnittslinie, MN, OP, und so weiter, und die schmalen Streifen $HIMN$, $MNOP$ und so ferner die eigentlich unendlich schmal genommen werden sollten, stellen vereinigt ungefähr das dar, was wir den geometrischen Ort der Durchschnittslinien genannt, und als eine abwickelbare Fläche kennen gelernt haben.

Im Allgemeinen werden jede zwei benachbarte Durchschnittslinien einen Durchschnittspunct haben, und es ist einleuchtend, dafs die Reihe dieser Durchschnittspuncte eine Grenzcurve QRS bildet, die von den Durchschnittslinien berührt wird. Jeder solche Durchschnittspunct zweier Durchschnittslinien ist ein Punct, der drei Normal-Ebnen angehört; denn die erste Durchschnittslinie gehört der ersten und zweiten Ebne, die zweite Durchschnittslinie gehört der zweiten und dritten Ebne, der Durchschnittspunct also allen drei Ebnen an.

349. Aufgabe. Die Gleichungen zur Bestimmung eines solchen Durchschnittspunctes zu finden, und den geometrischen Ort der sämmtlichen Durchschnittspuncte zu bestimmen.

Auflösung. Für den Durchschnittspunct passen die drei Gleichungen

$$dx(u-x)+dy(v-y)+dz(w-z)=0;$$

$$(dx+d^2x)(u-x-dx)+(dy+d^2y)(v-y-dy)+(dz+d^2z)(w-z-dz)=0,$$

und

$$(dx+2d^2x+d^3x)(u-x-2dx-d^2x)+(dy+2d^2y+d^3y)(v-y-2dy-d^2y)$$
$$+(dz+2d^2z+d^3z)(w-z-2dz-d^2z)=0.$$

Daraus folgt, dafs aufser der ersten Gleichung auch noch diese zwei statt finden:

$$(u-x)d^2x+(v-y)d^2y+(w-z)d^2z-ds^2=0$$

und

$$(u-x)d^3x+(v-y)d^3y+(w-z)d^3z-3(dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z)=0,$$

weil nämlich die zweite nach Abzug der ersten giebt

$$(u-x)d^2x-dx^2-dxd^2x+(v-y)d^2y-dy^2-dyd^2y$$
$$+(w-z)d^2z-dz^2-dzd^2z=0,$$

und die dritte nach Abzug der ersten und der eben angeführten und mit 2 multiplicirten Gleichung das übrig läfst, was wir eben angegeben haben, wenn nämlich die höhern Glieder nicht beachtet werden, welche vier Differentiale enthalten würden.

Wenn man diese Bestimmungen für den Durchschnittspunct so mit den Hauptgleichungen für die doppelt gekrümmte Linie verbindet, dafs x, y, z eliminirt werden, so hat man die Gleichung für die krumme Linie, worin sich alle Durchschnittspuncte befinden.

350. Beispiel. Um für die Schraubenlinie diese Bestimmungen zu erhalten, müssen wir zu dem in §. 346. Angegebenem noch hinzufügen:

$$d^3x = 0,\ d^3y = \frac{-3r^2 x dx^3}{y^5};$$

$$d^3z = \frac{-nr dx^3}{y^3} - \frac{3nrx^2 dx^3}{y^5};$$

dann ergeben sich die drei Gleichungen

$$(u-x) - (v-y)\frac{x}{y} - (w-z)\frac{nr}{y} = 0,$$

$$-(v-y)\frac{r^2}{y^3} - (w-z)\frac{nrx}{y^3} - \left(\frac{y^2+x^2+n^2r^2}{y^2}\right) = 0,$$

$$-(v-y)\cdot\frac{3r^2x}{y^5} - (w-z)\frac{nr}{y^5}(y^2+3x^2) - 3\left(\frac{r^2x}{y^4} + \frac{n^2r^2x}{y^4}\right) = 0$$

oder

$$uy - vx - nr(w-z) = 0;$$

$$rv + nx(w-z) + n^2ry = 0,$$

und $$3vrx + n(w-z)(y^2+3x^2) + 3n^2rxy = 0,$$

wo die letzte in Verbindung mit der zweiten

$w = z$ giebt, und dadurch die zweite $v = -n^2y$

und endlich die erste $u = -n^2x$.

Der Abstand irgend eines solchen Durchschnittspunctes von der Axe der Schraubenlinie ist $= \sqrt{(u^2+v^2)} = -n^2r$, und da (Fig. 71.) er mit dem Puncte der Schraubenlinie, zum Beispiel E, womit er zusammengehört, gleich hoch liegt, weil $w = z$ ist, so findet man ihn, wenn man die von E aus auf die Axe senkrechte Linie bis dahin verlängert, wo ihr über die Axe hinausreichender Theil $= n^2r$ ist. Diese Grenzcurve ist offenbar selbst eine Schraubenlinie, gezeichnet auf einem Cylinder vom Halbmesser n^2r, wo die Höhe $z = nr\ .\ Arc\ Cos\ \frac{x}{r}$ mit dem Bogen $n^2r\ .\ Arc\ Cos\ \frac{x}{r}$ zusammengehört, also $= \frac{1}{n}$ des Bogens ist, wenn bei der gegebnen Schraubenlinie die Höhe $=$ dem nfachen des Bogens ist.

351. Diese Betrachtungen setzen uns in Stand, die krumme Fläche genauer anzugeben, in welcher alle Durchschnittslinien der einander unendlich nahen Normalflächen sich befinden. Jede dieser Durchschnittslinien ist nämlich die Berührungslinie an irgend einem Puncte der so eben betrachteten, auf dem Cylinder vom Halbmesser $= n^2 r$ gezeichneten Schraubenlinie, und unsre krumme Fläche ist gleichsam aus allen diesen Tangenten zusammengesetzt. Sie umgiebt also den Cylinder, ohne in ihn einzudringen, und trifft mit seiner Oberfläche nur da berührend zusammen, wo auf ihm die Schraubenlinie gezeichnet ist. Denkt man sich von einem Puncte dieser Schraubenlinie aus, zwei unendlich kleine Sehnen der Schraubenlinie gezogen und diese nach beiden Seiten ins Unendliche verlängert, so giebt der unendlich kleine Winkel, den beide mit einander bilden, eine trianguläre Fläche, die nach zwei entgegengesetzten Richtungen sich ins Unendliche hinaus erstreckt, und diese trianguläre Fläche ist genau so ein Element unsrer Fläche, wie es beim Doppelkegel die beiden von der Spitze ausgehenden Winkelflächen sind, die durch zwei unendlich nahe Seitenlinien gebildet werden. Ich glaube daher nicht Unrecht zu haben, wenn ich jene Schraubenlinie eine Knotenfurche oder Knotenlinie nenne, obgleich hier die beiden Linien, die auf der Fläche liegend sich in den Puncten der Schraubenlinie durchschneiden, diese Grenzcurve zugleich berühren.

Anmerkung. Monge nennt sie arète de rébroussement, was sich vielleicht am besten durch Grenzkante übersetzen läſst; — wir werden in der Folge öfter auf solche Grenzlinien geführt werden.

352. Wollten wir die Kenntniſs jener Fläche aus der Gleichung §. 346. herleiten, so ist es am besten

$$Arc.\,Cos\,\frac{x}{r} = \varphi,\quad x = r\,Cos\,\varphi,\quad y = r\,Sin\,\varphi,\quad z = nr\varphi$$

zu setzen. Dann soll, vermöge der beiden dort gefundenen Gleichungen

$$v + nw\,Cos\,\varphi - n^2 r\varphi . Cos\,\varphi + n^2 r\,Sin\,\varphi = 0$$

und $$Cos\,\varphi = \frac{-n^2 ur \pm v.\sqrt{(u^2 + v^2 - n^4 r^2)}}{u^2 + v^2}$$ sein.

Hier wird also für jedes willkürliche u, v, der zugehörige Werth von φ und daraus w gefunden, als Ordinate der Fläche in dem durch u, v bestimmten Puncte der Abscissen-Ebne. In den meisten Fällen erhält $Cos\,\varphi$ und folglich auch φ selbst einen doppelten Werth, und also gehört zu jedem gegebnen u, v, schon deshalb ein doppelter Werth von w. Ueberdas gehört nun irgend ein Werth des $Cos\,\varphi$ mit φ, $2\pi - \varphi$, $2\pi + \varphi$ und so weiter zusammen, woraus die ganze Folge der Werthe von w gefunden wird. In dem besondern Falle, wo $u^2 + v^2 = n^4 r^2$ ist, erhält $Cos\,\varphi$ nur einen Werth

$Cos\,\varphi' = -\frac{u}{n^2 r}$, und da wird $n^2 r . Sin\,\varphi' = \sqrt{(n^4 r^2 - u^2)} = v'$;

$$w' = +\frac{n v' r}{u'} + \varphi' n r - \sqrt{\left(\frac{n^4 r^2 - u'^2}{u'}\right)} n r$$

oder $w' = -n r \varphi'$ worin, wenn man für φ die sämmtlichen zu $Cos\,\varphi$ gehörigen Werthe setzt, alle Werthe von w' enthalten sind, die sämmtlich auf der schon in §. 350. betrachteten Schraubenlinie liegen.

Aus den obigen zwei Gleichungen läfst sich allgemein der durch die Axe des Cylinders gehende Schnitt jener Fläche bestimmen, der offenbar immer dieselbe Curve geben wird, durch welchen Punct man ihn führe. Es sei also $v = 0$, $Cos\,\varphi = -\frac{n^2 r}{u}$, so ist

$$w = n r \varphi - n r . tg\,\varphi = n r \left(\varphi + \frac{\sqrt{(u^2 - n^4 r^2)}}{n^2 r}\right)$$

und w erhält immer mögliche Werthe, sobald $u > n^2 r$ auf der negativen Seite ist. Hiernach liefsen sich die transscendenten Curven, welche der Schnitt darbietet, zeichnen.

353. **Bemerkung.** Wenn man für zwei, einander unendlich nahe liegende Puncte der Curve die Normal-Ebenen legt: so liegt der Krümmungs-Mittelpunct des kleinen Bogens nothwendig auf der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie beider. AB nämlich (Fig. 72.) ist gegen beide Ebnen senkrecht, oder ist anzusehn, als aus zwei kleinen, gegen die eine und gegen die andre senkrecht errichteten Linien bestehend, die also beide in der Ebne des Neigungswinkels liegen, und wenn man S in der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie annimmt, so ist $SA = SB$ und ein mit dem Halbmesser SA beschriebner Kreis würde die Curve in A und in B tangiren. Das gäbe eine Unbestimmtheit im Halbmesser des Kreises, den wir als mit dem Theilchen der Curve zusammenfallend ansehn können; denn in der That erhalten wir solche Kreise, wo wir auch S auf der Durchschnittslinie nehmen mögen. Ziehen wir aber, statt den willkürlichen Punct S anzunehmen, von A und B aus zwei Senkrechte auf HI, so ist eine solche Senkrechte der kleinste Halbmesser jener Kreise, und dieser ist es, den wir im eigentlichen Sinne den Krümmungshalbmesser der Curve nennen.

354. **Aufgabe.** Den Krümmungshalbmesser für einen gegebnen Punct der Curve zu finden.

Auflösung. Für jeden durch u, v, w gegebnen Punct S der Durchschnittslinie ist $SA = \sqrt{((u-x)^2 + (v-y)^2 + (w-z)^2)}$ und vermöge der in §. 344. gefundenen Werthe kann man den Werth von

$SA^2 = (u-x)^2 . U + (u-x) V + W$, ansetzen,

wenn für $d^2x=0$,

$$U=\frac{(dz\,d^2y-dy\,d^2z)^2+dx^2d^2z^2+dx^2d^2y^2}{(dz\,d^2y-dy\,d^2z)^2};$$

$$V=\frac{2ds^2\,dx\,.\,(dz\,d^2z+dy\,d^2y)}{(dz\,d^2y-dy\,d^2z)^2};$$

$$W=\frac{ds^4\,(dz^2+dy^2)}{(dz\,d^2y-dy\,d^2z)^2},$$

ist. Aber dieser Abstand wird, wenn man u veränderlich annimmt, oder den Punct S in Fig. 72. anders annimmt, am kleinsten, wenn

$$2U(u-x)+V=0, \text{ oder } u-x=-\frac{V}{2U}$$

$$\text{also } R^2=-\frac{V^2}{4U}+W \text{ ist,}$$

$$\text{oder } R^2=\frac{ds^6}{dx^2d^2z^2+dx^2d^2y^2+(dz\,d^2y-dy\,d^2z)^2},$$

als Ausdruck für das Quadrat des eigentlichen oder kleinsten Krümmungshalbmessers.

355. Beispiel. Für die Schraubenlinie ist also nach §. 346. $R^2=r^2(1+n^2)^2$, oder der Krümmungshalbmesser $=r(1+n^2)$, von beständiger Gröſse, wie es die Natur der Sache fordert.

356. Bemerkung. Es ist einleuchtend, daſs für jeden Punct der gegebnen krummen Linie alle Puncte, die so wie S als Mittelpuncte angesehn werden können, sich auf der krummen, abwickelbaren Fläche befinden, welche wir als den geometrischen Ort der Durchschnittslinien der Normal-Ebnen kennen gelernt haben. Jeder dieser Radien AS berührt jene Fläche, weil er in einer Normal-Ebne liegt, die allemal eine berührende Ebne dieser Fläche ist.

Man kann eine ganze Folge zusammen gehörender Mittelpuncte erhalten, die genau das darstellen, was wir bei ebnen Curven Evolute nannten. Sind nämlich AS, BS, in zwei unendlich nahen Normal-Ebnen nach einem willkürlichen Puncte ihrer gemeinschaftlichen Durchschnittslinie gezogen, so wird, wenn man die zweite BS verlängert, diese die dritte Normal-Ebne in U treffen, und $UB=UC$ werden eben solche Radien für das zweite Theilchen der Curve sein, wie $SA,=SB$ es für das erste Theilchen waren. Die auf gleiche Weise fortgesetzte Linie $SUVW$ auf der abwickelbaren Fläche, enthält also nicht allein eine Folge von Mittelpuncten, sondern alle Radien berühren auch diese Curve, und jeder folgende UB ist von den vorigen SA um so viel als das Theilchen SU dieser Curve beträgt, verschieden, so daſs AB durch Abwickelung der $SUVW$ entsteht.

Wenn T der eigentliche Krümmungs-Mittelpunct für den Punct A ist, so liefse sich auch von ihm aus eine solche Evolute ziehen; aber diese geht nicht durch die den benachbarten Puncten zugehörigen eigentlichen Krümmungs-Mittelpuncte, weil keine zwei unmittelbar auf einander folgende eigentliche Krümmungshalbmesser in ein und derselben Ebne liegen können, wenn nicht die Curve eine ebne Curve ist, oder grade in dem Puncte, auf welchem man seine Betrachtung richtet, einen Wendungspunct hat.

357. Die sämmtlichen Evoluten liegen also auf der schon oft erwähnten abwickelbaren Fläche, die daher auch die Fläche der Evoluten heifsen kann.

358. Aufgabe. Die Linie der eigentlichen Krümmungs-Mittelpuncte zu finden.

Auflösung. Für die Lage des Krümmungs-Mittelpunctes gelten erstlich die Gleichungen, die wir §. 344. für die Durchschnittslinie zweier Normal-Ebnen fanden,

$$v-y=\frac{ds^2.dz+(u-x)(dx\,d^2z)}{dz\,d^2y-dy\,d^2z}$$

$$w-z=\frac{-ds^2dy-(u-x)dx\,d^2y}{dz\,d^2y-dy\,d^2z};$$

aber zweitens auch die Gleichung §. 354. $u-x=-\frac{V}{2U}$,

oder $$u-x=\frac{-dx.ds^3.d^2s}{(dz\,d^2y-dy\,d^2z)^2+dx^2(d^2y^2+d^2z^2)}$$

woraus also $$v-y=\frac{ds^2(d^2y.dx^2+dz(dz\,d^2y-dy\,d^2z))}{(dz\,d^2y-dy\,d^2z)^2+dx^2(d^2y^2+d^2z^2)}$$

$$w-z=\frac{ds^2(dx^2d^2z+dy(dy\,d^2z-dz\,d^2y)}{(dz\,d^2y-dy\,d^2z)^2+dx^2(d^2y^2+d^2z^2)}$$

folgt.

Für die Schraubenlinie wird $u=-n^2x$; $v=-n^2y$, $w=z$, wie in §. 350.

359. Bemerkung. Wenn die doppelt gekrümmten Curven Knoten oder Spitzen haben, so müssen die Gleichungen für die Lage der Tangente ebenso wie bei ebnen Curven von einem höhern Grade sein, oder eine mehrfache Lage angeben. Die Untersuchung hierüber würde ebenso einzuleiten sein, wie wir es in den Betrachtungen über ebne Curven und über krumme Flächen gezeigt haben, so wie es die später vorkommenden Beispiele für einzelne Curven zeigen.

Die Untersuchungen über die unendlichen Aeste dieser Curven haben dagegen mehr Schwierigkeit, sobald man allgemeine Regeln aufzufinden sucht. Die Gleichung für eine der Projectionen kann diese als in unendlichen Aesten fortlaufend angeben, wenn gleich die doppelt gekrümmte Curve selbst in einem endlichen Raume begrenzt ist, denn sehr oft entsprechen nicht allen Puncten der Projection reelle Werthe der dritten Ordinate, wie wir schon in dem Beispiele im 1. Theil §. 757. gesehn haben. Im einzelnen Falle würde die Untersuchung sich ausführen lassen, wenn man für eine Reihe von Abscissen die beiden zugehörigen Ordinaten berechnete, oder auch wenn eine der Projectionen unendliche Aeste hat, sich durch die allgemeinen Formeln überzeugte, ob den sehr weit hinaus liegenden Puncten mögliche Werthe der dritten Ordinate entsprächen.

360. Bemerkung. Eine Betrachtung, die sich an das Vorige näher anschliefst, ist die Bestimmung der Wendungspuncte. Im Allgemeinen ist die Behauptung richtig, dafs eine doppelt gekrümmte Curve vermöge des Gesetzes der Stetigkeit, keine vier unmittelbar auf einander folgende Puncte in derselben Ebne hat, oder dafs die sich anschliefsende Ebne sogleich eine andre wird, wenn man zu dem vierten Puncte übergeht; aber als Ausnahme kann der Fall eintreten, dafs die Lage der sich anschliefsenden Ebne auf irgend eine Weise ein Gröfstes oder Kleinstes erreicht, und deshalb auch der vierte Punct an einer solchen Stelle mit den drei vorhergehenden in einer Ebne ist. Wo das eintritt, da liegt ein einfacher Wendungspunct. In solchen Puncten hat die Curve dennoch einen endlichen Krümmungshalbmesser. Aber wenn zugleich der Krümmungshalbmesser entweder unendlich oder $=0$ wird, so hat die Curve einen Punct doppelter Wendung.

361. Aufgabe. Die Gleichung für einfache Wendungspuncte zu finden.

Auflösung. Wenn die Curve einen Punct einfacher Wendung hat, so mufs für ihn die Lage der anschliefsenden Ebne dieselbe bleiben, für vier auf einander folgende Puncte.

Es mufs daher nicht blofs wie in §. 339.

$$A(u-x)+B(v-y)+w-z=0,$$
$$A\,dx+B\,dy+dz=0$$
und $$A\,d^2x+B\,d^2y+d^2z=0, \text{ sein,}$$
sondern auch $$A\,d^3x+B\,d^3y+d^3z=0.$$

Aus den beiden letztern folgt, wenn man d^2x und $d^3x=0$ setzt

$$B=-\frac{d^2z}{d^2y}=-\frac{d^3z}{d^3y}, \text{ also } d^2y\,d^3z-d^2z.d^3y=0, \text{ als Bedin-}$$

gungsgleichung, die statt finden mufs, während übrigens A und B ebenso wie in §. 339. bestimmt werden.

362. Im Allgemeinen nämlich ginge für den nächsten Punct die Gleichung für die anschliefsende Ebne

$$(u-x)(dy\,d^2z-dz\,d^2y)-(v-y)\,dx\,d^2z+(w-z)\,dx\,d^2y=0$$

in folgende über, die man durch Hinzufügung ihres Differentials erhält:

$$(u-x)(dy\,d^2z-dz\,d^2y+dy\,d^3z-dz\,d^3y)-(v-y)\,dx(d^2z+d^3z)$$
$$+(w-z)\,dx(d^2y+d^3y)=0.$$

In den Puncten aber, wo $d^2y\,d^3z-d^2z\,d^3y=0$ ist, oder

$d^3z=\dfrac{d^2z.d^3y}{d^2y}$, erhalten wir statt dessen

$$(u-x)(dy\,d^2z-dz\,d^2y)+(u-x)\frac{d^3y}{d^2y}(dy\,d^2z-dz\,d^2y)$$
$$-(v-y)\,dx\,d^2z-(v-y)\frac{dx.d^2z.d^3y}{d^2y}+(w-z)\,dx.d^2y+(w-z)\,dx.d^3y=0.$$

eine Gleichung, die identisch mit der Gleichung des zweiten Grades ist, also A, B, eben so giebt.

363. Aufgabe. Die Bedingungsgleichung für Puncte doppelter Wendung zu finden.

Auflösung. Da hier der Krümmungshalbmesser $=0$ oder $=\infty$ werden mufs, so mufs der Nenner des in §. 346. gefundenen Werthes von R entweder $=0$ oder $=\infty$ sein.

Nähere Betrachtung einiger Curven.

1. *Die loxodromische Linie.*

364. Erklärung. Wenn man (Fig. 73.) auf der Erde die Meridiane PLQ, PNQ'', PMQ' zieht, so heifst die Curve, welche auf der Erd-Oberfläche alle diese Meridiane unter gleichen Winkeln schneidet, die loxodromische Curve.

365. Aufgabe. Eine Gleichung für die loxodromische Curve zu finden.

Auflösung. Es sei $PM=90°-\varphi$, so dafs φ die geographische Breite des Ortes ist, die Länge desselben sei $=\psi$, also für einen unendlich nahen Meridian der Winkel $NPM=d\psi$. Soll nun der constante Winkel der Curve MN mit dem Meridian $=\alpha=NMS$ sein, so ist

$tang\,\alpha=\dfrac{NS}{MS}=\dfrac{d\psi\,Cos\,\varphi}{d\varphi}$ da der Bogen des Parallelkreises $SN=r\,d\psi\,Cos\,\varphi$

ist, wenn der Halbmesser der Kugel $= r$ ist, SM dagegen $= r d\varphi$. Hieraus folgt $d\psi = tang.\alpha.\, d\varphi.Sec\varphi$,

$$= tang\,\alpha\,.\,\frac{d.Sin\,\varphi}{Cos^2\varphi},$$

$$= tang\,.\,\alpha\left(\frac{d.Sin\,\varphi}{2\,(1 - Sin\,\varphi)} + \frac{d.Sin\,\varphi}{2\,(1 + Sin\,\varphi)}\right),$$

also $\psi = \lambda + tang\,\alpha\,.\,log.\,nat.\sqrt{\frac{1 + Sin\,\varphi}{1 - Sin\,\varphi}}$

oder $\psi = \lambda + tang\,\alpha.log.\,nat.\ Cotang.\,(45 - \frac{1}{2}\varphi)$.
wo man die Constante Gröfse λ weglassen kann, wenn man die Länge von dem Puncte an rechnet, wo die loxodromische Curve den Aequator schneidet.

366. Dafs diese Curve für $\alpha = 0$ in einen Kreis übergeht, nämlich mit dem Meridian zusammenfällt, weil sie $\psi = Const$ giebt, erhellt leicht; ebenso auch dafs sie in jedem andern Falle in unendlichen Windungen um den Pol herumläuft, ohne ihn je zu erreichen, weil ψ einen unendlichen Werth erreichen müfste, wenn $\varphi = 90°$ sein sollte. Ist $\alpha = 90°$, so ist $d\varphi = 0$, und die Curve ist ein Parallelkreis des Aequators.

367. **Aufgabe.** Die Gleichungen für zwei Projectionen der Curve zu finden.

Auflösung. Wenn $\lambda = 0$ ist oder ψ von dem Puncte an gerechnet wird, wo die Curve den Aequator schneidet, so ist, wenn z, y, in der Ebne des Aequators liegen und x darauf senkrecht ist $x = r\,Sin\,\varphi$,
$z = r\,Cos\,\varphi\,.\,Cos\,\psi = \sqrt{(r^2 - x^2)}\,Cos\,\psi$, $y = r\,Cos\,\varphi\,.\,Sin\,\psi$. Ferner ist

$$\psi = tang.\alpha.log\sqrt{\frac{r + x}{r - x}} = Arc\ Cos\,\frac{z}{\sqrt{(r^2 - x^2)}}$$

wodurch eine Gleichung zwischen x, z gefunden ist, und ebenso eine Gleichung zwischen x, y gefunden werden könnte.

368. Hieraus würde nun

$$d\varphi = \frac{dx}{\sqrt{(r^2 - x^2)}},\ d\psi = tang.\alpha.\,\frac{r\,dx}{r^2 - x^2};$$

$dy = r.\,d\psi\,Cos\,\varphi\,Cos\,\psi - r\,d\varphi\,Sin\,\varphi\,Sin\,\psi$, oder

$$dy = r.\,tang\,\alpha.\frac{dx}{\sqrt{(r^2 - x^2)}}.\,Cos\,\psi - \frac{x\,dx.\,Sin\,\psi}{\sqrt{(r^2 - x^2)}}$$

$$dz = -r\,d\varphi\,Sin\,\varphi\,Cos\,\psi - r\,d\psi\,Sin\,\psi\,Cos\,\varphi,$$

$$= \frac{-x\,dx.\,Cos\,\psi}{\sqrt{(r^2 - x^2)}} - \frac{r\,tang\,\alpha.\,dx.\,Sin\,\psi}{\sqrt{(r^2 - x^2)}}$$ folgen.

Es wird also

$$d^2y = \frac{r.tang\,\alpha.x.dx^2 Cos\psi}{\sqrt{(r^2-x^2)^3}} - \frac{r.tang\,\alpha\, dx.d\psi.Sin\psi}{\sqrt{(r^2-x^2)}} - \frac{dx^2 Sin\psi}{\sqrt{(r^2-x^2)}}$$

$$- \frac{x^2 dx^2 Sin\psi}{\sqrt{(r^2-x^2)^3}} - \frac{x\,dx\,d\psi\,Cos\psi}{\sqrt{(r^2-x^2)}}.$$

$$= \frac{-dx^2.r^2.tang^2\alpha.Sin\psi}{\sqrt{(r^2-x^2)^3}} - \frac{r^2 dx^2 Sin\psi}{\sqrt{(r^2-x^2)^3}};$$

$$d^2z = \frac{-r^2 dx^2.Cos\psi\,(tang^2\alpha+1)}{\sqrt{(r^2-x^2)^3}};$$

$$(d^2y^2 + d^2z^2) = \frac{r^4 dx^4 Sec^4.\alpha}{(r^2-x^2)^3};$$

$$dz\,d^2y - dy\,d^2z = \frac{r^3 dx^3.Sec^2\alpha.tang\,\alpha}{(r^2-x^2)^2}$$

$$dx^2(d^2y^2+d^2z^2)+(dz\,d^2y-dy\,d^2z)^2 = \frac{r^4dx^6 Sec^4\alpha(r^2-x^2)+r^6dx^6 Sec^4\alpha\, tg^2\alpha}{(r^2-x^2)^4},$$

$$= \frac{r^4 dx^6 Sec^4\alpha.\{r^2 Sec^2\alpha - x^2\}}{(r^2-x^2)^4}.$$

369. **Aufgabe.** Die Lage der Tangente gegen den Aequator zu finden.

Auflösung. Die Gleichungen für zwei Projectionen der Tangente sind

$$v = y + (u-x)\frac{(r\,tang\,\alpha\,Cos\psi - x Sin\psi)}{\sqrt{(r^2-x^2)}}.$$

$$w = z - (u-x)\frac{(x\,Cos\psi + r\,tang\,\alpha.Sin\psi)}{\sqrt{(r^2-x^2)}}.$$

370. Aus diesen Projectionen ergiebt sich der Einschnittspunct der Tangente in die Ebne des Aequators da, wo $u=0$, also

$$v - y = \frac{-x}{\sqrt{(r^2-x^2)}}(r.tang\,\alpha\,Cos\psi - x\,Sin\psi),$$

$$w - z = \frac{x\,(r.tang\,\alpha.Sin\psi + x\,Cos\psi)}{\sqrt{(r^2-x^2)}},\text{ ist,}$$

oder $$v = \frac{r\,Sin\psi - r\,tang\,\alpha.Cos\psi.Sin\varphi}{Cos\,\varphi},$$

$$w = \frac{r\,Cos\psi + r\,tang\,\alpha.Sin\psi\,Sin\varphi}{Cos\,\varphi}.$$

Aus diesen Werthen könnte man die ganze Folge von Tangenten, die an verschiedene Puncte der Curve gezogen werden, bestimmen, und so die ganze

krumme Fläche, in welcher sie sich alle befinden, kennen lernen. Diese Fläche ist wieder eine abwickelbare, deren Grenzkante die loxodromische Curve selbst ist.

371. **Aufgabe.** Die Gleichung für die Normal-Ebne zu finden.

Auflösung. Nach §. 342. ist diese Gleichung

$$u - x + \frac{dy}{dx}(v-y) + \frac{dz}{dx}(w-z) = 0,$$

also hier

$$0 = \left\{ \begin{array}{l} u - x + (v-y)\left(\frac{tang\,\alpha . Cos\,\psi - Sin\,\varphi\, Sin\,\psi}{Cos\,\varphi}\right) \\ + (w-z)\left(\frac{-Sin\,\varphi\, Cos\,\psi - tang\,\alpha . Sin\,\psi}{Cos\,\varphi}\right) \end{array} \right\};$$

oder $0 = u + v\,\frac{(tang\,\alpha\, Cos\,\psi - Sin\,\varphi\, Sin\,\psi)}{Cos\,\varphi}$

$$- w\,\frac{(Sin\,\varphi\, Cos\,\psi + tang\,\alpha\, Sin\,\psi)}{Cos\,\varphi}.$$

Diese Gleichung zeigt, daſs alle Normal-Ebnen durch den Mittelpunct gehn, was sich auch aus der bekannten Eigenschaft der Kugel, daſs jeder Radius ihre Normallinie ist, erwarten lieſs. —

372. Die Fläche, in welcher alle Durchschnittslinien dieser Normal-Ebnen sich befinden, ist offenbar eine Kegelfläche, deren Spitze im Mittelpuncte der Kugel liegt, und deren Seitenlinien durch alle Puncte der spiralförmig gewundenen loxodromischen Curve gehn. Etwas Aehnliches gilt für alle auf der Kugelfläche liegende doppelt gekrümmte Curven.

373. **Aufgabe.** Den Krümmungshalbmesser in jedem Puncte zu finden.

Auflösung. Die Formel

$$R = \frac{ds^3}{\sqrt{\{dx^2(d^2z^2 + d^2y^2) + (dz\,d^2y - dy\,d^2z)^2\}}}$$

giebt hier, wo $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{r^2\,dx^2\,Sec^2\,\alpha}{r^2 - x^2}$ ist,

und dy, dz die übrigen Gröſsen, die schon oben gefundenen Werthe haben,

$$R = \frac{r\,Sec\,\alpha \sqrt{(r^2 - x^2)}}{\sqrt{(r^2\,Sec^2\,\alpha - x^2)}}.$$

374. Für $\alpha = 0$, oder wenn die Curve mit dem Meridian zusammenfällt, ist $R = r$, weil $Sec\,\alpha = 1$ ist. Für $\alpha = 90°$, das ist, wenn die Curve

mit einem Parallelkreise zusammenfällt, ist $R = \sqrt{(r^2 - x^2)}$ = dem Halbmesser dieses Parallelkreises.

In jedem andern Falle ist $R = r$, wenn $x = 0$ ist, oder da wo die Curve den Aequator schneidet, ist ihr Krümmungshalbmesser dem Halbmesser der Kugel gleich; der Krümmungshalbmesser nimmt ab mit wachsendem x, weil $\sqrt{\frac{r^2 - x^2}{r^2 Sec^2 \alpha - x^2}}$ ein ächter Bruch ist; er nähert sich immer mehr dem Werthe $= 0$, je näher x dem Werthe $= r$ kömmt, weil gegen den Pol hin die Windungen in einen so ungemein kleinen Raum eingeschlossen sind.

375. Da $x = r . Sin\, \varphi$ ist, so hat man auch

$$R = \frac{r\, Sec\, \alpha\, Cos\, \varphi}{\sqrt{(Sec^2 \alpha - Sin^2 \varphi)}}$$

oder $$R = \frac{r\, Sec\, \alpha\, Cos\, \varphi}{\sqrt{(tang^2 \alpha + Cos^2 \varphi)}} = \frac{r}{\sqrt{(Sin^2 \alpha . tang^2 \varphi + 1)}};$$

in gleichen Breiten ist also der Krümmungshalbmesser desto kleiner, je gröſser α ist, oder je mehr sich die Curve an den Parallelkreis anschmiegt.

376. Da wir die Werthe der zweiten Differentiale so bequem ausgedrückt erhalten haben, so ist auch aus §. 339. die Gleichung für die sich anschlieſsende Ebne leicht zu finden. Sie ist

$$(u - x)\frac{r^3 Sec^2 \alpha . tang . \alpha}{(r^2 - x^2)^2} - \frac{(v - y) r^2 Sec^2 \alpha\, Cos\, \psi}{\sqrt{(r^2 - x^2)^3}} + \frac{(w - z) r^2 Sec^2 \alpha\, Sin\, \psi}{\sqrt{(r^2 - x^2)^3}} = 0;$$

oder da $y\, Cos\, \psi = \sqrt{(r^2 - x^2)}\, Sin\, \psi\, Cos\, \psi = z\, Sin\, \psi$ ist,

$$(u - x)\, tang\, \alpha = Cos\, \varphi\, (v\, Cos\, \psi - w\, Sin\, \psi).$$

Die durch einen unendlich kleinen Bogen der Curve gelegte Ebne geht also nur dann durch den Mittelpunct, wenn entweder $\alpha = 0$, oder $x = 0$ ist. Das erste gilt, wenn die Curve ein Meridian wird, das zweite gilt für jeden Werth von α nur in dem Puncte, wo die Curve den Aequator schneidet, und wo sie mit einem gröſsten Kreise berührend zusammenfällt.

Für $v = w = 0$ erhalten wir $u = x$, oder die Ebne schneidet die Erd-Axe im Mittelpuncte des Parallelkreises, in welchem der Punct liegt, wo sich die Ebne an die Curve anschmiegt. Der Radius dieses Kreises liegt also ganz in der anschmiegenden Ebne, wie sich auch, wenn man $u = x$ setzt, aus dem damit nothwendig zusammen gehörenden $v = w . tang\, \psi$, ergiebt. Der Neigungswinkel der sich anschmiegenden Ebne ist durch

$$tang^2 \zeta = \left(\frac{du}{dv}\right)^2 + \left(\frac{du}{dw}\right)^2 = \frac{Cos^2 \varphi}{tang^2 \alpha},$$

$tang\, \zeta = Cos\, \varphi . Cotang\, \alpha$, gegeben; also von $90° - \alpha$ bis zu Null abnehmend, indem die geographische Breite φ gröſser angenommen wird.

2. *Die auf der Kugel beschriebne Cycloide.*

377. Erklärung. Wenn auf der Kugelfläche ADB (Fig. 74.) ein Kreis HGI, dessen Pol D ist, gezeichnet worden, und man wälzt einen Kreis oder besser einen Abschnitt eben dieser Kugelfläche GFF auf jenem HGI fort, so beschreibt irgend ein Punct G des Umfanges eine sphärische Cycloide.

Ist der beschreibende Punct S nicht auf dem Umfange des Kreises GFF selbst, so mufs man den von dem Pole E des Kreises GFF ausgehenden, auf der Kugel-Oberfläche gezeichneten Bogen EG bis S verlängern, und den Weg suchen, den S beschreibt.

378. Aufgabe. Gleichungen zu Bestimmung jedes Punctes der sphärischen Cycloide anzugeben.

Auflösung. Es sei D der Pol des Kreises HI, auf welchem die Wälzung geschieht, $DH = DG = \alpha$. Ist nun GFF die Lage des wälzenden Kreises, wo der beschreibende Punct S am weitsten von D entfernt ist, E der Pol des wälzenden Kreises, $EG = \beta$, $ES = \gamma$: so läfst sich leicht übersehn, dafs der Bogen GK dem Bogen KL gleich ist, wenn bei der Wälzung bis K der Punct G nach L und der beschreibende Punct S nach M gekommen ist. Nennen wir also $GK = \varphi$ in Theilen des Radius ausgedrückt, so ist die Länge des Bogens $GK = r\varphi \,.\, Sin\,\alpha$, wenn r der Halbmesser der Kugel ist, also auch $KL = r\varphi\, Sin\,\alpha$, und folglich wenn N der Pol des Kreises KL ist, der Winkel $KNL = \frac{\varphi \,.\, Sin\,\alpha}{Sin\,\beta}$, weil $NL = EG = \beta$ ist.

Diese Bestimmungen dienen, um den sphärischen Winkel $SDM = \sigma$, und den Abstand $DM = \psi$ auszudrücken; denn im sphärischen Drei-Eck MDN ist $DN = \alpha - \beta$, $NM = \gamma$, $DNM = 180^\circ - \frac{\varphi \,.\, Sin\,\alpha}{Sin\,\beta}$;

und $tang\, MDN = tang\,(\varphi - \sigma) = \frac{Sin\,\gamma \,.\, Sin\,.\,m\varphi}{Cos\,\gamma \,.\, Sin\,(\alpha - \beta) + Sin\,\gamma\, Cos\,(\alpha - \beta)\, Cos\,m\varphi}$

und $Cos\, DM = Cos\,\psi = Cos\,\gamma \,.\, Cos\,(\alpha - \beta) - Sin\,\gamma\, Sin\,(\alpha - \beta)\, Cos\,.\,m\varphi$.

wenn ich $m = \frac{Sin\,\alpha}{Sin\,\beta}$ annehme. Zugleich ist auch $Sin\,(\varphi - \sigma) = \frac{Sin\,m\varphi \,.\, Sin\,\gamma}{Sin\,\psi}$.

379. Hieraus läfst sich also die Lage jedes Punctes bestimmen, wenn der Bogen der Fortwälzung bekannt ist. Verlangt man die Curve, welche der Punct G selbst beschreibt, indem er nach L fortgeht, so ist $\gamma = \beta$; wir wollen aber bei den allgemeinen Werthe γ bleiben, da die Rechnung nicht viel bequemer ist, wenn man auch $\gamma = \beta$ setzt.

Es erhellt leicht, daſs der beschreibende Punct seine gröſsten Entfernungen von D erreicht, wenn $m\varphi = 0$, $= 2\pi$; $= 4\pi$ und so weiter ist, indem dann $Cos\,\psi$ seinen geringsten Werth erhält und $\psi = \alpha + \gamma - \beta$ ist. Für $m\varphi = \pi$; $= 3\pi$; $= (2n+1)\,\pi$ kömmt der beschreibende Punct dem Pole am nächsten, und es ist da $\psi = \alpha - \beta - \gamma$, so daſs es sich sogar ereignen könnte, daſs diese höchsten Puncte über D hinaus lägen, wenn $\beta + \gamma > \alpha$ wäre. Die Cycloide ist, um diese Puncte von beiden Seiten symmetrisch, wie sich aus leichten Ueberlegungen schlieſsen läſst.

Wenn m eine rationale Zahl ist, so kömmt nach einer bestimmten Anzahl von Wälzungen der beschreibende Punct in die Curve zurück, die er schon beschrieben hat.

Für $\gamma > \beta$, giebt es einen Knoten, wie bei der verkürzten ebnen Cycloide, und man würde diesen finden, wenn man $\sigma = 0$ setzte, also φ aus der transscendenten Gleichung

$$tang\,\varphi' = \frac{Sin\,\gamma\,.\,Sin\,m\,\varphi'}{Cos\,\gamma\,.\,Sin\,(\alpha-\beta) + Sin\,\gamma\,.\,Cos\,(\alpha-\beta)\,.\,Cos\,m\,\varphi'}$$

bestimmte.

Diese Betrachtungen reichen schon zu, um uns die Form der Curve übersehen zu lassen; wir wollen nun aber aus den allgemeinen Formeln weitere Folgerungen herleiten.

380. Die vorigen Gleichungen lassen sich auf drei rechtwinkliche Coordinaten bringen. Wenn nämlich für den Punct M die senkrechte Entfernung von der Ebne ACB, $= x$, ist, und in dieser Ebne y mit CT oder dem Radius parallel ist, auf welchem der mit $\varphi = 0$ zusammengehörende Punct liegt, und z darauf senkrecht, dann ist

$$x = r\,Cos\,\psi;$$
$$y = r\,.\,Sin\,\psi\,Cos\,\sigma;$$
$$z = r\,.\,Sin\,\psi\,.\,Sin\,\sigma.$$

381. Die Differentiale werden folglich

$$dx = -r\,d\psi\,.\,Sin\,\psi = m\,d\varphi\,.\,Sin\,m\,\varphi\,.\,Sin\,\gamma\,.\,Sin(\alpha-\beta).$$
$$dy = r\,d\psi\,.\,Cos\,\psi\,Cos\,\sigma - r\,d\sigma\,Sin\,\psi\,Sin\,\sigma,$$
$$dz = r\,d\psi\,Cos\,\psi\,Sin\,\sigma + r\,d\sigma\,Sin\,\psi\,.\,Cos\,\sigma.$$

und wenn $d^2x = 0$ oder $d^2\psi\,Sin\,\psi + d\psi^2\,Cos\,\psi = 0$ oder $d^2\psi = -d\psi^2\,Cotang\,\psi$, also auch $d^2\varphi = -m\,d\varphi^2.\,Cotang\,m\varphi.$ sein soll,

$$d^2y = r.\left\{-\frac{d\psi^2\,Cos\,\sigma}{Sin\,\psi} - 2\,d\psi\,d\sigma\,Cos\,\psi\,Sin\,\sigma - d^2\sigma\,Sin\,\psi\,.\,Sin\,\sigma \right.$$
$$\left. - d\sigma^2\,Sin\,\psi\,Cos\,\sigma\right\};$$

$$d^2 z = r \left\{ -\frac{d\psi^2 \, Sin\sigma}{Sin\psi} + 2 d\psi d\sigma \, Cos\psi \, Cos\sigma + d^2\sigma \, Sin\psi \, Cos\sigma - d\sigma^2 \, Sin\psi \, Sin\sigma \right\}.$$

Ich setze zugleich noch folgende Formeln her:

$$(d^2z^2 + d^2y^2) = r^2 \left\{ \frac{d\psi^4}{Sin^2\psi} + 4 d\psi^2 d\sigma^2 Cos^2\psi + d^2\sigma^2 Sin^2\psi + d\sigma^4 Sin^2\psi + 2 d\psi^2 d\sigma^2 + 4 d\psi d\sigma d^2\sigma \, Sin\psi \, Cos\psi \right\}$$

$$\{dy\,d^2z - dz\,d^2y\} = r^2 \{2 d\psi^2 d\sigma \, Cos^2\psi + d\psi^2 d\sigma + d^2\sigma . d\psi \, Sin\psi \, Cos\psi + d\sigma^3 \, Sin^2\psi\}.$$

382. Diese Formeln gelten für alle Fälle; um aber die weitläuftigere, auf alle Fälle passende Rechnung nicht weiter fortzuführen, will ich mich begnügen, nur folgende Fälle, die einfachere Formeln geben, zu erwähnen und die beiden ersten vollständiger zu betrachten.

1. Es sei $\beta = 180° - \alpha$, oder der Umfang des wälzenden Kreises dem Umfange dessen gleich, worauf die Wälzung geschieht;

2. es sei $\beta = 90°$, oder der wälzende Kreis ein gröſster Kreis;

3. es sei $\alpha > 90°$ und $\alpha - \beta = 90°$; — so daſs der Mittelpunct des wälzenden Kreises auf dem gröſsten Kreise fortrückt, dessen Pol D (Fig. 74.) ist.

383. Erster Fall. Wenn $\beta = 180 - \alpha$, so ist $Sin\,\alpha = Sin\,\beta$ und $m = 1$, also (§. 378.)

$$Cos\psi = - Cos\gamma \, Cos 2x + Sin\gamma . Sin 2\alpha \, Cos\,\varphi;$$

$$Sin(\varphi - \sigma) = \frac{Sin\varphi . Sin\gamma}{Sin\psi},$$

$$d\psi . Sin\psi = Sin\gamma . Sin 2\alpha . d\varphi . Sin\varphi;$$

$$d\sigma = d\varphi - \frac{d\varphi . Cos\varphi . Sin\gamma}{Cos(\varphi - \sigma) \, Sin\psi} + \frac{d\psi \, Cos\psi \, Sin\varphi . Sin\gamma}{Sin^2\psi . Cos(\varphi - \sigma)}.$$

384. Es erhellt schon aus der unmittelbaren Betrachtung der Wälzung, daſs auch hier ψ am gröſsesten wird für $\varphi = 0$, und $\varphi = 2\pi$, weil da $\psi = 2\alpha + \gamma - 180° = \alpha + \gamma - \beta$ ist, und daſs es am kleinsten wird für $\varphi = 180°$, wo $\psi = 2\alpha - \gamma - 180° = \alpha - \beta - \gamma$ ist. Eben das ergeben die Formeln. Diese zeigen ferner, daſs für $\varphi = 90°$, $Cos\psi = Cos(2\alpha - 180°) \, Cos\gamma$, oder ψ die dritte Seite eines sphärischen rechtwinklichen Drei-Ecks ist, dessen beide Catheten γ und $\alpha - \beta$ sind; der beschreibende Punct befindet sich also dann auf dem gröſsesten Kreise, der den vom Mittelpuncte des wälzenden Kreises durchlaufenen Parallelkreis da

berührt, wo sich jetzt eben der Mittelpunct befindet, denn dieses Parallelkreises Abstand vom Pole ist $= \alpha - \beta$.

385. Wir wollen jetzt die Lage der Tangente der Curve nach den allgemeinen Regeln suchen, welche ihre Projectionen durch

$$v = y + \frac{dy}{dx}(u - x),$$

$$w = z + \frac{dz}{dx}(u - x),$$

angeben. Diese Formeln geben hier

$$v = \frac{r\, Cos\,\sigma}{Sin\,\psi} - \frac{r\,d\sigma}{d\psi} \cdot Sin\,\sigma\, Cos\,\psi + u\left(- Cotg\,\psi\, Cos\,\sigma + \frac{d\sigma}{d\psi}\, Sin\,\sigma\right),$$

$$w = \frac{r\, Sin\,\sigma}{Sin\,\psi} + \frac{r\,d\sigma}{d\psi}\, Cos\,\sigma\, Cos\,\psi + u\left(- Cotg\,\psi\, Sin\,\sigma - \frac{d\sigma\, Cos\,\sigma}{d\psi}\right),$$

und es ist nicht schwer, sie auf jede bestimmte Lage des wälzenden Kreises anzuwenden. Für $\varphi = 0$ ist auch $\sigma = 0$ und $d\sigma = d\varphi \cdot \left(\frac{Sin\,\psi - Sin\,\gamma}{Sin\,\psi}\right)$, dagegen $d\psi = 0$, und folglich ist $w = \infty$, die Tangente mit der Ordinate z parallel, das heiſst, die Curve berührt hier den mit HI parallelen Kreis, auf welchem der beschreibende Punct seine Bewegung anfängt.

Für jeden andern Werth von u nämlich wird w unendlich, für $u - r\, Cos\,\psi = 0$, dagegen wird w unbestimmt, um anzuzeigen, daſs jeder Punct der diesem Werthe von u entsprechenden Ordinate w ein Punct der Linie selbst ist, die wir suchen. Für $u = r\, Cos\,\psi$ wird zugleich $v = \left(\frac{r - u\, Cos\,\psi}{Sin\,\psi}\right) Cos\,\sigma = r\, Sin\,\psi$, weil $Cos\,\sigma$ hier $= 1$ ist. Damit ist die ganze Lage der Tangente in dem Puncte, wo $\varphi = 0$ ist, bestimmt.

Nur der Fall, wo $\gamma = \alpha$ ist, erfordert eine besondre Betrachtung, weil in diesem Falle $\frac{d\sigma}{d\psi} = \frac{d\varphi}{d\psi}\, \frac{(Sin\,\psi - Sin\,\gamma)}{Sin\,\psi}$ in $\frac{0}{0}$ übergeht, indem $Sin\,\psi = Sin\,\alpha = Sin\,\gamma$ wird. Diese Form deutet auch hier auf einen doppelten Punct der Curve oder auf eine doppelte Lage der Tangente. Um zu finden, was hier aus den Gleichungen wird, nehme ich φ sehr klein an, und erhalte so $\varphi - \sigma - \frac{1}{6}(\varphi - \sigma)^3 = \frac{(\varphi - \frac{1}{6}\varphi^3)\, Sin\,\beta}{Sin\,\psi}$,

oder weil hier $Cos\,\psi = Cos\,\alpha - \frac{1}{2}\varphi^2\, Sin\,\alpha .\, Sin\,2\alpha$

$Sin\,\psi = Sin\,\alpha\,(1 + \varphi^2\, Cos^2\,\alpha)$, ist,

$$\varphi - \sigma - \tfrac{1}{6}(\varphi - \sigma)^3 = (\varphi - \tfrac{1}{6}\varphi^3)(1 - \varphi^2\, Cos^2\,\alpha),$$

also nahe genug $\sigma = \varphi^3 \, Cos^2 \alpha$

$$d\sigma = \varphi^2 \, Cos^2 \alpha \, d\varphi,$$
$$d\psi = \varphi \, d\varphi \, Sin 2\alpha$$

Der Bruch $\frac{d\sigma . Sin \sigma}{d\psi} = \frac{\varphi^5 \, Cos^4 \alpha \, . \, d\varphi}{\varphi \, d\varphi \, Sin 2\alpha}$, ist also mit φ unendlich abnehmend, und folglich für $\varphi = 0$ ist, wenn $\beta = \gamma = 180° - \alpha$,

$$v = \frac{r}{Sin \alpha} - u \, Cotang \, \alpha$$
$$w = 0;$$

die Tangente liegt also in einer auf w senkrechten, durch den Mittelpunct gehenden Ebne, und ist so gegen die Ordinate v, oder gegen den nach G gerichteten Radius des Parallelkreises HGK geneigt, daſs die Tangente des Neigungswinkels $= - tang. \alpha$ ist, oder dieser Neigungswinkel selbst $= 180° - \alpha$. Offenbar ist also die Berührungslinie, an welche sich die, eine Spitze bildenden Theile der Cycloide in G anschlieſsen, einerlei mit der Tangente, die den Kreis DGT in G berührt.

Für $\varphi = 180°$, wo wieder $\varphi = \sigma$ wird, läſst sich die Untersuchung ebenso anstellen. Für andre Werthe von φ wird die Rechnung weitläuftiger ohne eine besondre Schwierigkeit darzubieten.

Wenn neben der Hauptbedingung dieses Falles zugleich $\gamma = 2\beta$ ist, so geht die Cycloide durch den entgegengesetzten Pol und für $\varphi = 0$ ist $\psi = 180°$. Die allgemeine Formel in §. 378. giebt alsdann

$$tang \, (\varphi - \sigma) = \frac{Sin \, 2\alpha \, . \, Sin \varphi}{+ Cos 2\alpha . Sin 2\alpha - Sin 2\alpha . Cos 2\alpha . Cos \varphi},$$

so daſs für $\varphi = 0$, $tang \, (\varphi - \sigma) = \frac{0}{0}$ unbestimmt wird, wie es auch geschehn muſs, da der beschreibende Punct in den Pol selbst fällt. Ebenso unbestimmt erscheint $d\psi$, und wir werden daher beide für einen sehr kleinen Werth von φ bestimmen müssen.

Ein solcher giebt $Cos \psi = Cos. 180° + \frac{1}{2} \varphi^2 . Sin^2 . 2\alpha$, weil $Sin \, \gamma = - Sin \, 2\alpha$ ist, oder $Cos \psi = - 1 + \frac{1}{2} \varphi^2 \, Sin^2 \, 2\alpha$, woraus $\psi = 180° - \varphi . Sin . 2\alpha$ folgt, so daſs die Abnahme von ψ der Aenderung von φ proportional ist, und (wie es auch der Differentialwerth zeigt,)

$$d\psi = - d\varphi . Sin \, 2\alpha, \text{ ist.}$$

Für ein so kleines φ ist

$$tang \, (\varphi - \sigma) = \frac{\varphi}{Cos \, 2\alpha \, . \, \frac{1}{2} \varphi^2}$$

also $tang \, (\varphi - \sigma)$ unendlich wachsend, wenn φ unendlich abnimmt, so daſs, wenn φ nur ein wenig von 0 verschieden ist, σ beinahe $= 90°$ oder $270°$ sein

mufs, der beschreibende Punct also nach dieser Richtung sich von dem Pole entfernt.

Die Lage der Tangente wird alsdann für $\phi = 0$ durch die beiden Gleichungen $v = \frac{(r+u)0}{0} + (r+u)\frac{d\sigma}{d\psi}$;

$$w = \frac{-(r+u)}{0} - 0.(r+u)\frac{d\sigma}{d\psi.};$$

bestimmt, die offenbar zeigen, dafs die Tangente da, wo $u = -r$ ist, mit w parallel läuft, und für diesen Werth von u auch $v = 0$ ist.

Die Tangente wird durch den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ angegeben, und das veranlafst uns, auch hier einen doppelten Punct zu vermuthen, was sich auch sogleich weiter bestätigen wird.

386. Die allgemeine Formel für den Krümmungshalbmesser (§. 354.)

$$R = \frac{ds^3}{\sqrt{\{dx^2(d^2z^2 + d^2y^2) + (dz\,d^2y - dy\,d^2z)^2\}}}$$

will ich sogleich nur auf einzelne Fälle anwenden.

Für $\phi = 0$, wo $\psi = \alpha + \gamma - \beta$ ist, wird $ds = r\,d\sigma\,Sin\,\psi$, weil der allgemeine Werth $ds^2 = r^2(d\psi^2 + d\sigma^2.\,Sin^2\psi)$, hier wegen $d\psi = 0$ bequemer wird, wenn γ nicht $= \beta$ ist. Eben der Werth ist auch $ds = r\,d\phi\,(Sin\,\psi - Sin\,\gamma)$; ferner $dx = 0$, $(dz\,d^2y - dy\,d^2z) = r^2 Sin^2\psi.\,d\sigma^3$, und folglich $R = r\,Sin\,\psi$, dem Halbmesser des Parallelkreises gleich, der hier die Cycloide berührt.

Für $\phi = 180°$ ist abermals $d\psi = 0$, und da findet eben dieser Ausdruck statt in Beziehung auf den Werth, den dort ψ erlangt.

Für $\gamma = \beta$ ist $d\sigma$ sowohl als $d\psi$ verschwindend, wenn $\phi = 0$ ist; es mufs daher der genauere Werth beider für sehr kleine ϕ erwogen werden.

Wenn man dieses thut, so zeigt sich, dafs $ds^3 = r^3\phi^3 d\phi^3 Sin^3.2\alpha$ ist, dafs die bedeutendsten Glieder von $dx^2(d^2y^2 + d^2z^2)$ die 4te Potenz von ϕ enthalten und zu eben der Ordnung auch $(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2$ gehört, weshalb der Nenner des Werthes von R an dieser Stelle nur ϕ^2 enthält, und folglich R, da wo ϕ sehr klein ist, den Factor ϕ hat, und mit ϕ unendlich abnimmt.

Für den Fall, wo $\gamma = 2\beta$ ist, so dafs mit $\phi = 0$, $\psi = 180°$ zusammengehört, erhalten wir zur Bestimmung des Krümmungshalbmessers an dieser Stelle Folgendes.

Da $\beta = 180° - \alpha$, so ist $Sin\,\beta = Sin\,\alpha$, $Sin\,\gamma = -Sin\,2\alpha$, also in §. 383. für alle Puncte dieser Cycloide

$$Cos\,\psi = -Cos^2 2\alpha - Sin^2.2\alpha.\,Cos\,\phi;$$

$$Sin(\varphi - \sigma) = -\frac{Sin 2\alpha . Sin \varphi}{Sin \psi};$$

$$d\psi . Sin \psi = - Sin^2 . 2\alpha . Sin \varphi . d\varphi;$$

$$d\sigma = d\varphi + \frac{d\varphi . Cos \varphi . Sin . 2\alpha}{Cos(\varphi - \sigma) Sin \psi} + \frac{d\varphi . Sin^3 2\alpha Sin^2 \varphi . Cos \psi}{Sin^3 . \psi . Cos(\varphi - \sigma)}.$$

Für ein sehr kleines φ wird also

$Cos \psi = -1 + \frac{1}{2} \varphi^2 Sin^2 . 2\alpha;$

$Sin \psi = \varphi . Sin 2\alpha$, wenn ich Glieder der dritten Ordnung weglasse;

$$Sin(\varphi - \sigma) = -\frac{Sin 2\alpha . (\varphi - \frac{1}{6}\varphi^3)}{\varphi Sin 2\alpha} = -1 + \frac{1}{6} \varphi^2;$$

also $\varphi - \sigma$ sehr nahe $= -90°$ oder $= 270°$

$$Cos(\varphi - \sigma) = \sqrt{(1 - 1 + \frac{1}{3}\varphi^4)} = \frac{\varphi^2}{\sqrt{3}};$$

$$d\psi = \frac{-d\varphi . Sin^2 . 2\alpha . (\varphi - \frac{1}{6}\varphi^3)}{\varphi . Sin . 2\alpha} = -d\varphi . Sin . 2\alpha (1 - \frac{1}{6}\varphi^2);$$

$$d\sigma = d\varphi - \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{\varphi} \sqrt{3} . Cos^2 . 2\alpha = \infty;$$

$d\sigma$ ist von der Ordnung, die durch $\frac{d\varphi^2}{\varphi^6}$ angegeben wird, und es läſst sich leicht zeigen, daſs R unendlich klein wird.

387. Der Fall, da γ kleiner als β ist, muſs offenbar mit der verlängerten Cycloide übereinstimmend einen Wendungspunct geben, und zwar einen Wendungspunct der ersten Art, da auf der Kugel der Krümmungshalbmesser gewiſs nicht unendlich sein kann.

Für einen solchen Punct muſs $d^2 y d^3 z - d^2 z . d^3 y = 0$ sein,

also ist $d . \frac{d^2 z}{d^2 y} = 0$ oder $\frac{d^2 z}{d^2 y} = Const$, oder $d^2 z = m . d^2 y$.

Aus dieser Gleichung müſste eigentlich, um ganz analytisch zu verfahren, der Werth von φ hergeleitet werden, welcher dem Wendungspuncte entspricht; da aber die dazu erforderliche Rechnung allzu weitläuftig zu werden scheint, so wollen wir auf einem andern Wege uns von der Richtigkeit dieser Bedingungsgleichung überzeugen. Aus der Vergleichung mit der gewöhnlichen verlängerten Cycloide erhellt nämlich wohl, daſs der Wendungspunct da liegen wird, wo der Radius des wälzenden Kreises die Cycloide berührt. Es läſst sich ferner übersehn, daſs für den die Cycloide in irgend einem Puncte berührenden gröſsten Kreis der Winkel ζ dieses Kreises mit dem durch den Pol D gehenden Kreise durch $tang\, \zeta = \frac{Sin \psi . d\sigma}{d\psi}$ gegeben wird;

eben der Winkel ist aber durch $Sin\,\Gamma = \frac{Sin\,\varphi . Sin(\alpha - \beta)}{Sin\,\psi.}$ bestimmt, wenn der Berührungskreis durch den Mittelpunct des wälzenden Kreises geht, und es muſs also $d\sigma . Sin^2\psi = Sin\,\varphi . Sin(\alpha - \beta) . ds$ sein.

Aber wenn der Radius die Cycloide berührt, so muſs bei einer kleinen Aenderung von φ, Γ ungeändert bleiben, also $d . Sin\,\Gamma = 0$, oder

$$d\varphi . Sin\,\psi . Cos\,\varphi - d\psi\, Sin\,\varphi . Cos\,\psi = 0,$$

oder $d\varphi . tang\,\psi . Cotang\,\varphi = \frac{Sin\,\gamma . Sin\,2\alpha . d\varphi . Sin\,\varphi}{Sin\,\psi}$,

also $Sin^2\psi . Cos\,\varphi = Sin\,\gamma . Sin\,2\alpha . Sin^2\varphi . Cos\,\psi$ sein,

oder $Cos\,\varphi - Cos\,\varphi\,(Cos\,\gamma . Cos\,2\alpha - Sin\,\gamma . Sin\,2\alpha . Cos\,\varphi)^2$

$$= Sin^2\gamma . Sin^2 2\alpha . Sin^2\varphi . Cos\,\varphi - Sin\,\gamma\, Cos\,\gamma . Sin\,2\alpha\, Cos\,2\alpha . Sin^2\varphi$$

oder $Cos\,\varphi - (Cos^2\gamma . Cos^2 2\alpha + Sin^2\gamma . Sin^2 2\alpha)\, Cos\,\varphi$

$$+ Sin\,\gamma\, Cos\,\gamma . Sin\,2\alpha . Cos\,2\alpha\,(1 + Cos^2\varphi) = 0.$$

Hieraus lieſse sich allgemein bestimmen, was φ wird, wenn jener vom Pole des wälzenden Kreises ausgehender Bogen zur Tangente wird; um aber nur den leichtesten Fall zu betrachten, will ich $\alpha = 135°$ annehmen, so daſs $Cos\,2\alpha = 0$; dann kann offenbar die letzte Gleichung nur bestehn, wenn $Cos\,\varphi = 0$, $\varphi = 90°$ oder $270°$ wird, und für diesen Punct wäre nun

$$Cos\,\psi = 0;\ \psi = 90°;$$

$$d\psi = -d\varphi . Sin\,\gamma;\ \varphi - \sigma = \gamma;\ \sigma = 90° - \gamma;$$

$d\sigma = d\varphi;\ \frac{d\sigma}{d\psi} = tang\,\Gamma = -\frac{1}{Sin\,\gamma}$. Hier wird also nach §. 381.

$$d^2y = r\,\{-d\varphi^2 Sin^3\gamma - d^2\sigma\, Cos\,\gamma - d\varphi^2 Sin\,\gamma\};$$

$$d^2z = r\,\{-d\varphi^2 Sin^2\gamma\, Cos\,\gamma + d^2\sigma\, Sin\,\gamma - d\varphi^2\, Cos\,\gamma\}.$$

und da der allgemeine Werth von $d^2\sigma$ hier, wo $Cos\,\varphi = 0$ und $d^2\varphi = 0$ ist, $= d\varphi^2 . Sin\,\gamma . Cos\,\gamma$ wird, so ist

$\frac{d^2y}{d^2z} = \frac{-2\,d\varphi^2\, Sin\,\gamma}{-d\varphi^2\, Cos\,\gamma}$ = einer beständigen Gröſse, und der Punct, den wir betrachtet haben, hat die Eigenschaften eines einfachen Wendungspunctes.

388. **Zweiter Fall.** Es sei $\beta = 90°$, so sind die allgemeinen Formeln $Cos\,\psi = Cos\,\gamma\, Sin\,\alpha + Sin\,\gamma\, Cos\,\alpha\, Cos\,m\varphi$ aber $m = Sin\,\alpha$;

$Sin\,(\varphi - \sigma) = \frac{Sin\,m\varphi . Sin\,\gamma}{Sin\,\psi}$. Diese Formeln werden nur dann etwas bequemer, wenn auch $\gamma = 90°$ ist, indem dann

$$Cos\,\psi = Cos\,\alpha . Cos\,m\varphi \text{ und}$$

$$Sin\,(\varphi - \sigma) = \frac{Sin . m\varphi}{Sin\,\psi} \text{ ist.}$$

Ferner $d\psi . Sin\psi = m\, d\varphi . Cos\alpha . Sin . m\varphi$;

$$d\sigma = d\varphi - \left(\frac{m\,d\varphi . Cos\, m\varphi . Sin\psi - d\psi\, Cos\psi\, Sin\, m\varphi}{Sin^2\psi . Cos(\varphi - \sigma)}\right).$$

389. Die Lage der Tangente für $\varphi = 0 = \sigma$, $\psi = \alpha$ ergiebt sich wieder aus den allgemeinen in §. 385. angegebnen Gleichungen

$$v = \frac{r - u\, Cos\alpha}{Sin\,\alpha} + \frac{d\sigma}{d\psi} . Sin\sigma\,(u - r\,Cos\alpha)$$

$$w = \frac{d\sigma}{d\psi}\,(r\,Cos\alpha - u);$$

aber für ein sehr kleines φ ist $d\psi = m^2 \varphi\, d\varphi . Cotang\alpha$, $d\sigma = (\tfrac{1}{2} Cos^2\alpha)\,\varphi^2 d\varphi$, also $\frac{d\sigma}{d\psi} = 0$ für $\varphi = 0$. Die Werthe von v und w sind also dieselben, wie in §. 385. und die Cycloide berührt den vom Pole des Kreises *HI* (Fig. 74.) ausgehenden gröfsesten Kreis, so dafs sie hier eine Spitze hat.

Aber auch für $m\varphi = 180°$, oder wenn der beschreibende Punct die höchste Stelle erreicht hat, hat die Cycloide eine Spitze. Der Werth von $d\sigma$ nämlich wird, wenn

$$Sin . m\varphi = 0,\quad Cos\psi = -Cos\alpha,\quad Sin\psi = m = Sin\alpha,$$

ist, in jenem Puncte durch $d\sigma = -\frac{d\psi . Cos\alpha . Sin . m\varphi}{Sin^2\alpha}$ ausgedrückt, und es ist daher $\frac{d\sigma}{d\psi}$ mit $Sin\, m\varphi$ unendlich abnehmend, folglich für die Tangente

$$v = \frac{-(r + u\,Cos\alpha)}{Sin\,\alpha};$$

$$w = 0;$$

so dafs auch hier eine Berührung an dem von *D* ausgehenden gröfsten Kreise statt findet.

Für $m\varphi = 90°$ ist $\psi = 90°$, $Sin(\varphi - \sigma) = 1$, also $\varphi - \sigma = 90°$; daher $d\psi = Sin\alpha . Cos\alpha . d\varphi$, $d\sigma = d\psi$, und folglich die Tangente durch

$$v = r\,Cos\sigma + u\,Sin\sigma,$$

$$w = r\,Sin\sigma - u\,Cos\sigma,$$

und $v\,Cos\sigma + w\,Sin\sigma = r$, bestimmt.

Die letzte Gleichung zeigt, dafs die Tangente in diesem Puncte in einer mit der Axe parallelen Ebne liegt, denn wenn (Fig. 75.) $AD = r$, $BAD = \sigma$, $AU = v$, $UV = w$, so ist $v\,Cos\sigma + w\,Sin\sigma = r$, die Gleichung für die in *B* den Kreis berührende Linie *BV*. Die Neigung der Tangente gegen eine in Fig. 74. mit der Axe *DC* parallele Linie sei $= \eta$, so ist $tang . \eta = \frac{\sqrt{(dv^2 + dw^2)}}{du} = 1$, und die Neigung der Curve gegen den Aequator $= 45°$.

390. In eben diesem Puncte hat die Curve einen Wendungspunct; denn es wird hier

$$d^2 y = r\{-2 d\psi^2 \,Cos\,\sigma - d^2\sigma . Sin\,\sigma\},$$
$$d^2 z = r\{-2 d\psi^2 \,Sin\,\sigma + d^2\sigma . Cos\,\sigma\},$$

aber $d^2\sigma$ wird hier $= \infty$, also $\frac{d^2 y}{d^2 z} = - tang\,\sigma = Cotang\,\phi = Cotang\,\frac{1}{m}\pi$. eine beständige Gröſse.

391. Der Bogen dieser Linie läſst sich bestimmen. Es ist nämlich

$$d\psi = \frac{d\phi . Sin\,\alpha\; Cos\,\alpha . Sin\,m\phi}{\sqrt{(1 - Cos^2\alpha . Cos^2 m\psi)}},$$

$$d\sigma = d\phi\left\{1 - \frac{Sin\,\alpha . Sin^2\psi\; Cos\,m\phi - Sin\,\alpha\; Cos^2\alpha . Sin^2 m\phi\; Cos\,m\phi}{Sin^3\psi . Cos(\phi - \sigma)}\right\}$$

$$d\sigma = d\phi\left\{1 - \frac{Sin\,\alpha\; Cos\,m\phi\,\{1 - Cos^2\alpha\; Cos^2 m\phi - Cos^2\alpha\; Sin^2 m\phi\}}{Sin^3\psi\; Cos(\phi - \sigma)}\right\}$$

$$d\sigma = d\phi\left\{1 - \frac{Sin^3\alpha . Cos\,m\phi}{Sin^2\psi . \sqrt{(Sin^2\psi - Sin^2 m\phi)}}\right\};$$

$$d\sigma = d\phi\left\{1 - \frac{Sin^3\alpha\; Cos\,m\phi}{Sin^2\psi . \sqrt{\{1 - Cos^2\alpha\; Cos^2 m\phi - Sin^2 m\phi\}}}\right\};$$

$$= d\phi\left\{1 - \frac{Sin^3\alpha . Cos\,m\phi}{Sin^2\psi . \sqrt{\{Sin^2\alpha - Sin^2\alpha . Sin^2 m\phi\}}}\right\} = d\phi\left\{1 - \frac{Sin^2\alpha}{Sin^2\psi}\right\}$$

endlich $d\sigma = \frac{d\phi . Cos^2\alpha . Sin^2 m\phi}{Sin^2\psi}$.

Also das Differential des Bogens

$$ds = r\sqrt{(d\psi^2 + d\sigma^2\, Sin^2\psi)} = r\,\frac{\sqrt{(Sin^2\alpha\; Cos^2\alpha\; Sin^2 m\phi + Cos^4\alpha\; Sin^4 m\phi)}\; d\phi}{Sin\,\psi}$$

$$= r\,\frac{Cos\,\alpha\; Sin . m\phi . \sqrt{(Sin^2\alpha + Cos^2\alpha\; Sin^2 m\phi)}\; d\phi}{Sin\,\psi}$$

$$= \frac{r\,d\psi}{Sin\,\alpha}\sqrt{\{1 - Cos^2\psi\}} = \frac{r\,d\psi\; Sin\,\psi}{Sin\,\alpha}.$$

und daraus also der Bogen $s = Const - \frac{r\,Cos\,\psi}{Sin\,\alpha}$ oder wenn s von da an gerechnet wird, wo $\psi = \alpha$ ist,

$$s = \frac{r\,(Cos\,\alpha - Cos\,\psi)}{Sin\,\alpha} = r\,Cotang\,\alpha\,(1 - Cos\,m\phi).$$

Von $\varphi = 0$ bis $m\varphi = 90^\circ$ ist also der Bogen $= r\, Cotang\, \alpha$,
von $\varphi = 0$ bis $m\varphi = 180^\circ$ der Bogen $= 2r\, Cotang\, \alpha$.

Diese Curve ist also auch deshalb merkwürdig, weil sie eine algebraisch rectificable Curve auf der Kugelfläche ist. *)

392. Um den Krümmungshalbmesser allgemein auszudrücken, haben wir aus dem Vorigen zuerst $ds = \frac{r . d\psi . Sin \psi}{Sin \alpha}$; ferner $dx = r\, d\psi . Sin \psi$;

$$d\sigma = \frac{d\psi . Cos \alpha\, Sin\, m\varphi}{Sin \alpha . Sin \psi};$$

$$d^2\sigma = \frac{d^2\psi . Cotg. \alpha . Sin. m\varphi}{Sin \psi} + \frac{d\varphi . d\psi . Cos \alpha . Cos\, m\varphi}{Sin \psi} - \frac{d\psi^2 Cos \alpha . Cos \psi . Sin\, m\varphi}{Sin \alpha . Sin^2 \psi};$$

oder weil für $d^2 x = 0$, $d^2\psi = - d\psi^2\, Cotang\, \psi$ ist,

$$d^2\sigma = - \frac{2\, d\psi^2 Cos \alpha . Cos \psi\, Sin\, m\varphi}{Sin \alpha . Sin^2 \psi} + \frac{d\psi^2\, Cos\, m\varphi}{Sin \alpha . Sin\, m\varphi},$$

$$= \frac{d\psi^2 . Cos. m\varphi}{Sin \alpha} \left(\frac{Sin^2 \alpha - Cos^2 \alpha . Sin^2 m\varphi}{Sin^2 \psi . Sin. m\varphi} \right).$$

$$(d^2y^2 + d^2z^2) = r^2 d\psi^4 . \Big\{ \frac{1}{Sin^2 \psi} + \frac{4\, Cos^2 \alpha\, Sin^2 m\varphi\, Cos^2 \psi}{Sin^2 \alpha . Sin^2 \psi} + \frac{Cos^2 m\varphi . Sin^2 \alpha}{Sin^2 \psi . Sin^2 m\varphi}$$

$$- \frac{2\, Cos^2 m\varphi . Cos^2 \alpha}{Sin^2 \psi} + \frac{Cos^2 m\varphi . Sin^2 m\varphi\, Cos^4 \alpha}{Sin^2 \alpha . Sin^2 \psi}$$

$$+ \frac{Cos^4 \alpha . Sin^4 m\varphi}{Sin^4 \alpha . Sin^2 \psi} + \frac{2\, Cos^2 \alpha\, Sin^2 m\varphi}{Sin^2 \alpha . Sin^2 \psi}$$

$$+ \frac{4\, Cos \psi}{Sin^2 \psi} . Cos \alpha . Cos\, m\varphi - \frac{4\, Cos \psi\, Cos^3 \alpha\, Cos\, m\varphi . Sin^2 m\varphi}{Sin^2 \alpha . Sin^2 \psi} \Big\};$$

$$= \frac{r^2 d\psi^4}{Sin^2 \psi} \Big\{ 1 + Cotang^2 \alpha\, Sin^2 m\varphi . Cos^2 \psi + \frac{Cos^2 m\varphi . Sin^2 \alpha}{Sin^2 m\varphi}$$

$$+ 2\, Cos^2 \psi + 2\, Cotang^2 \alpha . Sin^2 m\varphi + \frac{Cos^4 \alpha\, Sin^4 m\varphi}{Sin^4 \alpha} \Big\};$$

$$= \frac{r^2 d\psi^4}{Sin^2 \psi} \Big\{ (1 + Cotang^2 . \alpha\, Sin^2 m\varphi)^2 + Cotang^2 \alpha\, Sin^2 m\varphi\, Cos^2 \psi$$

$$+ \frac{Cos^2 \psi\, Sin^2 \alpha}{Cos^2 \alpha . Sin^2 m\varphi} + 2\, Cos^2 \psi \Big\}$$

*) Dies und einige andre merkwürdige Eigenschaften findet auch Fuſs auf anderm Wege in den mémoires de l'Acad. de Petersbourg. Tome VIII. pag. 175.

$$= \frac{r^2 d\psi^4}{Sin^2\psi} \Big\{ (1 + Cotg^2 a . Sin^2 m\varphi)^2 + Cos^2\psi . tg^2 a$$

$$\Big\{ \frac{1}{Sin^2 m\varphi} + 2\, Cotg^2 a + Cotg^4 a\, Sin^2 m\varphi \Big\} \Big\}$$

$$= \frac{r^2 d\psi^4}{Sin^2\psi} \{1 + Cotang^2 a . Sin^2 m\varphi\}^2 \{1 + Sin^2 a\, Cotang^2 m\varphi\};$$

$$= \frac{r^2 d\psi^4 Sin^2 a.}{Sin^2\psi\, Sin^2 m\varphi} (1 + Cotang^2 . a . Sin^2 m\varphi)^3;$$

daher $dx^2(d^2y^2 + d^2z^2) = \frac{r^4 d\psi^6 Sin^2 a}{Sin^2 m\varphi} (1 + Cotang^2 a . Sin^2 m\varphi)^3.$

Endlich $(dy\, d^2z - dz\, d^2y) =$

$$d\psi^3 r^2 . \Big\{ \frac{2\, Cos^2\psi . Cos\, a . Sin\, m\varphi}{Sin\, a . Sin\psi} + \frac{Cos\, a . Sin\, m\varphi}{Sin\, a . Sin\psi} + \frac{Cos\psi\, Cos\, m\varphi . Sin\, a}{Sin\psi . Sin\, m\varphi}$$

$$- \frac{Cos\psi\, Cos\, m\varphi . Cos^2 a\, Sin\, m\varphi}{Sin\, a\, Sin\psi} + \frac{Cos^3 a . Sin^3 m\varphi}{Sin^3 a . Sin\psi} \Big\}$$

$$= \frac{r^2 d\psi^3}{Sin\psi} \Big\{ \frac{Cotg . a . Sin^2 m\varphi (1 + Cos^2\psi) + Cos^2\psi . tang\, a + Sin^4 m\varphi\, Cotg^3 a}{Sin\, m\varphi} \Big\}$$

$$= \frac{r^2 d\psi^3 Sin\, a\, Cos\, a}{Sin\psi\, Sin\, m\varphi} (1 + Cotang^3 a . Sin^2 m\varphi)^2.$$

Es wird also hier ganz allgemein der Krümmungshalbmesser

$$R = \frac{r . Sin^4\psi . Sin . m\varphi}{Sin^4 a (1 + Cotang^2 . a . Sin^2 m\varphi)^2}.$$

Für $\varphi = 0$ ist er also $= 0$,
für $m\varphi = 180°$ abermals $= 0$;
für $m\varphi = 90°$ ist $R = r$,
dem Halbmesser der Kugel gleich.

393. Diese Betrachtungen reichen wohl hin, um die Anwendung der allgemeinen Formeln zu zeigen, und ich verweile daher nicht länger bei der Untersuchung des dritten Falles.

Anmerkung. Von der Anwendung der sphärischen Cycloide auf die Form der Radzähne handelt Eytelwein in dem Handbuch der Statik fester Körper 1. Th. §. 266. und giebt im 3. Th. auch theoretische Bestimmungen für diese Curve an.

3. *Die kürzeste Linie zwischen zwei gegebnen Puncten auf der Oberfläche des graden Kegels.*

394. **Aufgabe.** Auf der Oberfläche eines graden Kegels mit kreisförmiger Grundfläche ist eine krumme Linie gezogen, so daſs eines jeden Punctes Abstand $=\varrho$ vom Scheitel des Kegels durch $\varrho=\frac{a}{Cos\, m\psi}$ ausgedrückt wird, wenn ψ der Winkel ist, den eine durch diesen Punct und durch des Kegels Axe gelegte Ebne mit einer bestimmten ebenfalls durch des Kegels Axe gelegten Ebne macht, zugleich aber $m=Sin\,\beta=$ dem *Sinus* des Winkels ist, den des Kegels Seitenlinie mit seiner Axe einschlieſst; man sucht die Projection dieser Linie auf die Grundfläche.

Auflösung. Nenne ich r den Abstand von der Axe für den durch ϱ und ψ bestimmten Punct, so ist offenbar $r=\varrho\, Sin\,\beta$, und die Entfernung der Spitze von der durch diesen Punct senkrecht auf die Axe gelegten Ebne ist $=z=\varrho\, Cos\,\beta$; also $r=\frac{a\, Sin\,\beta}{Cos\, m\psi}$ die Gleichung für die Projection.

395. Für $\psi=0$ ist $r=a\, Sin\,\beta$, und da ist der Radius der Curve am kleinsten; für $m\psi=\pm 90°$ ist $r=\infty$, also hat die Curve zwei Asymptoten, die gegen den kleinsten Radius unter dem Winkel $=\frac{\frac{1}{2}\pi}{m}=\frac{\frac{1}{2}\pi}{Sin\,\beta}$ geneigt sind, der also allemal gröſser als 90 Grade ist.

396. Da ein unendlich kleines Theilchen der Projection durch $d\sigma=\sqrt{(r^2.d\psi^2+dr^2)}$ ausgedrückt wird, also das unendlich kleine Theilchen unsrer Curve $ds=\sqrt{(r^2d\psi^2+dr^2+dz^2)}$ ist: so erhalten wir

$$ds=a\,d\psi.\sqrt{\left\{\frac{Sin^2\beta}{Cos^2.m\psi}+\frac{m^2Sin^2\beta.Sin^2m\psi}{Cos^4m\psi}+\frac{m^2Cos^2\beta.Sin^2m\psi}{Cos^4m\psi}\right\}}$$

$$=\frac{a\,Sin\,\beta.d\psi}{Cos.m\psi}.\sqrt{\{1+tang^2.m\psi\}}=\frac{a\,Sin\,\beta.\,d\psi}{Cos^2.m\psi},$$

weil $m=Sin\,\beta$ war; folglich der Bogen der Curve vom Scheitel an gerechnet $s=a\,Sin\,\beta.\frac{1}{m}.tang.m\psi$ oder $s=a\,tang.m\psi$.

397. **Lehrsatz.** Die eben betrachtete Linie ist die kürzeste, die zwischen zwei in ihr liegenden Puncten auf der Oberfläche des Kegels gezogen werden kann.

Beweis. Der allgemeine Ausdruck für den Bogen einer Curve, deren Projection durch einen Winkel ψ und Abstand r gegeben ist, und die selbst alsdann durch eine auf die Projections-Ebne senkrechte Ordinate z bestimmt worden, ist offenbar $s = \int \sqrt{(r^2 d\psi^2 + dr^2 + dz^2)}$.

Soll dieser ein Kleinstes sein, so mufs

$$0 = \int \left\{ \frac{r\delta r . d\psi^2 + r^2 d\psi \delta d\psi + dr\delta dr + dz\delta dz}{ds} \right\}$$

sein, oder wenn man theilweise integrirt, um die mit beiden Zeichen bezeichneten Gröfsen wegzuschaffen,

$$0 = \frac{r^2 d\psi \delta\psi}{ds} + \frac{dr\delta r}{ds} + \frac{dz\delta z}{ds}$$
$$+ \int \left\{ \delta r \left(\frac{r d\psi^2}{ds} - d . \frac{dr}{ds} \right) - \delta\psi . d . \frac{r^2 d\psi}{ds} - \delta z . d . \frac{dz}{ds} \right\}.$$

Dieser Ausdruck ist noch ganz allgemein; soll aber die willkürliche Aenderung der drei Gröfsen so genommen werden, dafs man immer auf der Kegelfläche bleibt, so mufs, weil $z = r\, Cotang\, \beta$ ist, $\delta z = \delta r . Cotang\, \beta$ sein, und das unaufgelöste Integral, von welchem die Bestimmung der Natur der Curve abhängt, ist nun

$$= \int \left\{ \delta r \left(\frac{r d\psi^2}{ds} - d . \frac{dr}{ds} - Cotang\, \beta . d . \frac{dz}{ds} \right) - \delta\psi . d . \frac{r^2 d\psi}{ds} \right\}.$$

Damit unsre obige Formel immer gleich Null werde, mufs dies Integral immer $= 0$ bleiben und folglich sowohl

$$\frac{r d\psi^2}{ds} - d . \frac{dr}{ds} - Cotang\, \beta . d . \frac{dz}{ds} = 0,$$

als $d . \dfrac{r^2 d\psi}{ds} = 0$, sein.

Das Letztere giebt $\dfrac{r^2 d\psi}{ds} = C$, oder $C ds = r^2 d\psi$, das ist $C . \sqrt{(r^2 d\psi^2 + dr^2 + dz^2)} = r^2 d\psi$, oder weil auf der Kegelfläche $dz = dr . Cotang . \beta$ ist, $dr = \dfrac{r . Sin \beta . d\psi}{C} \sqrt{(r^2 - c^2)}$,

woraus $\psi . Sin\, \beta = Const + Arc\ Cos\, \dfrac{C}{r}$ folgt, oder $m\psi = Arc\ Cos\, \dfrac{C}{r}$, wenn ich wie in §. 395. $m = Sin\, \beta$ setze, und annehme, dafs für $\psi = 0$, $r = C$ sein soll. So wird unsre Gleichung $r = \dfrac{C}{Cos . m\psi}$ geben, die ganz mit §. 395. übereinstimmt, wenn man $C = a\, Sin\, \beta$ setzt.

398. Wenn man sich die Kegelfläche in eine Ebne ausgebreitet, gleichsam abgewickelt, denkt, so ist die eben betrachtete Curve auf der Kegelfläche in der abgewickelten ebnen Fläche eine grade Linie, wovon man sich durch die in §. 395. zum Grunde gelegte Bedingung leicht überzeugen kann.

Vierter Abschnitt.

Von der Bestimmung des körperlichen Inhalts der durch krumme Flächen begrenzten Räume.

399. Bemerkung. Wenn die krumme Fläche, für welche der umschlossene Raum berechnet werden soll, durch drei auf einander senkrechte Coordinaten x, y, z bestimmt ist: so kann man offenbar den Inhalt jedes kleinen parallelepipedischen Theilchens durch $dx \,.\, dy \,.\, dz$. ausgedrückt denken. Wäre dagegen die Lage irgend eines Punctes durch einen Winkel $ACP = \varphi$ in der Abscissen-Ebne (Fig. 76.), durch einen Winkel $QCP = \psi$, dessen Ebne senkrecht auf die Abscissen-Ebne ist, und durch den Abstand $CQ = r$ gegeben, so könnte man das Körpertheilchen ansehn, als ein Theilchen $QRrq$ der Kugelschichte, deren Dicke $= dr$ ist. Da aber der Bogen $Qq = r d\varphi \,.\, Cos\,\psi$ ist, wenn man $PCp = d\varphi$ nennt, und das Theilchen durch zwei auf die Abscissen-Ebne senkrechte Ebnen begrenzt, und ferner $QR = r d\psi$ ist, so ist das Theilchen $= r^2 dr d\varphi d\psi \; Cos\,\psi$.

Diese beiden Formeln sind es, durch deren Integration man den Inhalt des körperlichen Raumes finden mufs.

400. Aufgabe. Die allgemeinen Regeln zur Bestimmung eines körperlichen Raumes, der durch eine gegebne krumme Fläche begrenzt wird, anzugeben.

Auflösung. 1. Wenn die Fläche durch senkrechte Coordinaten ausgedrückt ist, so denkt man sich (Fig. 77.) ein Theilchen ad, dessen Abmessungen $Wb = dx$, $bc = dy$, $cd = dz$ sind, wenn $AU = x$, $UV = y$, $VW = z$ ist, und der Inhalt dieses Theilchens $= dx \,.\, dy \,.\, dz$ ist das Differential des zu bestimmenden Inhalts.

Wenn man dieses Differential zuerst in Beziehung auf eine Ordinate integrirt, wozu ich z wähle, so ist dieses erste Integral $= z\, dx \,.\, dy$, als Inhalt des Parallelepipeds Vd, und damit dieses sich bis an die gegebne krumme Fläche erstrecke, mufs man z als diejenige Function von x und y ausdrücken,

die vermittelst der Gleichung für die krumme Fläche gegeben ist; alsdann nämlich drückt $zdxdy$ das ganze durch die Fläche XZ begrenzte Säulchen $VYZX$ aus.

Um soviel als dieses beträgt, wächst der Inhalt der über VPQ senkrecht errichteten Schichte, indem x um $dx = Vv$ wächst, und man erhält daher, indem man jetzt in Beziehung auf x integrirt, nachdem z durch x und y ausgedrückt worden, den Inhalt dieser ganzen durch die Fläche RZ begrenzten Schichte. Um sie vollständig so weit sie innerhalb der gegebnen Fläche liegt, zu erhalten, muſs man das Integral bis zu den Grenzen nehmen, die x für ein unbestimmtes y erreichen kann. Damit ist dann das vollständige $\int zdx$ als Function von y ausgedrückt, und da jene ganze über PS stehende Schichte als Differential des über AUT liegenden Körpers anzusehn ist, indem dieser um so viel wächst, wenn y in $y+dy$ übergeht, so wird nun $\int dy \int zdx$ als Inhalt des ganzen Körpers gesucht und bis zu den Grenzen genommen, die man als Begrenzung des zu bestimmenden Theiles angenommen hat, oder die sich durch die krumme Fläche ergeben.

2. Auf ähnliche Weise erfordert die zweite Formel $r^2 dr\, d\varphi\, d\psi\, Cos\psi$ eine dreifache Integration. Finge man zum Beispiel mit der Integration in Beziehung auf r an, so erhielte man durch $\frac{1}{3} r^3 d\varphi . d\psi . Cos\psi$ (Fig. 76.) den Inhalt der kleinen Pyramide $CRQqr$, und diese bis zu den Grenzen des Körpers hin, wenn man r so durch φ, ψ ausdrückt, wie es die Gleichung für die Fläche fordert. Integrirt man sodann $\frac{1}{3} r^3 d\psi\, Cos\psi$ so als ob bloſs ψ veränderlich wäre, so erhält man den durch CPQ, CpP, Cpq, CqQ, begrenzten und bis an die krumme Oberfläche ausgedehnten Raum, also den ganzen zwischen den Ebnen UCP, UCp liegenden Raum, wenn man das Integral von $\psi = 0$ bis $\psi = 90°$ nimmt. Endlich den ganzen Inhalt findet man, wenn man $\int d\varphi \int \frac{1}{3} r^3 d\psi\, Cos\psi$ sucht und bis zu den gehörigen Grenzen nimmt.

401. Aufgabe. Den Inhalt der Kugel zu berechnen.

Auflösung. 1. Das dreifache Integral $\int\int\int dxdydz$, giebt zuerst $\int\int zdydx$; ist nun $z^2 = r^2 - x^2 - y^2$, oder der Mittelpunct zugleich der Anfangspunct der Coordinaten, so ist von $z = 0$ bis zu dem Puncte, wo die Ordinate z die Kugelfläche an der positiven Seite trifft, dieses Integral

$= \int\int dx\,dy \,.\, \sqrt{(r^2 - x^2 - y^2)}$. Aber $dy \sqrt{(r^2 - x^2 - y^2)}$ so integrirt, daſs x als beständig angesehn wird, giebt

$$\int dy \,.\, \sqrt{(r^2 - x^2 - y^2)} = \tfrac{1}{2}(r^2 - x^2)\, Arc\,Sin \frac{y}{\sqrt{(r^2 - x^2)}} + \tfrac{1}{2} y \sqrt{(r^2 - x^2 - y^2)};$$

und man muſs, wenn man den Inhalt der ganzen Halbkugel verlangt, das Integral so nehmen, daſs es mit $y = -\sqrt{(r^2 - x^2)}$ verschwindet und sich bis $y = +\sqrt{(r^2 - x^2)}$ erstreckt, zwischen diesen Grenzen wird es $= \pi \,.\, (r^2 - x^2)$. Dies in jenes doppelte Integral gesetzt, giebt

$\int\int dx\,dy \sqrt{(r^2 - x^2 - y^2)} = \pi \int (r^2 - x^2)\, dx$, welches offenbar $= \pi\,(r^2 x - \tfrac{1}{3} x^3)$, also von $x = 0$ bis $x = r$ genommen $= \pi \,.\, \tfrac{2}{3} r^3$ ist: — die bekannte Formel für den Inhalt der Halbkugel.

2. Die zweite Formel wird sehr leicht integrabel, wenn die Abstände vom Mittelpuncte an gerechnet werden. Weil nämlich dann die Abstände bis an die Oberfläche alle gleich sind, so ist der vollständige Werth von r keine Function von φ und ψ, und man hat

$$\int\int\int r^2\, dr\, d\varphi\, d\psi\, Cos\psi = \tfrac{1}{3} r^3 \int\int d\varphi\, d\psi\, Cos\psi$$

$= \tfrac{1}{3} r^3 \int Sin\psi \,.\, d\varphi + C$, oder da man, um die ganze Kugel zu erhalten, das Integral von $\psi = -90°$ bis $\psi = +90°$ nehmen muſs,

$= \tfrac{2}{3} r^3 \int d\varphi, = \tfrac{4}{3} r^3 \pi$, wenn φ durch den ganzen Umfang von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ soll genommen werden.

3. Um eine etwas schwierigere Voraussetzung bei der Anwendung der letzten Formel anzunehmen, sei A (Fig. 78.) ein Punct auſserhalb des Mittelpunctes C, und $AF = \varrho$ durch $BAD = \varphi$ in dem durch AC gelegten gröſsten Kreise und $FAD = \psi$ senkrecht auf denselben ausgedrückt. Bekanntlich ist $Cos\, FAC = Cos\,\varphi \,.\, Cos\,\psi$ im rechtwinklichen sphärischen Drei-Eck, und da $Cos\, FAC$, wenn $AC = a$, $AF = \varrho$, $CF = R$ heiſst, auch $= \frac{a^2 + \varrho^2 - R^2}{2a\varrho}$ ist, so wird $\varrho = a\, Cos\varphi\, Cos\psi \pm \sqrt{(R^2 - a^2 + a^2\, Cos^2\varphi\, Cos^2\psi)}$. Nach der ersten Integration also erhalten wir $\tfrac{1}{3} \int\int r^3\, d\varphi\, d\psi\, Cos\psi + Const$ und folglich, wenn dieses für $r = a\, Cos\varphi\, Cos\psi - \sqrt{(R^2 - a^2 + a^2\, Cos^2\varphi\, Cos^2\psi)}$ ver-

schwinden soll,

$$= -\tfrac{1}{3}\int\int (a\, Cos\varphi\, Cos\psi - \sqrt{(R^2 - a^2(1 - Cos^2\varphi\, Cos^2\psi))^3}\, d\varphi\, d\psi\, Cos\psi$$

$$+ \tfrac{1}{3}\int\int r^3\, d\varphi\, d\psi\, Cos\psi,$$

und wenn es für $r = a\, Cos\varphi\, Cos\psi + \sqrt{(R^2 - a^2(1 - Cos^2\varphi\, Cos^2\psi))}$ seinen vollständigen Werth erlangen soll, eben das Integral

$$= \tfrac{1}{3}\int\int \{(a\, Cos\varphi\, Cos\psi + \sqrt{(R^2 - a^2(1 - Cos^2\varphi\, Cos^2\psi))}\}^3\, d\varphi\, d\psi\, Cos\psi$$

$$- \tfrac{1}{3}\int\int \{a\, Cos\varphi\, Cos\psi - \sqrt{(R^2 - a^2(1 - Cos^2\varphi\, Cos^2\psi))}\}^3\, d\varphi\, d\psi\, Cos\psi$$

$$= \tfrac{2}{3}\int\int \{3a^2\, Cos^2\varphi\, Cos^3\psi . d\varphi . d\psi \sqrt{(R^2 - a^2(1 - Cos^2\varphi\, Cos^2\psi))}$$

$$+ (R^2 - a^2 + a^2\, Cos^2\varphi\, Cos^2\psi)\, Cos\psi . d\varphi\, d\psi \sqrt{(R^2 - a^2 + a^2\, Cos^2\varphi\, Cos^2\psi)}\},$$

Damit ist der Inhalt der beiden kleinen Pyramiden ausgedrückt, deren Spitze in A liegt, und die AF und Af, bis an die Kugel-Oberfläche gehend, zu ihren Seitenlinien haben. Wenn man dieses Integral zuerst in Beziehung auf ψ von $\psi = 0$ bis $\psi = 90°$ nimmt, so ist damit die ganze Summe aller an dem Bogen DFG und aller an dem Bogen dfg anliegender Kegel bestimmt, und man müſste dann das dritte Integral von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 360° = 2\pi$ nehmen, um den Inhalt der ganzen Kugel zu haben.

Läge A auſserhalb der Kugel, so würde man nach der ersten Integration den Inhalt des unendlich kleinen abgekürzten Kegels $abcd$ (Fig. 79.) erhalten, und bei der zweiten Integration die Grenzen für ψ nehmen müssen, über welche hinaus der Werth des Abstandes unmöglich, also $a^2(1 - Cos^2\psi\, Cos^2\varphi) > R^2$ wird; damit wäre dann der Inhalt der unendlich schmalen Schichte bestimmt, die zwischen zwei auf der Ebne ACD senkrechten und durch A gehenden Ebnen enthalten ist. Und auch die dritte Integration könnte nur zwischen den Grenzen genommen werden, zwischen welchen die wirklichen Schnitte der Kugel liegen.

Hier will ich mich begnügen, die Rechnung für $a = R$ auszuführen, wo nach der ersten Integration sich ergiebt

$$= \tfrac{8}{3} R^3 \int\int Cos\varphi^3 . Cos^4\psi\, d\varphi . d\psi = S$$

also weil $Cos^4\psi . d\psi = \tfrac{1}{8}(d\psi\, Cos 4\psi + 4 d\psi\, Cos 2\psi + 3 d\psi)$, ist,

$$S = \tfrac{1}{3} R^3 \int \{Cos\varphi^3 . d\varphi\, (\tfrac{1}{4} Sin 4\psi + 2\, Sin 2\psi + 3\psi)\}$$

oder von $\psi = -90°$ bis $\psi = +90°$,

$$S = \frac{1}{3} R^3 \int \{3\pi \, Cos^3 \varphi \, d\varphi\} = \pi R^3 \int \{\tfrac{1}{4} d\varphi \, Cos\, 3\varphi + \tfrac{3}{4} d\varphi \, Cos\varphi\}$$

$$= \pi R^3 \{\tfrac{1}{12} Sin\, 3\varphi + \tfrac{3}{4} Sin\, \varphi\} + Const,$$

welches von $\varphi = -90°$ bis $\varphi = +90°$ genommen, (weil die ganze Kugel zwischen diesen Werthen von φ enthalten ist),

$$S = \pi R^3 \{-\tfrac{2}{12} + \tfrac{6}{4}\} = \tfrac{4}{3} R^3 \pi \text{ giebt.}$$

402. **Aufgabe.** Den Inhalt eines runden Körpers, der durch Umdrehung einer bekannten Curve um eine Axe entstanden ist, zu bestimmen.

Auflösung. 1. Es sei ABD (Fig. 80.) die Curve, durch deren Drehung um die Axe BC die Fläche entsteht, und diese Curve sei durch $CE = z$, $EF = y$ gegeben. Dann beschreibt ja die Ordinate EF eine Kreisfläche, deren Inhalt $= \pi y^2$ ist, und man kann den Körper ansehen, als bestehend aus Schichten deren Dicke $= dz$ und Inhalt $= dz \,.\, \pi y^2$ ist. Wenn man also das Integral $\int y^2 dz$ finden kann, so ist der Inhalt gefunden.

Wäre es nur ein Theil FG der Ordinate EF, durch deren Umdrehung der zu berechnende runde Körper entsteht, so würde, wenn $EF = y''$, $EG = y'$ heifst, der durch GF beschriebene Ring $= \pi (y''^2 - y'^2)$ sein, also der Inhalt des runden Körpers $= \int \pi dz \, (y''^2 - y'^2)$.

2. Wären die Curven BFD, HGI, (Fig. 80.) durch den Winkel $BCF = \varphi$, und $CF = \varrho''$, $CI = \varrho'$, bestimmt, so wäre der Halbmesser des Ringes, welchen X beschreibt $= \varrho \,.\, Sin\varphi$, wenn man diesem ganzen Ring die Breite $= \varrho d\varphi$, und die Dicke $= d\varrho$ zueignet, so wird sein Inhalt $= 2\pi \varrho^2 d\varrho \,.\, d\varphi \,.\, Sin\varphi$ und die doppelte Integration dieses Ausdrucks gäbe den ganzen Inhalt, der also entweder durch $= 2\pi \int \varrho^2 d\varrho \, (Cos\varphi' - Cos\varphi'')$ oder durch $= \frac{2}{3}\pi \int \{\varrho''^3 - \varrho'^3\} \, d\varphi \, Sin\varphi$ ausgedrückt wird, je nachdem das eine oder das andre Integral zwischen den gehörigen Grenzen bequemer zu bestimmen ist.

403. **Beispiel.** Den Inhalt der sphäroidischen Schichte zu finden, die zwischen zwei durch Umdrehung um BC entstandenen sphäroidischen Oberflächen liegt. Für die äufsere sei $y''^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} z^2$, für die innere $y'^2 = f^2 - \frac{f^2}{g^2} z^2$, also jeder Ringschichte Inhalt

$= \pi dz\left(b^2 - f^2 + \left(\frac{f^2}{g^2} - \frac{b^2}{a^2}\right)z^2\right)$, und folglich der ganze Inhalt $= \pi(b^2 - f^2)z + \frac{1}{3}\pi z^3\left(\frac{f^2}{g^2} - \frac{b^2}{a^2}\right) + Const.$ Soll der Inhalt von K bis H gesucht, oder der zwischen den Ebnen LM, NO liegende Körper bestimmt werden, so muſs das Integral verschwinden für $z = -g$, und es ist also

$$0 = Const - \pi g(b^2 - f^2) - \tfrac{1}{3}\pi g^3\left(\frac{f^2}{g^2} - \frac{b^2}{a^2}\right)$$

$$\text{oder } Const = \pi g\left\{b^2\left(1 - \tfrac{1}{3}\frac{g^2}{a^2}\right) - \tfrac{2}{3}f^2\right\};$$

und der vollständige Werth des Integrals

$$= 2\pi g b^2\left(1 - \tfrac{1}{3}\frac{g^2}{a^2}\right) - \frac{4\pi g f^2}{3}.$$

Sollten noch die beiden Stücke NOB, LMP hinzukommen, so erhellt leicht daſs für diese $\int \pi y''^2 dz$ von $z = g$ bis $z = a$ genommen, und doppelt zugelegt werden müſste. Dieses gäbe $2\pi b^2(a-g) - \frac{2}{3}\pi\frac{b^2}{a^2}(a^3 - g^3)$, welches mit dem vorigen vereiniget, giebt

$$\tfrac{4}{3}\pi ab^2 - \tfrac{4}{3}\pi g f^2,$$

ganz eben das, was wir gefunden hätten, wenn wir den Inhalt des äuſsern und des innern Sphäroides jede für sich berechnet und den Unterschied gesucht hätten.

404. **Beispiel.** Eine Kegelfläche schneidet (Fig. 81.) die Kugelfläche, man sucht das zwischen der Kegelfläche und Kugelfläche enthaltene Stück der Kugel, oder den durch die Umdrehung der Fläche BD um die Axe AC entstehenden Theil der Kugel.

Es sei C der Kugel Mittelpunct, $AC = a$, $AX = z$, $XY = z\,tang.\,\mathfrak{E}$, $XZ = \sqrt{\{R^2 - (a-z)^2\}}$, wo R der Halbmesser der Kugel ist: so hat man für jeden Ring $\pi dz(R^2 - (a-z)^2 - z^2\,tang^2\,\mathfrak{E})$, und das Integral hievon $= \pi.\{(R^2 - a^2)z + az^2 - \frac{1}{3}z^3\,Sec^2\,\mathfrak{E} + Const.\}$ drückt den gesuchten Inhalt aus. Dieses Integral darf aber nur zwischen den beiden Grenzen genommen werden, die den Puncten D, B entsprechen, das ist zwischen den Grenzen, die als Werthe von z durch die Gleichung $z^2.tang^2.\mathfrak{E} = R^2 - (a-z)^2$ angegeben werden, diese sind $z' = a\,Cos^2\,\mathfrak{E} - Cos\,\mathfrak{E}.\sqrt{(R^2 - a^2\,Sin^2\,\mathfrak{E})}$
und $z'' = a\,Cos^2\,\mathfrak{E} + Cos\,\mathfrak{E}\sqrt{(R^2 - a^2\,Sin^2\,\mathfrak{E})}$.

Jenes Integral wird also

$$= \pi . (R^2 - a^2) . 2 Cos \epsilon \sqrt{(R^2 - a^2 Sin^2 \epsilon)} + 4 \pi a^2 Cos^3 \epsilon . \sqrt{(R^2 - a^2 Sin^2 \epsilon)}$$
$$- \tfrac{1}{3} \pi Sec^2 \epsilon (6 a^2 Cos^5 \epsilon + 2 R^2 Cos^3 \epsilon - 2 a^2 Sin^2 \epsilon Cos^3 \epsilon) \sqrt{(R^2 - a^2 Sin^2)}$$
$$= 2 \pi Cos \epsilon \{ \tfrac{2}{3} R^2 - \tfrac{2}{3} a^2 Sin^2 \epsilon \} . \sqrt{(R^2 - a^2 Sin^2 \epsilon)};$$
$$= \tfrac{4}{3} \pi Cos \epsilon . (R^2 - a^2 Sin^2 \epsilon)^{\frac{3}{2}} .$$

405. Eben die Aufgabe ließe sich auch nach §. 402. Nr. 2. auflösen. Man müßte dann das Integral von $2\pi \varrho^2 d\varrho . d\varphi \, Sin \varphi$, zwischen den Grenzen $\varphi = \epsilon$ und $\varphi = \varphi' = CAE$, wenn $Cos \varphi' = \frac{a^2 + \varrho^2 - R^2}{2 a \varrho}$ wäre, nehmen; dadurch erhielte man nämlich für irgend einen Werth von ϱ die Größe des mit diesem Halbmesser um A beschriebenen in der Kugel liegenden Ringes von der Dicke $d\varrho$. Das erste Integral $= 2 \pi \varrho^2 d\varrho . Cos \varphi + Const.$ ist also

$$= 2 \pi \varrho^2 d\varrho \left\{ \frac{a}{2\varrho} + \tfrac{1}{2} \frac{\varrho}{a} - \frac{R^2}{2 a \varrho} - Cos \epsilon \right\},$$

und dieses abermals integrirt, giebt:

$$= \pi \left\{ \tfrac{1}{2} a \varrho^2 + \tfrac{1}{4} \frac{\varrho^4}{a} - \tfrac{1}{2} \frac{R^2 \varrho^2}{a} - \tfrac{2}{3} \pi \varrho^3 Cos \epsilon \right\} + Const.$$

Dieses Integral muß zwischen den Grenzen $\varrho = AD$ und $\varrho = AB$ genommen werden; aber es ist $R^2 = a^2 + \varrho^2 - 2 a \varrho \, Cos \epsilon$, wenn ϱ einen jener beiden Werthe erlangt, diese Werthe sind also $\varrho = a \, Cos \epsilon \pm \sqrt{(R^2 - a^2 Sin^2 \epsilon)^2}$, folglich das vollständig genommene Integral

$$= \pi \left\{ \tfrac{1}{2} \frac{a^2 - R^2}{a} . 4 a \, Cos \epsilon . - \tfrac{2}{3} Cos \epsilon (6 a^2 Cos^2 \epsilon + 2 R^2 - 2 a^2 Sin^2 \epsilon) \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4 . a} (8 a^3 Cos^3 \epsilon + 8 a \, Cos \epsilon (R^2 - a^2 Sin^2 \epsilon)) \right\} \sqrt{(R^2 - a^2 Sin^2 \epsilon)};$$
$$= \tfrac{4}{3} \pi \, Cos \epsilon (R^2 - a^2 Sin^2 \epsilon)^{\frac{3}{2}},$$

wie vorhin.

406. Ganz ebenso ließe sich nun auch in Fig. 79., wenn die Abstände von A gerechnet werden, der Inhalt der ganzen Kugel berechnen, und man hätte nur nöthig, in der vorigen Formel $\epsilon = 0$ oder den Kegel als verschwindend anzunehmen, wo dann $\frac{4}{3} \pi R^3$ als Inhalt der Kugel hervorginge.

407. **Beispiel.** Den Inhalt des Körpers zu finden, der durch Umdrehung der Cycloide (1. Th. Fig. 163.) um die Axe ML entsteht. Hier ist (1. Th. §. 612.) die Ordinate $= a\psi + a \, Sin \psi$,

die Abscisse $= a - a \, Cos \psi$ und ihr Differential $= a \, d\psi \, Sin \psi$.

Die dünne Schichte also, deren Dicke $= a \, d\psi \, Sin \psi$ ist, hat den Inhalt

$$a^3 \pi \{ \psi^2 d\psi \, Sin \psi + 2 \psi \, d\psi \, Sin^2 \psi + d\psi . Sin^3 \psi \} .$$

Das Integral hiervon ist, wenn es mit ψ zugleich verschwinden soll =

$$a^3\pi.\Big\{-\psi^2 Cos\psi + 2\psi Sin\psi + 2 Cos\psi - \tfrac{13}{12}$$
$$-\frac{\psi}{2} Sin 2\psi - \frac{Cos 2\psi}{4} + \tfrac{1}{2}\psi^2 + \tfrac{1}{12} Cos 3\psi - \tfrac{3}{4} Cos\psi\Big\}$$

und dieses wird für $\psi = \frac{1}{2}\pi$,

$$a^3.\pi\{\tfrac{1}{8}\pi^2 + \pi - \tfrac{5}{6}\}$$

und für $\psi = \pi$, wird es $= a^3\pi(\frac{3}{2}\pi^2 - \frac{8}{3})$.

Wenn der Körper durch die um AD (1. Th. Fig. 163.) gedrehte Cycloide begrenzt wird, so ist jede Schichte

$$= (a\varphi - a Sin\varphi)^2 \pi a Sin\varphi . d\varphi,$$
$$= a^3\pi(\varphi^2 d\varphi Sin\varphi - 2\varphi d\varphi Sin^2\varphi + Sin^3 . \varphi d\varphi)$$

also das Integral =

$$a^3\pi\{-\varphi^2 Cos\varphi + 2\varphi Sin\varphi + 2 Cos\varphi - \tfrac{19}{12}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\varphi Sin 2\varphi + \tfrac{1}{4} Cos 2\varphi - \tfrac{1}{2}\varphi^2$$
$$+ \tfrac{1}{12} Cos 3\varphi - \tfrac{3}{4} Cos\varphi\}$$

wenn es mit $\varphi = 0$ verschwinden soll, und bis $\varphi = \pi$ genommen,

$$= \tfrac{1}{2} a^3\pi^3 - \tfrac{8}{3} a^3\pi.$$

Wenn man sich einen Cylinder denkt, (1. Theil Fig. 163.) dessen Halbmesser AL und Höhe AD ist, so wird, da $AL = a\pi$, $AD = 2a$ ist, sein Inhalt

$$= 2a^3\pi^3,$$

dagegen ist $\frac{4}{3}a^3\pi$ der Inhalt einer Kugel vom Durchmesser $= 2a$, also ist der Körper der durch Umdrehung der halben Cycloide um LM entsteht $= \frac{3}{4}$ des Cylinders — 2. Inhalt der Kugel, und der Körper der durch Umdrehung der Cycloide um AD entsteht

$$= \tfrac{1}{4}. \text{Inh. des Cylinders} - 2. \text{Inhalt der Kugel.}$$

Drehte sich die Cycloide um AH, so wäre die Dicke der kreisförmigen Schichten $= a d\varphi - a d\varphi Cos\varphi$ und der Inhalt der durch Umdrehung einer Ordinate entstandenen Kreise $= \pi a^2 (1 - Cos\varphi)^2$, also das Differential des Körpers

$$= \pi a^3 d\varphi (1 - Cos\varphi)^3$$

wovon das Integral

$$= a^3\pi\{\varphi - 3 Sin\varphi + \tfrac{3}{2}\varphi + \tfrac{3}{4} Sin 2\varphi$$
$$- \tfrac{1}{12} Sin 3\varphi - \tfrac{3}{4} Sin\varphi\}$$

ist, welches von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ genommen, giebt $5a^3\pi^2$

Der Inhalt des Cylinders, dessen Höhe $= 2a\pi$ und Halbmesser $= 2a$, ist $= 8a^3\pi^2$, wovon also jener runde Körper fünf Achtel enthält.

408. **Aufgabe.** Den Inhalt des elliptischen Paraboloids zu finden.

Auflösung. Da die Gleichung (1. Th. 732.) $z = \frac{mx^2 + ny^2}{a}$, die z so ausdrückt, dafs sie vom Scheitel an gerechnet werden, so wird man das Integral in Beziehung auf z zwischen den Grenzen (Fig. 82.) $z = AX$ und

$z = AV = b$ nehmen müssen. Es sei also das gesuchte Integral

$$= \int\int\int dx\,dy\,dz = S, \text{ so ist}$$

$$S = \int\int z\,dx\,dy \text{ zwischen den angegebnen Grenzen}$$

$$= \int\int \left\{ b\,dx\,dy - \frac{mx^2}{a} dx\,dy - \frac{ny^2}{a} dx\,dy \right\}.$$

Dieses in Beziehung auf y integrirt, giebt

$$S = \int \left\{ by\,dx - \frac{mx^2 y}{a} dx - \tfrac{1}{3} \cdot \frac{ny^3\,dx}{a} + C\,dx \right\}$$

wo C eine Function von x ist, die durch die Anfangsgrenze des Integrals bestimmt wird. Für ein bestimmtes x aber ist es die durch XZU (Fig. 82.) angedeutete Schichte, deren Inhalt das unter dem Integralzeichen Stehende ausdrückt, und diese liegt, da $z = b$ ist, zwischen

$$\text{den Grenzen } y = +\sqrt{\left(\frac{ab - mx^2}{n}\right)} = VU$$

$$\text{und } y = -\sqrt{\left(\frac{ab - mx^2}{n}\right)} = VZ$$

Man mufs also das Integral so nehmen, dafs es für den letztern Werth von y verschwindet, und für den erstern seinen vollständigen Werth erreicht, der demnach ist:

$$S = \int \left\{ 2\left(b - \frac{mx^2}{a}\right) - \tfrac{2}{3}\left(\frac{ab - mx^2}{a}\right)\right\} dx \cdot \sqrt{\left(\frac{ab - mx^2}{n}\right)},$$

$$\text{oder } = \int \tfrac{4}{3} \frac{dx}{a\sqrt{n}} \{ab - mx^2\}^{\frac{3}{2}},$$

$$\text{oder } = \tfrac{4}{3} \sqrt{\frac{ab^3}{n}} \cdot \int dx \left(1 - \frac{mx^2}{ab}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Um dieses letzte Integral bequemer zu finden, sei

$$x\sqrt{\frac{m}{ab}} = \mathrm{Sin}\,\varphi, \text{ also } \left(1 - \frac{mx^2}{ab}\right)^{\frac{3}{2}} = \mathrm{Cos}^3\,\varphi,$$

$$dx = d\varphi \cdot \sqrt{\frac{ab}{m}} \cdot \mathrm{Cos}\,\varphi,$$

$$S = \tfrac{4}{3} \frac{ab^2}{\sqrt{mn}} \int d\varphi \cdot \mathrm{Cos}^4\varphi = \tfrac{4}{3} \frac{ab^2}{\sqrt{mn}} \int \{\tfrac{1}{8} \mathrm{Cos}\,4\varphi \cdot d\varphi + \tfrac{1}{2} d\varphi\, \mathrm{Cos}\,2\varphi + \tfrac{3}{8} d\varphi\}$$

$$= \tfrac{4}{3} \frac{ab^2}{\sqrt{mn}} \{\tfrac{1}{32} \mathrm{Sin}\,4\varphi + \tfrac{1}{4} \mathrm{Sin}\,2\varphi + \tfrac{3}{8}\varphi\}$$

Dieses Integral von $x=0$ oder $\varphi=0$ an genommen bedarf keiner hinzugefügten *Constans*; es wird dann von dem durch die Axe gehenden mit y oder mit XUV parallelen Schnitte gerechnet. Soll das Integral dann die Hälfte des Körpers bis dahin wo $z=b$ ist, ganz umfassen, oder alle Schichten bis an D, so ist ja $x=\sqrt{\frac{ab}{m}}$ der äusserste Werth den x erhält, der nämlich mit $z=b$ und $y=0$ zusammengehört und wenn $x=\sqrt{\frac{ab}{m}}$ ist, so ist $Sin\,\varphi=1$, oder $\varphi=\frac{1}{2}\pi$; das ganze Integral beschränkt sich also dann, da $Sin\,2\varphi=Sin\,4\varphi=0$ ist, auf $S=\frac{1}{4}\pi\frac{ab^2}{\sqrt{mn}}$, oder verdoppelt, wenn man es von E bis D nehmen, den Inhalt des ganzen Körpers haben will,

$$S=\tfrac{1}{2}\pi\frac{ab^2}{\sqrt{mn}}.$$

409. Wenn $m=n$, so ist die Fläche des Paraboloids durch Umdrehung einer Parabel vom Parameter $=\frac{a}{m}$ entstanden, und nach der Anleitung des §. 402. der Inhalt $=\pi\int(x^2+y^2)\,dz=\pi\int\frac{az\,dz}{m}=\frac{1}{2}\frac{a\pi b^2}{m}$, wenn das Integral von $z=0$ bis $z=b$ genommen wird.

Auf ganz ähnliche Art könnte für alle durch Flächen der zweiten Ordnung begrenzte Körper der Inhalt gefunden werden.

410. **Aufgabe.** Es sei (Fig. 83.) in der Ebne des gröfsten Kreises AD einer Halbkugel ABD ein Kreis $CEDF$ so gezeichnet, dafs der Halbmesser jenes gröfsten Kreises sein Durchmesser ist, und über diesem ein grader Cylinder errichtet; man sucht den Inhalt des durch die Kugeloberfläche abgeschnittenen Theiles dieses Cylinders.

Auflösung. Es sei $CK=x$, so wird zuerst die Schichte $EIHG$, deren Dicke $=dx$ ist, auf folgende Weise bestimmt.

Ihr Inhalt wird, wenn z die mit CB parallele Ordinate ist, durch $\int z\,dx\,dy$ ausgedrückt, wenn man dieses Integral von $z=0$ bis an die Kugelfläche nimmt, wo $z=\sqrt{(R^2-x^2-y^2)}$ ist; dieser Inhalt ist also

$$=\int\{dx\,dy\,.\sqrt{(R^2-x^2-y^2)}=dx\int dy\sqrt{(R^2-x^2-y^2)}$$

$$=\tfrac{1}{2}dx\sqrt{(R^2-x^2)}\left\{y\sqrt{\left(1-\frac{y^2}{R^2-x^2}\right)}+\sqrt{(R^2-x^2)}\,.\,Arc\,Sin\frac{y}{\sqrt{(R^2-x^2)}}\right\}.$$

Damit dieses Integral die ganze innerhalb des Cylinders liegende Schichte umfasse, mufs es von

$$y = -\sqrt{(Rx - x^2)} = KG \text{ bis } y = +\sqrt{(Rx - x^2)} = KE$$

genommen werden, weil die bis an den Umfang des Cylinders gerechnete Ordinate durch $y^2 = x(R - x)$ gegeben ist. Eben so gut kann man das von $y = 0$ bis $y = +\sqrt{(Rx - x^2)}$ genommene Integral verdoppeln. Die ganze Schichte $EIHG$ wird also

$$dS = dx\sqrt{(Rx - x^2)}\sqrt{(R^2 - Rx)} + dx\,(R^2 - x^2)\,.\,Arc\,Sin\sqrt{\frac{x}{R+x}}$$

oder $dS = dx\,.\,(R - x)\sqrt{Rx} + dx\,(R^2 - x^2)\,.\,Arc.\,Sin\sqrt{\frac{x}{R+x}}$.

Dieses Differential mufs nun endlich in Beziehung auf x integrirt werden, und da giebt das erste Glied sogleich $\frac{2}{3}R^{\frac{3}{2}}\,.\,x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}R^{\frac{1}{2}}\,.\,x^{\frac{5}{2}}$; aber um das zweite Glied zu integriren ist es bequemer $Arc.\,Sin\sqrt{\frac{x}{R+x}} = \varphi$ zu setzen, also

$$Sin\,\varphi = \sqrt{\frac{x}{R+x}};\quad Cos\,\varphi = \sqrt{\frac{R}{R+x}}$$

$$x = R\,.\,tang^2\,.\,\varphi;\quad dx = 2R\,.\,d\varphi\,.\,tang\,\varphi\,.\,Sec^2\varphi = \frac{2R\,d\varphi\,Sin\,\varphi}{Cos^3\,\varphi};$$

$$R^2 - x^2 = R^2(1 - tang^4\varphi) = \frac{R^2\,Cos\,2\,\varphi}{Cos^4\varphi} = \frac{2R^2}{Cos^2\,\varphi} - \frac{R^2}{Cos^4\,\varphi};$$

und nun wird jenes zweite Glied

$$dx\,(R^2 - x^2)\,Arc.\,Sin\sqrt{\frac{x}{R+x}} = \frac{4R^3\,\varphi\,d\varphi\,Sin\,\varphi}{Cos^5.\,\varphi} - \frac{2R^3.\,\varphi\,d\varphi\,Sin\,\varphi}{Cos^7.\,\varphi};$$

also das Integral

$$= \frac{R^3\,\varphi}{Cos^4\,\varphi} - R^3\int\frac{d\varphi}{Cos^4\,\varphi} - \tfrac{1}{3}\,\frac{R^3\,\varphi}{Cos^6\,\varphi} + \tfrac{1}{3}\,R^3\int\frac{d\varphi}{Cos^6\,\varphi},$$

und da $\int\frac{d\varphi}{Cos^6\,\varphi} = \frac{Sin\,\varphi}{5.\,Cos^5\,\varphi} + \frac{4}{5}\int\frac{d\varphi}{Cos^4\varphi}$

und $\int\frac{d\varphi}{Cos^4\,\varphi} = \frac{Sin\,\varphi}{3\,Cos^3\,\varphi} + \frac{2}{3}\,tang\,\varphi$ ist, so wird eben das Integral

$$= R^3\,\varphi\left\{\frac{1}{Cos^4\,\varphi} - \frac{1}{3}\,.\,\frac{1}{Cos^6\,\varphi}\right\} + \frac{R^3}{15}\,.\,\frac{Sin\,\varphi}{Cos^5\,\varphi} - \tfrac{11}{15}\int\frac{R^3.\,d\varphi}{Cos^4\,\varphi},$$

$$= R^3\,\varphi\left\{\frac{1}{Cos^4\,\varphi} - \frac{1}{3}\,.\,\frac{1}{Cos^6\,\varphi}\right\} + \frac{R^3}{15}\left\{\frac{1}{Cos^4\,\varphi} - \frac{11}{3}\,.\,\frac{1}{Cos^2\,\varphi} - \frac{22}{3}\right\}tang\,\varphi.$$

So wohl dieses Integral als das des ersten Gliedes mufs von $x = 0$ bis $x = R$, das ist, von $\varphi = 0$, bis $\varphi = \frac{1}{4}\pi$, wo $Sin\,\varphi = \sqrt{\frac{1}{2}}$ ist, genommen werden,

und dann giebt

das erste Glied $\frac{4}{15} R^3$;

das zweite Glied $\frac{1}{3} R^3 \pi + \frac{4}{15} R^3 - \frac{44}{45} R^3$,

also ist der Inhalt des so herausgeschnittenen Cylinders, der oben von der Kugelfläche begrenzt wird $= \frac{1}{3} R^3 . \pi - \frac{4}{9} R^3$.

411. Da der Inhalt der Viertelkugel, die über dem Halbkreise $LCMD$ steht,

$$= \frac{1}{3} \pi R^3$$

ist, so muſs folglich der Ueberrest der Viertelkugel, nachdem jene cylindrisch und sphärisch begrenzte Säule weggenommen ist

$$= \frac{4}{9} R^3, \text{ sein.}$$

Folglich wenn man die ganze Kugel mit zwei solchen cylindrischen Höhlungen durchbohrte, so würde der Ueberrest $= \frac{16}{9} R^3 = \frac{2}{9} D^3$ sein, wenn D der Durchmesser der Kugel ist. *)

412. Aehnliche Rechnungen müſste man anstellen, um den Inhalt der Kegel- und Cylinderstücke zu erhalten, die durch Ebnen, nicht mit der Grundfläche parallel, abgeschnitten werden. Vgl. Commentarii Acad. Petrop. Tom. VI.

413. Bemerkung. An das Beispiel in §. 410., wo ein Theil der Kugel so berechnet werden konnte, daſs der Inhalt algebraisch, nicht von π abhängig, ausgedrückt wurde, hat man die Frage geknüpft, wie man allgemein die Grundfläche eines Cylinders bestimmen könne, der durch eine gegebne krumme Fläche oberwärts begrenzt, einen algebraisch ausgedrückten Inhalt habe. **)

Da die den Cylinder oberwärts begrenzende krumme Fläche eine gegebne sein soll, so ist in dem Integral $\int\int z\,dx\,dy$, die Gröſse z eine gegebne Function, und es kömmt dann darauf an, für y eine solche Function anzunehmen, daſs das Integral algebraisch werde, oder — wie in §. 410. eigentlich der Fall war — aus einem bestimmt gegebnen Gliede und einem algebraischen Theile bestehn.

Ich will bei der Kugel stehn bleiben, also

$$\int\int z\,dx\,dy = \int\int dx\,dy \sqrt{(R^2 - x^2 - y^2)}$$

setzen, welches sogleich in

$$= \frac{1}{2} \int dx . y \sqrt{(R^2 - x^2 - y^2)} + \frac{1}{2} \int dx (R^2 - x^2)\, Arc\, Sin \frac{y}{\sqrt{(R^2 - x^2)}}$$

*) Woodhouse in den Philos. Transact. for 1801.

**) Lacroix traité du calcul integral. Vol. 2. p. 218. und Fuſs in Nov. Act. Acad. Petrop. Tom XIV.

übergeht. Dieses Integral mufs, um den Halbcylinder zu bestimmen, von $y=0$ an genommen werden, wodurch dann die im allgemeinen beizufügende beständige Gröfse verschwindet, seinen vollständigen Werth soll es aber da erhalten, wo y das wird, was es an den Grenzen jenes zu bestimmenden Cylinders wird, — ich will diesen Werth $=y'$ nennen.

Hier ist es offenbar bequem $y'=u\,.\sqrt{(R^2-x^2)}$ zu setzen, obgleich damit die gesuchte Function noch nicht bestimmt wird, und es ist dann jenes Integral

$$=\tfrac{1}{2}\int\{u\,dx\,.\,(R^2-x^2)\sqrt{(1-u^2)}+dx\,.\,(R^2-x^2)\,Arc\,Sin.\,u\},$$

welches man durch theilweise Integration auf

$$=\frac{(R^2x-\frac{1}{3}x^3)}{2}\,[u\sqrt{(1-u^2)}+Arc\,Sin.\,u]-\int du(R^2x-\tfrac{1}{3}x^3)\sqrt{(1-u^2)}$$

zurückführt. Damit hier der Theil verschwinde, welcher $Arc.\,Sin.\,u$ enthält, oder damit das Integral ganz algebraisch werde, mufs das noch unaufgelöste Integral ein Glied enthalten, worin $Arc\,Sin.\,u$ vorkömmt, und aufserdem ein algebraisches Glied; wir nehmen daher

$$\int du\,(R^2x-\tfrac{1}{3}x^3)\sqrt{(1-u^2)}$$
$$=nR^3\,Arc\,Sin\,u+R^3\,.\,U$$

und erhalten so jenes Integral

$$=\tfrac{1}{2}x(R^2-\tfrac{1}{3}x^2)u\sqrt{(1-u^2)}-R^3\,.\,U+(\tfrac{1}{2}R^2x-\tfrac{1}{6}x^3-nR^3)\,Arc.\,Sin.\,u.$$

Wenn wir hier annehmen, dafs U eine Function ist, die mit $u=0$ verschwindet, und das Integral von da an gerechnet werden soll, wo $u=0$ ist, das heifst, wo die Oberfläche des gesuchten Cylinders die Abscissenlinie schneidet, so bedarf es keiner hinzugefügten *Constans*, und im vollständigen Integral fällt das von $Arc\,Sin\,u$ abhängende Glied weg, wenn man das Integral bis dahin nimmt, wo $x^3-3R^2x+6nR^3=0$ ist, und die Function U wird dann zufolge des vorigen so bestimmt, dafs

$$\int du\,(R^2x-\tfrac{1}{3}x^3)\sqrt{(1-u^2)}=nR^3\,.\,Arc\,Sin\,u+R^3\,U$$

oder $(R^2-\frac{1}{3}x^2)\,x\,.\sqrt{(1-u^2)}=\dfrac{nR^3}{\sqrt{(1-u^2)}}+R^3\,.\,\dfrac{dU}{du},$

sei.

Verlangt man hier, dafs das Integral bis $x=R$ genommen werde, so giebt die Formel

$x^3-3R^2x+6nR^3=0$, dafs $n=\frac{1}{3}$ werde,

und dann müfste U dem entsprechend angenommen werden.

Wäre zum Beispiel $U=m\sqrt{(1-u^2)}$,

so hätte man $\frac{dU}{du} = -\frac{mu}{\sqrt{(1-u^2)}}$, und es müſste also

$$(R^2 - \tfrac{1}{3}x^2)\, x\sqrt{(1-u^2)} = \left(\frac{\tfrac{1}{3} - mu}{\sqrt{(1-u^2)}}\right) R^3,$$

oder $u^2 - \frac{muR^3}{R^2x - \frac{1}{3}x^3} = \frac{-R^3}{3xR^2 - x^3} + 1$,

sein, und damit wäre

$y' = u\sqrt{(R^2 - x^2)}$, als Ordinate der Curve gegeben, welche die Grundfläche des Cylinders begrenzen müſste, damit der Inhalt durch $= \frac{1}{2}x(R^2 - \frac{1}{3}x^2)\, u\sqrt{(1-u^2)} - mR^3\sqrt{(1-u^2)}$ ausgedrückt würde, wenn u den angegebnen Werth erhielte und dann $x = R$ gesetzt würde.

414. Um unser voriges Beispiel zu erhalten, müſste man nicht fordern, daſs *Arc Sin u* ganz wegfiele, sondern dieser Bogen müſste mit einem Factor vorkommen, der dieses Glied im vollständigen Integral auf $\frac{1}{6}R^3\pi$ brächte, damit dieses Glied im Ausdruck für den halben Cylinder sich gegen das Achtel der Kugel aufhebe. Daſs das geschieht, wenn $u = \sqrt{\frac{x}{R+x}}$ ist, und $n = -\frac{2}{3}$ wird, erhellt leicht; dann aber ist dU völlig durch x ausgedrückt.

Fünfter Abschnitt.

Von der Quadratur krummer Flächen.

415. **Lehrsatz.** Wenn eine ebne Figur $ABCDE$ gegen eine andre Ebne GH unter dem Winkel α geneigt ist, (Fig. 84.) so wird der Flächen-Inhalt der Projection $ABcde$ auf diese Ebne durch $ABCDE \,.\, Cos\,\alpha$ ausgedrückt.

Beweis. Wenn in jener Figur AB mit der Ebne GH parallel ist und man theilt die Figur durch Linien DL, CM und so weiter die auf AB senkrecht sind, in schmale Streifen, von deren Endpuncten man Cc, Dd, Ee senkrecht gegen GH zieht, so ist offenbar $dL = DL \,.\, Cos\,\alpha$ und des Streifens DM Projection $= DM \,.\, Cos\,\alpha$, da eben das für alle statt findet, so verhält sich der Inhalt der ganzen Projection zum Inhalt der Figur selbst, wie $Cos\,\alpha$ zu 1.

416. **Aufgabe.** Die Regeln zur Quadratur einer gegebnen krummen Fläche zu bestimmen.

Auflösung. Wenn die Fläche durch drei auf einander senkrechte Coordinaten x, y, z bestimmt ist, so ist offenbar eines kleinen Theiles dieser Oberfläche Projection auf die Ebne der x, y, durch $dx \cdot dy$ ausgedrückt, wenn für die vier Eckpuncte dieses Theiles die Coordinaten sind,

$$\begin{array}{lll} x, & y, & z, \\ x + dx, & y, & z + \left(\frac{dz}{dx}\right) dx, \\ x, & y + dy, & z + \left(\frac{dz}{dy}\right) dy, \\ x + dx, & y + dy, & z + \left(\frac{dz}{dx}\right) dx + \left(\frac{dz}{dy}\right) dy. \end{array}$$

Aber eben dieses Theilchens Neigung $= \zeta$ gegen die Ebne der x, y ist durch $tang\,\zeta = \sqrt{\left(\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}$ gegeben, (§. 246.) oder durch

$$Cos.\,\zeta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}}.$$

Da nnn die Gröfse des Flächentheiles $= \frac{dx \cdot dy}{Cos\,\zeta}$ ist (§. 415.) so ist das Differential der krummen Oberfläche

$$d^2 T = dx \cdot dy \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}.$$

Um hieraus T zu bestimmen, müfste man zuerst in Beziehung auf eine der beiden Gröfsen integriren, dieses Integrals Grenzen durch die andre ausdrücken und dann zum zweiten Male integriren.

417. **Aufgabe.** Die Oberfläche der Halbkugel zu bestimmen.

Auflösung. Für sie ist $z = \sqrt{(R^2 - x^2 - y^2)}$,

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{-x}{\sqrt{(R^2 - x^2 - y^2)}};\ \left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{-y}{\sqrt{(R^2 - x^2 - y^2)}},$$

also $d^2 T = dx \cdot dy \cdot \frac{R}{\sqrt{(R^2 - x^2 - y^2)}}$.

Dieses in Beziehung auf y integrirt, giebt

$$dT = R\,dx.\ Arc\ Sin \frac{y}{\sqrt{(R^2 - x^2)}},$$

und wenn man es von $y = -\sqrt{(R^2 - x^2)}$ bis $y = +\sqrt{(R^2 - x^2)}$ nimmt,

$$dT = R\pi\,dx.$$

Endlich also $T=\pi R x$, oder von $x=-R$ bis $x=+R$, das heifst, in Beziehung auf die ganze Halbkugel genommen, $T=2\pi R^2$.

418. Hätte man nur die Zone der Kugelfläche zwischen den beiden Parallelkreisen, deren Halbmesser $=a$ und $=b$ sind, bestimmen wollen, so müfste man das Integral $R\,dx\ Arc\,Sin \frac{y}{\sqrt{(R^2-x^2)}}$ zwischen den Grenzen $y=\sqrt{(a^2-x^2)}$ und $y=\sqrt{(b^2-x^2)}$ nehmen, und dieses verdoppeln, wenn die Zone sich rund um die Halbkugel erstrecken sollte.

Aber wenn man so verführe, so müfste man bei der letzten Integration auf eine etwas mühsame Weise verfahren; denn (Fig. 85.) wenn HI, KL die beiden Kreise, deren Halbmesser $=b$ und $=a$ sind, vorstellen, so giebt die Formel

$$R\,dx\ .\left\{Arc\,Sin\sqrt{\frac{a^2-x^2}{R^2-x^2}} - Arc\,Sin\sqrt{\frac{b^2-x^2}{R^2-x^2}}\right\}$$

den zwischen HI, KL abgeschnittenen Theil des unendlich schmalen Flächenraumes $DEGF$ an, und wenn man in Beziehung auf x integrirt, so kann dies Integral nur bis an I oder nur bis dahin, wo x dem kleinern Halbmesser gleich ist, genommen werden; der von I bis L liegende Theil müfste besonders gesucht werden und zwar so, dafs man $\int R\,dx\ Arc\,Sin\sqrt{\frac{a^2-x^2}{R^2-x^2}}$ von $x=b$ bis $x=a$ nähme. Es ist daher bequemer das Integral so zu suchen, als ob es sich von M bis an KL erstrecken sollte, und dann das von M bis an HI genommene davon zu subtrahiren. Wir werden aber nachher auf einem bequemern Wege die Auflösung finden.

419. Aufgabe. Den Theil der Kugel-Oberfläche zu finden, welcher durch einen senkrechten Cylinder, dessen Durchmesser CD (Fig. 83.) ist, abgeschnitten wird.

Auflösung. Die Differentialformel ist hier wieder $\frac{R\,dx\,dy}{\sqrt{(R^2-x^2-y^2)}}$ und ihr erstes Integral $dT=R\,dx\,.\,Arc\,Sin\frac{y}{\sqrt{(R^2-x^2)}}$, aber dieses Integral soll nur zwischen den Grenzen, die der Cylinder bestimmt, genommen werden, also dem doppelten von $y=0$ bis $y=\sqrt{(Rx-x^2)}$ genommenen Werthe des Integrals gleich sein. (Vergl. §. 410.) Also ist das vollständige

$$dT=2R\,dx\,.\,Arc.\,Sin\sqrt{\frac{x}{R+x}}.$$

Es sei $Sin^2\varphi=\frac{x}{R+x}$; $x=\frac{R\,Sin^2\varphi}{Cos^2\varphi}=R\,tg^2\varphi$,

also $dT = 4R^2\varphi d\varphi\, tang\varphi . Sec^2\varphi = \frac{4R^2\varphi d\varphi Sin\varphi}{Cos^3\varphi}$,

also $T = \frac{2R^2\varphi}{Cos^2\varphi} - 2R^2\int\frac{d\varphi}{Cos^2\varphi} = \frac{2R^2\varphi}{Cos^2\varphi} - 2R^2\, tang.\varphi.$

dieses von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{1}{4}\pi$ genommen, giebt $T = R^2\pi - 2R^2$.

Wenn man für zwei solche Cylinder, deren Durchmesser auf demselben Durchmesser der Kugel, an beiden Seiten des Mittelpunctes liegen, jene Stücke der Kugelfläche sucht, so ist also ihre Summe

$$= 2R^2\pi - 4R^2,$$

die Oberfläche der Halbkugel ist $= 2R^2\pi$, also der Ueberrest der Kugel-Oberfläche, nach Wegnahme jener zwei Stücke $= 4R^2$.

420. Sucht man die Oberfläche beider Cylinder, so weit sie in der Kugelfläche eingeschlossen ist, so findet man diese ebenfalls $= 4R^2$. Offenbar nämlich ist dieser Oberfläche Differential $= z\,ds$, wenn man unter ds einen kleinen Bogen der Grundfläche des Cylinders versteht. Da nun für diese Grundfläche $y^2 = Rx - x^2$, also $dx^2 + dy^2 = dx^2\left(1 + \frac{(R-2x)^2}{4y^2}\right)$ ist, und $z = \sqrt{(R^2 - x^2 - y^2)} = \sqrt{(R^2 - Rx)}$ wird, für jeden Punct, der in der Durchschnittslinie der Cylinder- und Kugelfläche liegt, so ist

$$\int z\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \int\frac{R^{\frac{3}{2}}dx}{2x^{\frac{1}{2}}} = R^{\frac{3}{2}}.x^{\frac{1}{2}},$$

oder von $x = 0$ bis $x = R$ genommen, die ganze Fläche $= R^2$. Wenn man also zwei solche gleiche Cylinder durch beide Halbkugeln gehend annimmt, so ist ihre Oberfläche eben so grofs, als jenes von der Halbkugel übrig bleibende Stück der Oberfläche.

421. **Aufgabe.** Die Oberfläche eines runden Körpers zu bestimmen, der durch Umdrehung einer gegebnen Curve um eine gegebne Axe entsteht.

Auflösung. Es sei (Fig. 86.) AB die Axe, um welche die Curve CEF sich dreht, so beschreibt jedes Theilchen Ee derselben einen kleinen abgekürzten Kegel, dessen Oberfläche offenbar $= Ee . \pi . EG$ ist. Wenn die Linie durch Coordinaten $AH = x$, $HE = y$, bestimmt, also $Ee = ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ ist, so hat man also das Differential der Oberfläche des runden Körpers

$$dT = 2\pi . y . ds,$$

dessen Integral gesucht werden mufs.

422. **Beispiel.** Es sei $y = R^2 - x^2$, $ds = \frac{R\,dx}{y}$,

also $dT = 2\pi R dx$, und $T = 2\pi R x$,
welches für $x = R$ in $T = 2\pi R^2$ übergeht und die Oberfläche der Halbkugel giebt. (§. 417.)

Hätte man nur die Kugelzone von $x = f$ bis $x = g$ haben wollen, so wäre diese $= 2\pi R(g - f)$, (übereinstimmend mit Geom. §. 618.), und hier das gefunden, was wir §. 416. sehr mühsam hätten suchen müssen.

423. Beispiel. Die Oberfläche des elliptischen Sphäroids zu finden. Es sei $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$,

$$dy = -\frac{b^2 x dx}{a^2 y}; \quad ds = \frac{dx \sqrt{(a^4 y^2 + b^4 x^2)}}{a^2 y},$$

also $$dT = \frac{2\pi dx}{a^2}\sqrt{(a^4 b^2 - b^2(a^2 - b^2)x^2)},$$

$$dT = 2\pi b dx \sqrt{\left(1 - \left(\frac{a^2 - b^2}{a^4}\right)x^2\right)},$$

und $$T = \pi b x \sqrt{\left(1 - \left(\frac{a^2 - b^2}{a^4}\right)x^2\right)} + \frac{\pi b a^2}{\sqrt{(a^2 - b^2)}} \, Arc\,Sin \frac{x\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a^2}$$

welches von $x = 0$ bis $x = a$ genommen, die Fläche des halben Sphäroids giebt.

424. Aufgabe. Die Oberfläche des schiefen Kegels mit kreisförmiger Grundfläche zu finden.

Auflösung. Es sei (Fig. 87.) AB die Grundfläche des Kegels; das von der Spitze E auf die Ebne der Grundfläche herabgelassene Perpendikel treffe diese in D, und es sei $CD = a$, $ED = b$, der Halbmesser $AC = R$. Es ist hier offenbar am bequemsten, als Differential der Oberfläche ein durch zwei Seitenlinien EU, EV, und den unendlich kleinen Kreisbogen UV begrenztes Stück anzunehmen, und nur die Bestimmung der Höhe dieses Drei-Ecks hat einige Schwierigkeit. Offenbar nämlich ist EF die Höhe dieses Drei-Ecks, wenn EF die von E auf die an UV gezogne Tangente senkrechte Linie ist.

Da nach den vorigen Bezeichnungen $CE = \sqrt{(a^2 + b^2)}$, so wird, wenn ich $ACU = \varphi$ setze, die Seitenlinie EU,

$$EU = \sqrt{\{a^2 + b^2 + R^2 - 2Ra\,Cos\varphi\}}, \text{ weil}$$

$$Cos\,ECU = Cos\varphi \,.\, Cos\,ECD = \frac{a\,Cos\varphi}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} \text{ ist.}$$

Es läſst sich leicht übersehn, (Geom. §. 422.), daſs DFU ein rechter Winkel ist, und folglich die Drei-Ecke GFD und GUC ähnlich sind, also $DF + UC = a\,Cos\varphi$,

$$DF = a \, Cos \, \varphi - R, \quad \text{und endlich}$$
$$EF = \sqrt{(b^2 + (a \, Cos \, \varphi - R)^2)}.$$

Das Differential der Kegelfläche ist also

$$\tfrac{1}{2} \, UV. \, EF = \tfrac{1}{2} \, R d\varphi \sqrt{(R^2 + b^2 - 2aR \, Cos \, \varphi + a^2 \, Cos^2 \, \varphi)}.$$

Das Integral dieser Differentialformel läſst sich nur durch Reihen oder andre Näherungs-Methoden finden.

Man könnte $a \, Cos \, \varphi - R = w$ setzen,

$$\text{also} \quad d\varphi = \frac{-dw}{a \, Sin \, \varphi} = \frac{-dw}{\sqrt{\{a^2 - (R+w)^2\}}}$$

und das Differential der Fläche

$$= -\tfrac{1}{2} \, R dw \sqrt{\frac{b^2 - w^2}{a^2 - (R+w)^2}}.$$

Eine Formel, die sich offenbar nicht rational machen läſst, aber deren genähertes Integral nicht schwer zu bestimmen wäre. *) Wie es mit den elliptischen Integralen in Verbindung steht, zeigt Legendre Exercices du calcul integral. p. 173.

428. Auf ganz ähnliche Weise könnte man das Differential andrer Kegelflächen, wenn ihre Grundfläche auch eine andre Curve wäre, bestimmen; aber freilich würde die Betrachtung da fast immer noch schwieriger sein.

Selbst für die übrigen abwickelbaren Flächen, die aus solchen kleinen triangulären Flächen gleichsam zusammengesetzt sind, fände etwas Aehnliches, jedoch mit noch mehr Schwierigkeit statt.

Sechster Abschnitt.

Von der Bestimmung krummer Flächen durch Eigenschaften, die auf Differentialgleichungen führen.

426. Bemerkung. Wenn man krumme Flächen durch Eigenschaften bestimmt, die auf Differentialgleichungen führen, so können im Allgemeinen diese Gleichungen entweder die eine der drei von einander abhängigen Gröſsen durch eine vollständige Differentialgleichung ausdrücken, oder sie können

*) so daſs man die Reihen in Kästners Abh. de coni scaleni superficie Commentationes Soc. Gotting. Vol. IX. jetzt entbehren kann.

auch als **partielle** Differentialgleichungen nur die Abhängigkeit der partiellen Differentiale von einander oder von den veränderlichen Gröfsen selbst angeben. Das erstere scheint so selten vorzukommen, dafs es nicht der Mühe werth ist, dabei zu verweilen *), zumal da die bei der weitern Auflösung anzuwendende Kunst blofs im geschickten Integriren besteht. Desto häufiger und mannigfaltiger kommen die andern vor, und von ihnen will ich hier eine Reihe von Beispielen mittheilen.

1. *Von den cylindrischen Flächen.*

427. **Bemerkung.** Die Betrachtung, welche wir früher (§. 281.) über die Cylinderflächen anstellten, dafs sie durch die Bewegung einer immer mit einer gegebnen Linie parallel bleibenden graden Linie gleichsam hervorgebracht würde, oder dafs jede von einem Puncte der Fläche aus parallel mit der gegebnen Linie gezogne grade Linie ganz in der Cylinderfläche läge, führte uns zu der Gleichung $y - mz = f : (x - nz)$, als für alle Cylinderflächen passend. Aber die Cylinderflächen haben auch die Eigenschaft, dafs alle ihre Berührungs-Ebnen jener gegebnen Linie parallel sind.

428. **Aufgabe.** Aus der Eigenschaft, dafs alle Berührungs-Ebnen einer Cylinderfläche parallel mit einer gegebnen Linie sind, die Differentialgleichung und Integralgleichung für diese Flächen zu finden.

Auflösung. Die Gleichung für die Berührungs-Ebne ist (§. 244.)

$$(u - x)\left(\frac{dz}{dx}\right) + (v - y)\left(\frac{dz}{dy}\right) = w - z,$$

wenn sie an dem durch x, y, z bestimmten Puncte berührt, und u, v, w, die drei Coordinaten jedes in ihr liegenden Punctes bedeuten.

Wenn nun die Lage der gegebnen Linie durch zwei Gleichungen für die Projectionen,

nämlich $v = bu,$
$w = au,$

bestimmt ist: so würde eine mit ihr parallele Linie, die durch den vermittelst x, y, z, gegebnen Punct ginge, zwei Projectionen geben, deren Gleichungen

$$(v - y) = b(u - x),$$
$$(w - z) = a(u - x),$$

sind. Soll also die Berührungs-Ebne durch diese Linie gehn, so müssen wir einen Punct in ihr erhalten, wenn wir uns in einem Puncte dieser Linie befin-

*) Zu den erstern kommen einige Beispiele, die sich auf krumme Flächen anwenden lassen, vor in Eulers Instit. Calc. integr. Vol. III. Pars I. Cap. I.

den, oder wenn wir zu gleicher Zeit $v-y=b(u-x)$ und $w-z=a(u-x)$, in die Gleichung setzen, dadurch aber wird

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) + b\left(\frac{dz}{dy}\right) = a,$$

als Bedingungsgleichung oder als Differentialgleichung für die cylindrische Fläche.

Um diese Gleichung zu integriren, müssen wir in den allgemeinen Werth von dz,

$$dz = \left(\frac{dz}{dx}\right)dx + \left(\frac{dz}{dy}\right)dy,$$

den aus jener genommenen Werth $\left(\frac{dz}{dx}\right) = a - b\left(\frac{dz}{dy}\right)$ setzen, wodurch

$$dz = a\,dx - \left(\frac{dz}{dy}\right)\{b\,dx - dy\},$$

oder $$(dz - a\,dx) = \left(\frac{dz}{dy}\right).\{-b\,dx + dy\}$$

wird; — eine Gleichung deren allgemeine Auflösung ist, dafs $z - ax$ irgend eine Function von $bx - y$ sein mufs, $z - ax = f:(bx - y)$, als allgemeine Gleichung für alle Cylinderflächen.

429. Obgleich es hier nicht der Ort ist, die Regeln für die Integration anzugeben, so will ich doch kurz bemerken, dafs bekanntlich, wenn $dt = V ds$ sein soll, nothwendig V eine Function von s ist; denn wenn gleich V auch allenfalls von s und t abhängen sollte, so ist doch zuletzt auch t eine Function von s, und also V immer endlich als Function von s anzusehn. In unsrer Gleichung $d.(z - ax) = \left(\frac{dz}{dy}\right) d.(bx - y)$, ist also $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ gewifs irgend eine Function von $bx - y$, und folglich auch $z - ax$, irgend eine Function von $bx - y$.

430. Dafs übrigens $z - ax = f:(bx - y)$,
mit $y - mz = F:(x - nz)$, einerlei ist, wenn $a = \frac{1}{n}$, $b = \frac{m}{n}$ ist, läfst sich aus dem schon früher Gezeigtem übersehn. Die letzte Gleichung nämlich könnte, wenn $a = \frac{1}{n}$ ist, ebensogut auch heifsen

$$y - mz = \varphi:(z - ax),$$

wo φ eine andre Form der Function anzeigt; oder auch

$$z - ax = funct:(y - mz).$$

Da nun hiernach $ax = z - funct:(y - mz)$,

so ist $bx - y = \left(\frac{bz}{a} - y\right) - \frac{b}{a}(funct : (y - mz))$,

$$= - \left\{y - \frac{bz}{a}\right\} - \frac{b}{a} funct : (y - mz),$$

oder wenn $m = \frac{b}{a}$ ist,

$bx - y =$ einer Function von $(y - mz)$ und beständigen Gröfsen; woraus erhellt, dafs auch $z - ax$, als Function von $y - mz$ eine Function von $bx - y$ ist.

431. **Bemerkung.** Um hiernach einzelne cylindrische Flächen anzugeben, könnten wir nun entweder in der Gleichung $z - ax = f : (bx - y)$, der Function f eine bestimmte Form geben, oder die Form der Function aus gegebnen Bedingungen herleiten. Das erstere will ich nur kurz erläutern.

Es sei $f : (bx - y) = k(bx - y)$, dann wäre $z = (a + bk)x - ky$, also die Fläche eine Ebne, die offenbar mit hieher gehört, weil auch sie durch die parallele Fortbewegung einer graden Linie hervorgebracht werden kann.

Es sei $f : (bx - y) = k.(bx - y)^2$, also $z = ax + k(bx - y)^2$, so ist offenbar k eine Gröfse von -1 Dimensionen, oder $k = \frac{1}{l}$ wenn l eine Linie bedeutet. Der Cylinder hat dann eine Grundfläche, die durch eine Linie der zweiten Ordnung begrenzt ist, deren Gleichung nämlich, wenn man z als die Höhe ansieht, durch $0 = ax + \frac{(bx - y)^2}{l}$, gegeben ist.

432. Wenn die grade Linie, welcher die Tangenten-Ebnen der Cylinderfläche parallel bleiben, senkrecht auf die Ebne der v, w ist, so ist $a = b = 0$, also die Gleichung für alle solche, auf v, w senkrechte Cylinderflächen $z = f : y$, so dafs x, oder die Ordinate, womit die Seitenlinien des Cylinders parallel sind, gar nicht vorkömmt.

433. **Aufgabe.** Es ist die Grundfläche des Cylinders, welche in der Ebne der x, y liegt, gegeben, man sucht die Form der Function f, in der Gleichung $z - ax = f : (bx - y)$.

Auflösung. Die Gleichung für die Cylinderfläche giebt die Gleichung für die Grundfläche, wenn man in jener $z = 0$ setzt; da aber y durch die bekannte Figur der Grundfläche vermittelst x gegeben ist, so hat man $-ax = f : (bx - y)$, als eine Gleichung die blofs x enthält, und wenn man $bx - y = t$ setzt und $-ax$ durch t ausdrückt, so erhält man die Form der Function f.

434. **Beispiel.** Es sei $y^2 = \frac{h^2}{k^2}(k^2 - x^2)$ die Gleichung für die Grundfläche, so ist

$$-ax = f:\left(bx - \frac{h}{k}\sqrt{(k^2 - x^2)}\right).$$

Nenne ich nun $t = bx - \frac{h}{k}\sqrt{(k^2 - x^2)}$,

$$\text{oder } x = \frac{btk^2 \pm hk\sqrt{\{k^2b^2 + h^2 - t^2\}}}{k^2b^2 + h^2},$$

$$\text{so ist } f:t = \frac{-abtk^2 \mp ahk\sqrt{(k^2b^2 + h^2 - t^2)}}{k^2b^2 + h^2},$$

und die Gleichung für die Fläche selbst: $(z - ax) = f:(bx - y)$, wird also

$$z - ax = \frac{-abk^2(bx - y) \mp ahk\sqrt{(b^2k^2 + h^2 - (xb - y)^2)}}{b^2k^2 + h^2}.$$

Diese Gleichung für den schiefen elliptischen Cylinder wird bequemer, wenn man die x auf der Linie nimmt, welche in einer mit z und der Axe des Cylinders parallelen Ebne liegt. Dann ist $b = 0$,

$$\text{also } (z - ax)^2 = \frac{a^2k^2}{h^2}(h^2 - y^2).$$

435. Wenn man $a = 0$ setzte, so schiene für die Grundfläche die Gleichung $0 = f:(bx - y)$, gar nichts über die Form der Function zu bestimmen; aber dieses ist auch ganz richtig, weil dann die Axe in der Ebne liegt, worauf wir die Grundfläche nehmen wollten, diese also dann statt dessen einen aus zwei Parallellinien bestehenden Längenschnitt des Cylinders geben würde.

436. **Beispiel.** Es sei $b = 0$, und die Grundfläche eine Cycloide, also

$$x = r(\varphi - \mathit{Sin}\,\varphi),$$
$$y = r(1 - \mathit{Cos}\,\varphi),$$

die Gleichung für die Cylinderfläche $z - ax = f:(bx - y)$ und für ihre Grundfläche $-ax = f:(bx - y)$, giebt also da $b = 0$ ist,

$$-ar(\varphi - \mathit{Sin}\,\varphi) = f:(-r(1 - \mathit{Cos}\,\varphi)),$$

oder wenn $-r(1 - \mathit{Cos}\,\varphi) = -t$ ist,

$$\mathit{Cos}\,\varphi = 1 - \frac{t}{r},\quad \mathit{Sin}\,\varphi = \sqrt{\left(\frac{2t}{r} - \frac{t^2}{r^2}\right)},$$

$$\text{also } ar\left\{\sqrt{\left(\frac{2t}{r} - \frac{t^2}{r^2}\right)} - \mathit{Arc\,Cos}\left(1 - \frac{t}{r}\right)\right\} = f:-t,$$

so dafs die cycloidische Cylinderfläche durch

$$z - ax = f:(-y) = a\sqrt{(2yr - y^2)} - ar\,\mathit{Arc\,Cos}\left(1 - \frac{y}{r}\right),$$

dargestellt wird.

437. Aufgabe. Wenn die Grundfläche des Cylinders bloſs durch eine Zeichnung in der Ebne der x, y, gegeben ist, die Gröſse anzugeben, die durch $f:(bx-y)$ bestimmt wird.

Auflösung. Es sei UYM (Fig. 88.) die Grundfläche des Cylinders, die hier sogar eine unregelmäſsige Linie sein kann, und Ax sei $=x'$, $XY=y'$. Da nun für die Grundfläche $-ax'=f:(bx'-y')$ ist, so kann man, weil a und b gegebne Zahlen sind, eine Curve zeichnen, deren Ordinate EG diejenige Function der Abscisse ist, welche hier durch f angedeutet wurde.

Trägt man nämlich $b.AU=Cu$,

$$b.AX-XY=Cu'; \quad b.AX+XZ=Cu'',$$
$$b.Ax-xy=CE; \quad b.Ax+xz=CF,$$

auf, und ordnet jeder dieser Abscissen die gehörige Ordinate $=-ax'$ zu, so daſs

$$uv=a.AU; \quad u'v'=u''v''=a.AX,$$
$$EG=FH=a.Ax \text{ ist,}$$

und fährt so für alle Puncte im Umfange der Grundfläche fort: so stellt jede Ordinate der Linie GvH die Function $f:u$ vor, wenn u die Abscisse bedeutet.

Wollen wir also jetzt den Werth von y bestimmen, der für diese Cylinderfläche da gilt, wo $z=c$ und $x=g$ ist, so suchen wir die Ordinate unsrer Curve auf, die $=-ag+c$ ist, und da die zugehörige Abscisse $=b.g-y$ sein muſs, so ist damit y gegeben.

In der Figur ist $a=1$, $b=2$ angenommen, und diese Buchstaben werden allemal bestimmte Zahlenwerthe haben, also allemal auf ähnliche Weise beim Auftragen benutzt werden können. Nun ist

$$\begin{array}{lll} Cu=2.AU & \text{genommen und} & uv=AU, \\ Cu'=2.AX-XY, & \text{und} & u'v'=AX; \\ Cu''=2AX+XZ, & \text{und} & u''v''=AX; \\ CE=2Ax-xy, & \text{und} & EG=Ax; \\ CF=2Ax+xz, & \text{und} & FH=Ax; \\ CN=2AM & \text{und} & NO=AM \text{ und so ferner.} \end{array}$$

Man verlangt jetzt, nachdem auch für alle zwischenliegenden Puncte die Curve VO gehörig bestimmt ist, y zu wissen, wenn $z=AL$ und $x=Ax$ ist. Um dies zu finden nimmt man $Ax-AL$ (oder $a.x-z$) und zieht in einer diesem Abstande gleichen Entfernung die Linie RS mit CD parallel; die Puncte wo sie die Curve vO schneidet geben zwei Abscissen CT, CV an, deren jede $=2.x-y$ $2.Ax-y$ gesetzt werden darf, und es ist also der gesuchte Werth von y ein doppelter, entweder

$$=2.Ax-CT$$
$$\text{oder} \quad =2\,Ax-CV.$$

438. Es läſst sich leicht zeigen, daſs die so bestimmten Werthe von y nichts anders geben, als eben die Folge von Werthen, die sich in der Grundfläche fanden, oder daſs der mit der Grundfläche parallele Schnitt völlig der Grundfläche gleich ist. Bei der Zeichnung der Curve vO ergiebt es sich, daſs jede mit CD parallele Sehne RS gleich ist derjenigen auf AM senkrechten Sehne der Grundfläche, für welche $AW = VS$ ist, und daſs, wenn man $RQ = Wq$, $SQ = Wq'$ aufträgt, Q der Abscisse $CP = 2AW = 2.PQ$ entspricht. Die beiden Werthe für y, welche wir eben fanden, als den Werthen $z = AL$ und $x = Ax$ zugehörend, lassen sich also durch

$$= 2Ax - CP + RQ = 2Ax - 2AW + Wq,$$
$$= 2.Wx + Wq$$

und durch
$$= 2Ax - CP - QS = 2Ax - 2AW - Wq'$$
$$= 2.Wx - Wq'$$

ausdrücken. Da nun, wie sich leicht übersehn läſst, $Wx = z = AL$ ist, so sind die beiden zu $z = c$, und $x = g$ gehörigen Werthe von y, allgemein $= 2c +$ dem Werthe von y, der in der Grundfläche mit $g - c$ zusammengehört; — oder mit andern Worten, in dem Querschnitte, der in der Höhe $= c$ liegt, findet man irgend einen Punct der Grundfläche dessen Abscisse $= x'$ und Ordinate $= y'$ war, da wieder, wo die Abscisse $= c + x'$ und die Ordinate $= 2c + y'$, oder allgemein jene $= ac + x'$, diese $= \frac{b}{a}c + y'$ ist.

438. Aufgabe. Es ist eine doppelt gekrümmte Curve gegeben, man sucht die Gleichung für die Cylinderfläche, auf deren Oberfläche sie liegt.

Auflösung. Ich will die Anwendung sogleich auf die Schraubenlinie machen, deren beide Gleichungen

$$y^2 = r^2 - x^2 \text{ und } z = n.r.\text{Arc Cos}\,\frac{x}{r} \text{ sind.}$$

Setzt man diese Werthe in die allgemeine Gleichung

$$z - ax = f:(bx - y),$$

so soll

$$nr.\text{Arc Cos}\,\frac{x}{r} - ax = f:(bx - \sqrt{(r^2 - x^2)})$$

sein, oder wenn ich $bx - \sqrt{(r^2 - x^2)} = t$ nenne,

also $$x = \frac{bt \pm \sqrt{(r^2 + b^2r^2 - t^2)}}{1 + b^2},$$

$$f:t = -\frac{abt}{1 + b^2} \mp \frac{a}{1 + b^2}\sqrt{(r^2 + b^2r^2 - t^2)} + nr.\text{Arc Cos}\,\frac{bt \pm \sqrt{(r^2 + br^2 - t^2)}}{r(1 + b^2)}$$

womit die Form der Function f gegeben ist.

Wäre $b = 0$, oder läge die durch die Seitenlinie des Cylinders und die Ordinate z gelegte Ebne mit x parallel, so hätten wir

$$f : t = \mp a \sqrt{(r^2 - t^2)} + nr \,.\, Arc.\ Cos. \sqrt{\left(1 - \frac{t^2}{r^2}\right)},$$

und die Gleichung für die Cylinderfläche wäre

$$z = ax \mp a \sqrt{(r^2 - y^2)} + nr \,.\, Arc\ Cos \sqrt{\left(\frac{r^2 - y^2}{r^2}\right)}.$$

Es sei ABD (Fig. 89.) die Grundfläche des Cylinders, worauf die Schraubenlinie gezeichnet ist, und nun die Höhe $= z$ zu bestimmen, wo wir oberhalb des Punctes D, für den $CE = x$, $ED = y$ ist, unsre Cylinderfläche antreffen: so giebt erstlich das Glied ax an, wie hoch die von C aus parallel mit unsers Cylinders Seitenlinie gezogene Linie sich oberhalb E erhebt, dagegen giebt $a\,(x \mp \sqrt{(r^2 - y^2)})$ an, wie hoch eine solche Parallellinie die von A oder von B aus geht, sich über dem gegebnen Puncte D erhebt, wenn nämlich $BF = y = DE$ ist; da nun die Schraubenlinie sich oberhalb A oder B in der Höhe $= n \,.\, r \,.\, Arc\ Cos \dfrac{\sqrt{(r^2 - y^2)}}{r}$ befindet, so erreicht eine von ihr ausgehende Parallellinie über D eine noch um so viel gröſsere Höhe.

2. *Von den conischen Flächen.*

439. Bemerkung. Wir fanden (§. 283.) die Gleichnng

$$\frac{y - b}{z - c} = F : \left(\frac{x - a}{z - c}\right),$$

als für alle Kegelflächen geltend; wir wollen jetzt sehn, wie die Eigenschaft, daſs alle Berührungs-Ebnen durch den Punct gehn, welcher vermittelst der drei Coordinaten $x = a$, $y = b$, $z = c$ gegeben ist, auf eben die Gleichung führt.

440. Aufgabe. Die Differentialgleichung für alle Kegelflächen aus der Eigenschaft, daſs alle Tangential-Ebnen durch die Spitze des Kegels gehn, herzuleiten.

Auflösung. Die allgemeine Gleichung für die Berührungs-Ebne

$$(u - x)\left(\frac{dz}{dx}\right) + (v - y)\left(\frac{dz}{dy}\right) = w - z,$$

muſs $w = c$ geben, wenn $u = a$, $v = b$ ist,

also ist $$(a - x)\left(\frac{dz}{dx}\right) + (b - y)\left(\frac{dz}{dy}\right) = c - z,$$

die Differentialgleichung für alle Kegelflächen.

441. Sie giebt $\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{c-z}{b-y} - \frac{a-x}{b-y}\left(\frac{dz}{dx}\right)$,

also $\quad dz = \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(dx - \frac{(a-x)}{b-y}.dy\right) + \frac{(c-z)\,dy}{b-y}$,

oder $\quad (b-y)\,dz - (c-z)\,dy = \left(\frac{dz}{dx}\right)((b-y)\,dx - (a-x)\,dy)$,

eine Gleichung, die mit $(b-y)^2$ dividirt, in

$$d.\left(\frac{c-z}{b-y}\right) = \left(\frac{dz}{dx}\right).d.\left(\frac{a-x}{b-y}\right)$$ übergeht,

also $\quad \frac{c-z}{b-y} = funct:\left(\frac{a-x}{b-y}\right)$, giebt, was mit

$$\frac{y-b}{z-c} = F:\left(\frac{x-a}{z-c}\right)$$ auf eins hinauskömmt.

442. Aufgabe. Es ist eine doppelt gekrümmte Curve gegeben, die sich ganz auf der Kegelfläche befinden soll, deren Spitze gleichfalls gegeben ist; man sucht die Function F in der Gleichung

$$\frac{c-z}{b-y} = F:\left(\frac{a-x}{b-y}\right)$$ zu bestimmen.

Auflösung. Vermittelst der beiden für die Curve gegebnen Gleichungen drückt man y sowohl als z durch x aus, so ist die Function F bestimmt, weil die Gleichung dann nur noch x enthält.

443. Als Beispiel mag wieder die Schraubenlinie dienen, für welche $y^2 = r^2 - x^2$ und $z = nr\,Arc\,Cos\frac{x}{r}$ ist. Hier wird für diejenigen Puncte der Kegelfläche, die zugleich in der Curve liegen

$$\frac{c - nr.\,Arc\,Cos\frac{x}{r}}{b-\sqrt{(r^2-x^2)}} = F:\left(\frac{a-x}{b-\sqrt{(r^2-x^2)}}\right),$$

oder wenn $\quad \frac{a-x}{l-\sqrt{(r^2-x^2)}} = t$ ist,

$$x = \frac{a-bt \pm t\sqrt{(r^2(1+t^2)-(a-tb)^2)}}{1+t^2},$$

woraus $F:t.$ bestimmt wird.

Setze ich wieder $b=0$, wodurch die Betrachtung im Wesentlichen nicht beschränkt wird, so ist

$$x = \frac{a \pm t \sqrt{(r^2 + r^2 t^2 - a^2)}}{1 + t^2},$$

$$F:t = \frac{c - nr \,.\, Arc\ Cos\left(\frac{a \pm t\sqrt{(r^2 + r^2 t^2 - a^2)}}{r(1+t^2)}\right)}{-\left(\frac{at \pm \sqrt{(r^2 + r^2 t^2 - a^2)}}{(1+t^2)}\right)},$$

woraus sich dann auch $z = c + (y - b)\, F:\left(\frac{x-a}{y-b}\right)$ allgemein ausdrücken ließe.

Wären a und b beide $= 0$, oder läge des Kegels Spitze in der Axe desjenigen Cylinders, auf welchem die Schraubenlinie gezeichnet ist, so hätten wir

$$F:t = \left\{c - nr \,.\, Arc\ Cos\ \frac{t}{\sqrt{(1+t^2)}}\right\} \frac{\sqrt{(1+t^2)}}{r}$$

oder $$F:t = \frac{\{c - n\,.\,r\,.\,Arc\ Cotang\ t\}}{r} \sqrt{(1+t^2)}$$

und hiernach als Gleichung für die Kegelfläche

$$\frac{z-c}{y} = \frac{\left(c - n\,.\,r\,.\,Arc.Cotang.\ \frac{x}{y}\right)}{-r} \sqrt{\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)}$$

oder wenn $\frac{y}{x} = tang\ \varphi$ ist,

$$z = c - \frac{y}{r}(c - nr\varphi)\ Cosec.\ \varphi.$$

Diese Gleichung bestimmt die Höhe $= z$, oder noch besser, die Tiefe $= c - z$ unter der Spitze; diese nämlich als die vierte Proportionallinie zu r, $y\ Cosec\ \varphi$ und $c - nr\varphi$, das heißt, wenn der senkrecht über oder unter D (Fig. 89.) liegende Punct der Fläche bestimmt werden soll, und $CE = x$, $ED = y$, $DCE = \varphi$, $CD = y\,.\,Cosec.\varphi$. ist, und $nr.\varphi$ die Höhe des senkrecht oberhalb H liegenden Punctes der Schraubenlinie, so ist

CH zu der Tiefe des Punctes der Schraubenlinie unterhalb der Spitze, wie CD zu der Tiefe des Punctes in der Kegelfläche unterhalb der Spitze. Daſs z eine ganze Folge von Werthen erhält, so wie es oberhalb H eine ganze Folge von Puncten in der Schraubenlinie giebt, ist leicht zu übersehn.

Wollte man die Durchschnittslinie dieser Kegelfläche mit einer zur Abscissen-Ebne parallelen Ebne haben, so hätte man diese aus den beiden Gleichungen

$x = y \,.\, Cotang\, \varphi$ und $y = \frac{r(c - z)\, Sin\, \varphi}{c - nr\varphi}$ herzuleiten, wo man φ nach und nach verschiedene Werthe beilegen, und dann die zu einander gehörigen x und y finden könnte.

444. **Aufgabe.** Es ist eine unregelmäſsige, bloſs durch Zeichnung dargestellte Grundfläche des Kegels gegeben, man sucht eine Bestimmung für die Function F und für die Querschnitte des Kegels.

Auflösung. Es sei der Anfangspunct der x, y, senkrecht unter der Spitze also $\frac{z - c}{y} = F : \frac{x}{y}$, die Gleichung für die Kegelfläche, und $EBCD$ (Fig. 90.) die Durchschnittslinie der Abscissen-Ebne mit der Kegelfläche; ferner sei $AX = x$, $XY = y$, also $\frac{x}{y} = Cotang.\, YAX$. In der Figur ist also die Function F der *Cotangente* von YAX durch $\frac{-c}{XY}$ oder $\frac{-AG}{XY}$ dargestellt, wenn G die Spitze des Kegels ist. Das heiſst: die Function F der Cotangente eines solchen Winkels ist gleich dem negativen Quotienten aus AG dividirt durch die jenem Winkel entsprechende Ordinate der Grundfläche. Verlangt man nun die Höhe $= z$, wo man die Kegelfläche oberhalb eines andern Punctes H antrifft, zu bestimmen, so zieht man AH und da

$F : \frac{x}{y} = F : (Cotang\, HAX)$, der negative Quotient $\frac{AG}{IK}$ ist, so hat man aus der Gleichung $z - c = y \,.\, F : \frac{x}{y}$, hier

$z - AG = HL \,.\, \left(\frac{-AG}{IK}\right)$, das heiſst, es verhält sich die Tiefe unter der Spitze $= AG - z$, zu HL, wie AG zu IK, wovon der geometrische Grund sogleich erhellt, weil die senkrecht oberhalb AI liegende Linie GI eine Seitenlinie des Kegels ist. Statt IK hätte auch die Ordinate des andern Einschnittspunctes bei E gebraucht werden können, und es liegen folglich in der durch H gezognen Senkrechten zwei Puncte der Kegelfläche.

445. **Aufgabe.** Diejenige Kegelfläche zu bestimmen, welche eine gegebne krumme Fläche von allen Seiten berührt, und also umhüllt.

Auflösung. In den Puncten, wo die Berührung geschieht, haben beide Flächen eine gemeinschaftliche Berührungs-Ebne und es muſs daher für beide $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ in diesen Puncten einerlei Werth erhalten. Aus der gegebnen Gleichung setzt man daher die Werthe beider Differentialquotienten

in die Differentialgleichung für die Kegelfläche, und erhält so diejenigen Puncte bestimmt, wo die Berührung geschieht, indem außer der Gleichung für die gegebne Fläche auch die eben gefundne Gleichung für alle Puncte der Curve, in welcher die Berührung geschieht, gelten muſs. Damit ist dann die Untersuchung auf §. 442. zurückgeführt.

446. **Beispiel.** Die gegebne Fläche sei das durch die Gleichung $x^2 + m^2y^2 + n^2z^2 = g^2$ gegebne Ellipsoid, also

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = -\frac{1 \cdot x}{n^2 z}; \left(\frac{dz}{dy}\right) = -\frac{m^2 y}{n^2 z}.$$

Die Differentialgleichung für die Kegelfläche war, (§. 440.),

$$(a-x)\left(\frac{dz}{dx}\right) + (b-y)\left(\frac{dz}{dy}\right) = c - z,$$

also gilt für die Berührungspuncte die Gleichung

$$(x-a)\frac{x}{n^2 z} + \frac{(y-b)\,m^2 y}{n^2 z} = c - z,$$

oder $g^2 - ax - m^2 by = n^2 cz$, und da eben dieser geometrische Ort der Berührungspuncte auch auf dem Ellipsoid liegen muſs, so hat man sowohl

$$z^2 = \frac{g^2 - m^2y^2 - x^2}{n^2}, \text{ als } z^2 = \frac{(g^2 - ax - m^2 by)^2}{n^4 c^2},$$

woraus eine Gleichung für die Projection auf die Ebne der x, y gefunden wird.

Um $F : \left(\frac{x-a}{z-c}\right)$ zu bestimmen, müſsten wir z durch x oder umgekehrt, ausdrücken.

Da nun unsre beiden Gleichungen geben

$$y = \frac{g^2 - ax - n^2 cz}{m^2 b} = \frac{\sqrt{\{g^2 - x^2 - n^2 z^2\}}}{m},$$

so ist $$z = \frac{c(g^2 - ax) \pm \frac{m}{n} b \cdot \sqrt{\{(n^2c^2 + m^2b^2)(g^2 - x^2) - (g^2 - ax)^2\}}}{m^2 b^2 + n^2 c^2},$$

und $$y = \frac{b(g^2 - ax) \mp \frac{n}{m} c \sqrt{\{(n^2c^2 + m^2b^2)(g^2 - x^2) - (g^2 - ax)^2\}}}{m^2 b^2 + n^2 c^2},$$

und wenn man diese Werthe in $\frac{c-z}{a-x} = F : \left(\frac{b-y}{a-x}\right)$ setzt, so wird die Form der Function bestimmt.

447. Diese Kegelfläche würde den Schatten jenes Körpers begrenzen, wenn er nur von einem einzigen leuchtenden Puncte erleuchtet würde; ihre Berührungslinie würde die Gegenden begrenzen, wo jener leuchtende Punct von dem umhüllten Körper nicht verdeckt würde u. s. w.

3. *Von den runden, oder durch Umdrehung entstandenen Flächen.*

448. **Erklärung.** Wenn man sich eine Fläche vorstellt, in welcher eine grade Linie so gezogen werden kann, dafs alle auf diese Linie senkrechten Schnitte, Kreise sind, deren Mittelpuncte in eben der graden Linie liegen, so ist die Fläche eine runde Fläche, und alle Ebnen, die durch jene Linie, die wir die Axe nennen, gelegt werden, geben völlig gleiche Durchschnittslinien, so dafs man es ansehen kann, als wäre die krumme Fläche durch Drehung dieser Durchschnittslinie um jene festgehaltene Axe entstanden.

449. **Aufgabe.** Eine endliche Gleichung zu finden, die alle runden Flächen enthält.

Auflösung. Es sei die Axe des runden Körpers durch zwei Gleichungen $y = mx + a$, $z = nx + b$, gegeben. Denkt man sich nun einen Punct der gesuchten Fläche durch die Coordinaten u, v, w bestimmt, so ist sein Abstand von dem durch x, y, z bestimmten Puncte der Axe

$$= \sqrt{((u-x)^2 + (v-y)^2 + (w-z)^2)},$$

oder
$$= \sqrt{\{(u-x)^2 + (v-mx-a)^2 + (w-nx-b)^2\}}.$$

Die Haupt-Eigenschaft der runden Flächen, dafs ihre auf die Axe senkrechten Querschnitte Kreise sind, läfst sich so ausdrücken, dafs alle von demselben Puncte der Axe ausgehende, oder demselben Werthe von x entsprechende, senkrecht gegen die Axe gerichteten Abstandslinien gleich werden, wenn man sie bis an die krumme Fläche nimmt. Aber jene senkrechten Abstandslinien sind die kleinsten, die man von einem durch u, v, w bestimmten Puncte der krummen Fläche an die Axe ziehen kann. Für sie also ist

$$d.\{(u-x)^2 + (v-mx-a)^2 + (w-nx-b)^2\} = 0,$$

oder
$$u - x + m(v-a-mx) + n(w-b-nx) = 0,$$

und folglich mufs $x = \dfrac{u + m(v-a) + n(w-b)}{1+m^2+n^2}$ sein, damit die Abstandslinie $= \varrho$ am kleinsten werde.

Diese Abstandslinie selbst war

$$= \sqrt{\{u^2 + (v-a)^2 + (w-b)^2 - 2x(u + m(v-a) + n(w-b)) + x^2(1+m^2+n^2)\}},$$

also wenn ich jenen Werth von x setze, so wird die kleinste Abstandslinie $= \varrho$

$$= \sqrt{\left\{u^2 + (v-a)^2 + (w-b)^2 - \frac{(u + m(v-a) + n(w-b))^2}{1+m^2+n^2}\right\}}.$$

Diese soll denselben Werth erhalten, so lange die kleinste Abstandslinie eben den Punct der Axe trifft, und soll im Allgemeinen sich ändern, wenn sie einen

andern Punct der Axe trifft, oder mit andern Worten, ϱ soll eine Function von

$$u+m(v-a)+n(w-b) \text{ sein.}$$

Da aber $\varrho^2 = u^2 + (v-a)^2 + (w-b)^2 +$ einem Gliede, das selbst eine Function von $(u+m(v-a)+n(w-b))$ ist, war, so muſs

$$u^2+(v-a)^2+(w-b)^2 = f:(u+m(v-a)+n(w-b))$$

sein, und dies ist die Hauptgleichung für alle runde Flächen.

450. Wenn man den Anfangspunct der Coordinaten in der Axe selbst annimmt, so ist $a=b=0$,

also $u^2+v^2+w^2 = f:(u+mv+nw)$,

und die Gleichung wird noch einfacher, wenn die Axe mit x oder u zusammenfällt, also $m=n=0$ ist, folglich $u^2+v^2+w^2 = f:u$ oder $w^2+v^2 = F:u$ wird.

451. Bemerkung. Die allgemeine Gleichung

$$u^2+(v-a)^2+(w-b)^2 = f:(u+m(v-a)+n(w-b)),$$

giebt differentiirt

$$2u+2(w-b)\left(\frac{dw}{du}\right) = \left(1+n\left(\frac{dw}{du}\right)\right)f':(u+m(v-a)+n(w-b))$$

und $2(v-a)+2(w-b)\left(\frac{dw}{dv}\right) = \left(m+n\left(\frac{dw}{dv}\right)\right)f':(u+m(v-a)+n(w-b))$,

wenn man allgemein $d.f:t = dt.f':t$ setzt; und wenn man aus jenen zwei Gleichungen die Function f' eliminirt, so ist

$$\frac{u+(w-b)\left(\frac{dw}{du}\right)}{1+n\left(\frac{dw}{du}\right)} = \frac{(v-a)+(w-b)\left(\frac{dw}{dv}\right)}{m+n\left(\frac{dw}{dv}\right)},$$

oder $\left(\frac{dw}{dv}\right)(w-b-nu) = (mu-(v-a)) + (m(w-b)-n(v-a))\left(\frac{dw}{du}\right)$

als Differentialgleichung für diese Flächen.

Da es immer nicht schwer ist, den Anfangspunct so anzunehmen, daſs $a=b=0$ wird, und die Coordinaten auf die Umdrehungs-Axe und eine darauf senkrechte Ebne zurück zu führen, wodurch $m=n=0$ wird, so können wir die Gleichung $v^2+w^2 = F:u$ für unsre fernern Betrachtungen beibehalten, und dann

$$\left(\frac{du}{dv}\right) = \frac{2v}{F':u};\ \left(\frac{du}{dw}\right) = \frac{2w}{F':u}, \text{ oder}$$

$$\left(\frac{du}{dv}\right) = \frac{v}{w}\cdot\left(\frac{du}{dw}\right) \text{ setzen.}$$

452. **Lehrsatz.** Jede Normallinie einer runden Fläche schneidet die Axe.

Beweis. Wenn die Abscissenlinie der u zugleich die Axe also $\left(\frac{du}{dv}\right) = \frac{v}{w}\left(\frac{du}{dw}\right)$ ist, irgend ein Punct der Normallinie aber durch x mit u, y mit v, z mit w parallel, bestimmt wird, so sind (§. 248.) ihre zwei Gleichungen

$$(z-w) = \frac{\left(\frac{du}{dw}\right)}{\left(\frac{du}{dv}\right)}(y-v) \text{ und } (z-w) + \left(\frac{du}{dw}\right)(x-u) = 0,$$

oder in Anwendung auf unsre Flächen (§. 451.)

$$z - w = \frac{w}{v}(y-v) \text{ und } z - w = -\left(\frac{du}{dw}\right)(x-u).$$

Die erstere giebt $z = \frac{wy}{v}$, wodurch angezeigt wird, daſs die Normallinie durch den Anfangspunct der y und z, das ist durch die Umdrehungs-Axe geht.

453. **Lehrsatz.** Die Neigung der Berührungs-Ebne gegen die auf die Axe senkrechte Ebne ist eine bloſse Function von u, wenn u mit der Axe parallel ist.

Beweis. Für diesen Neigungswinkel $= \zeta$ ist (§. 246.)

$$tang^2 . \zeta = \left(\frac{du}{dv}\right)^2 + \left(\frac{du}{dw}\right)^2 = \left(\frac{du}{dw}\right)^2 \left(\frac{v^2+w^2}{w^2}\right); \text{ aber}$$

$$\left(\frac{du}{dw}\right) \text{ war } = \frac{2w}{F':u} \text{ und } v^2 + w^2 = F:u, \text{ also}$$

$$tang^2 . \zeta = \frac{4 . F:u}{(F':u)^2} = \text{einer Function von } u.$$

Man könnte dies so ausdrücken, daſs an allen Puncten, die derselben Abscisse $= u$ zugehören, die Neigung der Berührungs-Ebne gleich groſs werde; aber dieses wäre nur dann gültig, wenn die Function nur einen Werth gestattet; das Gegentheil fände statt, wenn die Curve, durch deren Umdrehung die Fläche entsteht, mehrere in derselben Ordinate liegende Puncte hätte.

4. *Von den krummen Flächen,*

die durch die Bewegung einer graden Linie entstehen, wenn diese immer eine bestimmte Axe schneidet und mit ihr immer gleiche Winkel macht.

454. Bemerkung. Um eine bestimmtere Vorstellung von diesen Flächen zu erhalten, wollen wir die Axe als mit z parallel und zugleich als durch den Anfangspunct der Coordinaten gehend ansehn. Bewegt sich nun eine grade Linie, während sie immer den Winkel $= \alpha$ mit der Axe bildet, so fort, dafs sie nach und nach jene Axe in verschiedenen Puncten schneidet: so entsteht die gesuchte Fläche. Offenbar wäre diese völlig bestimmt, wenn eine ebne oder doppelt gekrümmte Linie gegeben wäre, an welche sich jene grade immer anlehnen, die sie als eine Directrix verfolgen sollte, und da eine solche unbestimmte Linie hinreicht, um die Fläche als einzelne Fläche anzugeben, so kann in der allgemeinen Gleichung nur eine unbestimmte Function vorkommen, und die Differentialgleichung wird nur vom ersten Grade sein.

455. Aufgabe. Eine Differentialgleichung für alle diese Flächen zu finden.

Auflösung. Wenn x, y, z die drei Coordinaten für Puncte der Fläche sind und u, v, w die drei Coordinaten für Puncte der Berührungs-Ebne, so ist die allgemeine Gleichung für die Berührungs-Ebne

$$(u-x)\left(\frac{dz}{dx}\right)+(v-y)\left(\frac{dz}{dy}\right)=w-z.$$

Für unsre Fläche enthält offenbar jede durch irgend einen Punct gelegte Berührungs-Ebne zugleich die ganze grade Linie in sich, die von dem Berührungspuncte durch die Axe geht und diese unter dem Winkel $= \alpha$ schneidet; und da für den in der Axe liegenden Punct derselben $u = v = 0$ ist, w aber einen gewissen Werth $= w'$ erlangt, so mufs wegen dieser Bedingung

$$x\left(\frac{dz}{dx}\right)+y\left(\frac{dz}{dy}\right)=z-w', \text{ sein.}$$

Aber da des Berührungspunctes senkrechte Entfernung von der Axe $= \sqrt{(x^2+y^2)}$ ist, seine Höhe über dem Durchschnittspuncte jener beschreibenden Linie mit der Axe $= z - w'$, also offenbar $z - w' = \sqrt{(x^2+y^2)}\, Cotang\, \alpha$, so ergiebt diese zweite Bedingung, dafs allgemein

$$x\left(\frac{dz}{dx}\right)+y\left(\frac{dz}{dy}\right)=\sqrt{(x^2+y^2)}\,.\,Cotang.\,\alpha, \text{ sei, und die-}$$

ses ist die Differentialgleichung für alle solche Flächen.

456. **Aufgabe.** 1. Das Integral jener Differentialgleichung zu finden, und 2. aus geometrischen Bestimmungen eine endliche Gleichung für diese Flächen abzuleiten.

Auflösung. 1. Die Differentialgleichung ergiebt

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \sqrt{\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)}\ Cotang.\ \alpha - \frac{x}{y}\left(\frac{dz}{dx}\right),$$

also $dz = \left(\frac{dz}{dx}\right) dx + \left(\frac{dz}{dy}\right) dy = \left(\frac{dz}{dx}\right)\left\{dx - \frac{x}{y}dy\right\} + dy.\ Cotg\,\alpha \sqrt{\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)}$

oder $\left(dz - dy\ Cotang\,\alpha . \sqrt{\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)}\right) = \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(dx - \frac{x}{y}\,dy\right).$

Die Integration dieser Gleichung ist deshalb schwierig, weil die vor dem Gleichheitszeichen stehende Gröfse durch keinen Factor integrabel gemacht werden kann, indem sie alle drei veränderliche Gröfsen x, y, z, enthält, obgleich nur von zweien die Differentiale vorkommen.

Aber da $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ unbestimmt bleiben mufs, so kann einer solchen Gleichung nur dadurch Genüge geschehn, dafs

$$dz - dy\ .\ Cotang.\,\alpha \sqrt{\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)} = 0,$$

und zugleich $dx - \frac{x}{y}dy = 0$ ist. Die letztere, die mit $\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = 0$ einerlei ist, giebt $\frac{x}{y} = A$, und es mufs daher $z - y.\ Cotang\,\alpha . \sqrt{(1+A^2)} = B$ sein, für jeden bestimmten Werth, den man A giebt, oder B mufs sich ändern, wenn A sich ändert, das ist, es mufs $B = f : A$,

oder $z - y\ Cotang.\,\alpha \sqrt{\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)} = f : \frac{x}{y}$, sein, und dies ist das gesuchte Integral.

2. Durch geometrische Betrachtungen können wir auf eben diesen Ausdruck kommen. Sind nämlich die beiden Gleichungen für die grade Linie, welche die Fläche beschreibt, in irgend einer der Lagen, die sie annehmen kann, $v = Au$,

und $w = Bu + w'$,

so ist w' die Höhe ihres Einschnittspunctes in die Axe und

$$Cotang.\,\alpha = \frac{w - w'}{\sqrt{(u^2+v^2)}} = \frac{B}{\sqrt{(1+A^2)}}.$$

Bei jeder Aenderung der Lage, welche die grade Linie leidet, sind im Allgemeinen alle drei Gröfsen A, B, w' zugleich veränderlich, oder w' eine

Function von A und B; aber da B durch A gegeben,

$B = Cotang.\, \alpha \sqrt{(1 + A^2)}$ ist, so wird $w' = f : A$, oder

$$w' = w - u\, Cotang\, \alpha . \sqrt{\left(1 + \frac{v^2}{u^2}\right)} = F : \frac{v}{u},$$

das ist, da jeder Punct der beschreibenden Linie zugleich ein Punct der Fläche ist,

$$z = x\, Cotang\, \alpha \sqrt{\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)} + F : \frac{y}{x},$$

oder $$z = Cotang\, \alpha . \sqrt{(x^2 + y^2)} + f : \frac{x}{y},$$

wie vorhin.

457. Die partiellen Differentiale von z sind,

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{x\, Cotang\, \alpha}{\sqrt{(x^2+y^2)}} + \frac{1}{y} f' : \frac{x}{y},$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{y\, Cotang\, \alpha}{\sqrt{(x^2+y^2)}} - \frac{x}{y^2} f' : \frac{x}{y},$$

und wenn man hier $f' : \frac{x}{y}$ eliminirt,

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{y\, Cotang.\, \alpha + \frac{x^2}{y}\, Cotang\, \alpha}{\sqrt{(x^2+y^2)}} - \frac{x}{y}\left(\frac{dz}{dx}\right),$$

oder $$y\left(\frac{dz}{dy}\right) + x\left(\frac{dz}{dx}\right) = Cotang.\, \alpha \sqrt{(x^2+y^2)},$$

wie in §. 455.

458. Wenn $Cotang\, \alpha = 0$, $\alpha = 90°$ ist oder die beschreibende Linie immer mit der Ebne x, y parallel bleibt, so ergiebt

$$y\left(\frac{dz}{dy}\right) + x\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0,$$

leichter $$dz = \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(dx - \frac{x\,dy}{y}\right) = y\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right),$$

oder $$z = f : \frac{x}{y},$$

und offenbar ändert sich da im Allgemeinen die Höhe $= z$ der beschreibenden Linie, wenn sich der Winkel ändert, den ihre Projection auf x, y, mit x einschliefst, und dessen Cotangente $= \frac{x}{y}$ ist.

459. Aufgabe. Die grade Linie lehne sich an einen Kreis, dessen Ebne in der Höhe $= a$ ist, man sucht die Form der Function f.

Auflösung. Für den Kreis sei $z = a$, $y^2 = r^2 - (x-b)^2$, so giebt die allgemeine Gleichung für unsre Fläche in Beziehung auf die in diesem Kreise liegenden Puncte

$$a = Cotang\, \alpha \sqrt{(x^2 + r^2 - (x-b)^2)} + f : \frac{x}{\sqrt{(r^2 - (x-b)^2)}};$$

oder wenn ich $x = t\sqrt{(r^2 - (x-b)^2)}$,

oder $x = \dfrac{bt^2 \pm t\sqrt{\{r^2 + r^2t^2 - b^2\}}}{1+t^2}$ setze,

$$a - Cotang.\, \alpha \frac{(bt \pm \sqrt{(r^2 + r^2t^2 - b^2)})}{\sqrt{(1+t^2)}} = f : t.$$

Die Gleichung für die Fläche wird daher

$$z - Cotang.\, \alpha. \sqrt{(x^2+y^2)} = f : \frac{x}{y}$$

$$= a - Cotang.\, \alpha \left(\frac{(bx \pm \sqrt{(r^2x^2 + (r^2 - b^2)y^2)})}{\sqrt{(x^2+y^2)}}\right)$$

oder $z - a = Cotang\, \alpha \left\{\dfrac{x^2 + y^2 - bx \mp \sqrt{(r^2x^2 + (r^2-b^2)y^2)}}{\sqrt{(x^2+y^2)}}\right\}$.

460. Die Gleichung wird viel einfacher, wenn man $b = 0$ setzt, oder den Mittelpunct des Kreises auf der graden Linie annimmt, die mit einigem Rechte die Axe der krummen Fläche heiſsen könnte. In diesem Falle ist die Gleichung für sie $z - a = Cotang\, \alpha (\sqrt{(x^2+y^2)} \mp r)$ und die Fläche offenbar eine Kegelfläche, deren Spitze da liegt, wo $z = a \pm r\, Cotang\, \alpha$ ist. — Der Grund dieses doppelten Werthes ist leicht einzusehen.

461. Für die übrigen Fälle wird die Gleichung etwas bequemer, wenn man $\sqrt{(x^2+y^2)} = \varrho$, und $\dfrac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}} = Cos\, \varphi$,

$\dfrac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)}} = Sin\, \varphi$ setzt; dann wird jene Gleichung

$$z - a = Cotang.\, \alpha. \{\varrho - b\, Cos\, \varphi \mp \sqrt{(r^2 - b^2\, Sin^2\, \varphi)}\}.$$

Daſs hier, wenn man φ einen bestimmten Werth beilegt, für jeden Schnitt durch die Axe eine Gleichung des ersten Grades zwischen z und ϱ gefunden wird, ist, wie sich aus der Entstehung der Fläche übersehn läſst, ganz richtig. Die mit der Abscissen-Ebne parallelen Schnitte lassen sich ebenfalls hieraus leicht bestimmen.

462. **Aufgabe.** Die Linie, an welche die bewegte grade Linie sich anlehnt, sei eine Schraubenlinie, deren beide Gleichungen $y^2 = r^2 - x^2$ und $z = nr \, Arc \, Cos \frac{x}{r}$ sind, man soll die Function f bestimmen.

Auflösung. Die Gleichung $z = \sqrt{(x^2+y^2)} \, Cotang \, \alpha + f : \frac{x}{y}$, giebt für jeden Punct der Schraubenlinie,

$$nr \, . \, Arc \, Cos \frac{x}{r} = r \, Cotang \, \alpha + f : \frac{x}{\sqrt{(r^2 - x^2)}},$$

oder $\frac{x}{\sqrt{(r^2-x^2)}} = t$ gesetzt, $x = \frac{rt}{\sqrt{(1+t^2)}}$ und

$$- r \, . \, Cotang. \, \alpha + n \, . \, r \, Arc \, Cos \frac{t}{\sqrt{(1+t^2)}} = f : t,$$

oder $f : t = r \, (- Cotang \, \alpha + n \, Arc. \, Cotang \, t)$.

Daher ist die allgemeine Gleichung für diese Schraubenfläche

$$z = \sqrt{(x^2+y^2)} \, Cotang \, \alpha - r \, Cotang \, \alpha + nr \, Arc \, Cotang \frac{x}{y}$$

und auf den Fall angewandt, wo $Cotang. \, \alpha = 0$, oder die bewegte Linie auf der graden Linie, welche sie immer schneidet senkrecht ist,

$$z = nr. \, Arc. \, Cotang. \frac{x}{y}.$$

Dieses ist die Gleichung für eine Fläche, die nach Art einer Wendeltreppe um eine Mittelsäule gewunden, sich gleichförmig hebt.

463. **Aufgabe.** Die Gleichung für die Fläche zu bestimmen, wenn auch die Directrix eine grade Linie ist.

Auflösung. Für diese grade Linie sei $y = \gamma + mx$, $z = \beta + nx$, so ist für jeden Punct der Fläche, der sich in dieser Linie befindet,

$$\beta + nx = \sqrt{((\gamma + mx)^2 + x^2)} \, Cotang \, \alpha + F : \left(m + \frac{\gamma}{x}\right),$$

denn statt $f : \frac{x}{y}$ kann ich $F : \frac{\gamma}{x}$ schreiben.

Setze ich $t = m + \frac{\gamma}{x}$ oder $x = \frac{\gamma}{t-m}$,

so ist $F : t = \beta + \frac{n\gamma}{t-m} - Cotang \, \alpha . \frac{\gamma \sqrt{(1+t^2)}}{t-m}$

und in der allgemeinen Gleichung

$z = \sqrt{(x^2 + y^2)}\, Cotang\, \alpha + F : \frac{\gamma}{x}$, müſste die Function F jenem Ausdrucke gemäſs bestimmt werden.

Diese Gleichung wird sehr einfach, wenn $\alpha = 90°$ ist, und dann wird $z = \beta + \frac{n\gamma x}{y - mx}$ eine Gleichung für eine Fläche der zweiten Ordnung, und zwar für diejenige, die wir im 1. Th. §. 742. betrachtet haben.

464. Um diese Fläche, sofern ihre Lage durch die beiden Richtungslinien bestimmt wird, genauer kennen zu lernen, will ich zuerst den Punct angeben, wo die zweite durch $y = \gamma + mx$ und $z = \beta + nx$, bestimmte, Richtungslinie der ersten, die auf der Ebne der x, y, senkrecht ist, am nächsten kömmt. Es sei im Allgemeinen w die Höhe eines auf dieser ersten genommenen Punctes, so ist dieser von dem durch x, y, z auf der andern gegebenen Puncte so entfernt, wie

$$\sqrt{\{x^2 + y^2 + (w - z)^2\}} = \sqrt{\{x^2 + (\gamma + mx)^2 + (w - \beta - nx)^2\}} = S$$

angiebt. Die Linien kommen sich da am nächsten, wo

$$\left(\frac{dS}{dw}\right) = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{dS}{dx}\right) = 0 \quad \text{ist,}$$

also wo $w - \beta - nx = 0$,

und wo $x + m(\gamma + mx) - n(w - \beta - nx) = 0$,

oder $x = \frac{-m\gamma}{1 + m^2}$ und $w = \beta - \frac{nm\gamma}{1 + m^2}$ ist.

Der kleinste Abstand selbst wird $\zeta = \frac{\gamma}{\sqrt{(1 + m^2)}}$.

Es sei (Fig. 91.) AMN die auf die erste Richtungslinie senkrechte durch den Punct des kürzesten Abstands gehende Ebne. A sei der Punct, in welchem die erste Richtungslinie diese Ebne senkrecht schneidet, MN die Projection der zweiten Richtungslinie, $AM = \gamma$ mit y parallel, $KI = m.AK$, oder AI mit jener Projection parallel: so ist die von A senkrecht auf die Projection der zweiten Richtungslinie gezogne Linie $AF = \zeta =$ dem kleinsten Abstande.

Wenn ich jetzt den Anfangspunct der z so verändre, daſs er in A, in den Punct des kleinsten Abstandes kömmt, und $\int = z - \beta + \frac{nm\gamma}{1 + m^2}$ nenne, so ist die Gleichung für unsre Fläche

$$\int = n\gamma \left\{\frac{m}{1 + m^2} + \frac{x}{y - mx}\right\},$$ oder wenn ich neue auf einander senkrechte Coordinaten $AG = u$, $GH = v$, annehme und $AK = x$, $KH = y$

und folglich $x = \frac{u - mv}{\sqrt{(1+m^2)}}$; $y = \frac{um + v}{\sqrt{(1+m^2)}}$ setze, so giebt diese Gleichung

$$f = n\gamma \cdot \frac{u}{v(1+m^2)} = \frac{nu\zeta}{v.\sqrt{(1+m^2)}}.$$

Die Schnitte senkrecht auf v oder senkrecht auf die Linie des kleinsten Abstandes werden also gradlinig, die mit v, u parallelen Schnitte werden, wie wir schon wissen, gradlinig; die mit f, v, parallelen Schnitte werden Hyperbeln, deren Asymptoten mit f und mit v, das ist mit der ersten Richtungslinie und mit der Linie des kleinsten Abstands parallel sind. Eine Haupt-Axe der Fläche (vergl. 1. Th. §. 733.) wird also den rechten Winkel, den AF mit der ersten Richtungslinie bildet, halbiren, und wenn man auf ihr die Abscisse $= \sigma$ und senkrecht auf sie die Ordinate τ nimmt, also $f = (\sigma - \tau)\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ und $v = (\sigma + \tau)\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ setzt, so erhalten wir aus $f.v = \frac{nu\zeta}{\sqrt{(1+m^2)}}$

$$\sigma^2 - \tau^2 = \frac{2nu\zeta}{\sqrt{(1+m^2)}},$$

welches die im 1. Th. §. 733. betrachtete Gleichung ist.

5. *Von den Flächen, die von einer graden Linie beschrieben werden, welcher zwei grade Linien als Richtungslinien dienen.*

465. Bemerkung. Wenn man die Abscissen-Ebne, worin die x, y liegen, auf die erste Richtungslinie senkrecht annimmt, und sie durch den Punct gehn läfst, wo beide Richtungslinien einander am nächsten sind; wenn man ferner die x mit der Linie des kürzesten Abstands AF (Fig. 91.) parallel und folglich die y mit der auf x, y senkrechten Ebne worin die zweite Richtungslinie liegt, parallel nimmt, so ist diese zweite Linie durch die beiden sehr einfachen Gleichungen $z = my$ und $x = g = AF$ bestimmt, und wir können nun unsre krumme Fläche entweder dadurch bestimmen, dafs die Berührungs-Ebne sowohl durch einen Punct der einen als der andern Richtungslinie gehn und die ganze zwischen beiden liegende grade Linie mit unsrer Fläche gemein haben mufs; oder auch dadurch, dafs wir eine allgemeine Gleichung für die Lage der graden Linie suchen, welche zwei Puncte der Richtungslinien verbindet.

Im Allgemeinen übersieht man, dafs die von der beschreibenden Linie durchlaufene Fläche mit Hülfe einer dritten Richtungslinie völlig bestimmt sein, also durch eine Differentialgleichung des ersten Grades gegeben sein wird.

466. **Aufgabe.** Die Differentialgleichung für unsre Fläche zu finden.

Auflösung. Die allgemeine Gleichung für jede Berührungs-Ebne

$$(u-x)\left(\frac{dz}{dx}\right)+(v-y)\left(\frac{dz}{dy}\right)=w-z,$$

giebt, da sie durch einen Punct der zweiten Richtungslinie gehen soll, und da deshalb mit $u=g$, $w=w''$, $v=\frac{1}{m}w''$ zusammengehören soll,

$$(g-x)\left(\frac{dz}{dx}\right)+\left(\frac{1}{m}w''-y\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)=w''-z.$$

Aber der durch x, y, z bestimmte Punct der krummen Fläche, an welchem die Berührung geschieht, und der durch $u=g$, $v=\frac{1}{m}w''$ und $w=w''$ bestimmte Punct der zweiten Richtungslinie sollen zugleich auf einer durch die erste Richtungslinie gehenden graden Linie sich befinden, also für die Projection dieser Linie soll $g:x=\frac{1}{m}w'':y$ sein; und deshalb wird die letzte Gleichung

$$(g-x)\left(\frac{dz}{dx}\right)+\frac{y}{x}(g-x)\left(\frac{dz}{dy}\right)=\frac{mgy}{x}-z,$$

und dies ist die Differentialgleichung für unsre Fläche, und zwar in ihrer bequemsten Form, weil die Lage der Coordinaten vortheilhaft gewählt ist.

467. **Aufgabe.** Das Integral dieser Differentialgleichung zu finden.

Auflösung. Da $\left(\frac{dz}{dx}\right)=-\frac{y}{x}\left(\frac{dz}{dy}\right)+\frac{mgy-zx}{x(g-x)}$ war, so ist

$$dz=\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(dy-\frac{y\,dx}{x}\right)+\frac{(mgy-zx)\,dx}{x(g-x)},$$

oder $$\frac{x(g-x)\,dz+(zx-mgy)\,dx}{x(g-x)}=\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(dy-\frac{y\,dx}{x}\right)$$

und dieser Gleichung kann in voller Allgemeinheit nicht anders Genüge geschehn, als indem zu gleicher Zeit

$$dy-\frac{y\,dx}{x}=0$$

und $$dz+\frac{\left(z-\frac{mgy}{x}\right)dx}{g-x}=0,$$ ist.

Die erstere giebt $\frac{y}{x} = A$, und wenn man dies in die zweite setzt, so soll

$$dz \,.\, (g - x) + (z - mgA)\, dx = 0,$$

oder
$$\frac{dz}{z - mgA} = \frac{dx}{x - g},$$

also $z - mgA = B(x - g)$ sein, und B ist hier eine Function von A, weil die $= 0$ gesetzten Differentialformeln angeben, daſs B constant ist, sobald A einen bestimmten Werth hat: also ist

$$z = \frac{mgy}{x} + (x - g) f : \frac{y}{x}, \text{ weil } A = \frac{y}{x} \text{ war.}$$

Dieses ist das Integral unsrer Gleichung.

468. Aufgabe. Die endliche Gleichung für diese Fläche aus andern Betrachtungen herzuleiten.

Auflösung. Da die bewegliche grade Linie in jeder der Lagen, welche sie erhalten kann, indem sie an beide Richtungslinien anlehnt, sich in unsrer krummen Fläche befinden soll, so sei für irgend eine Lage dieser beschreibenden Linie $y = Mx$ und $z = w' + Nx$. Diese zwei Gleichungen sind schon so eingerichtet, daſs sie der Bedingung, die bewegliche Linie solle durch die erste Richtungslinie gehn, entsprechen. Da nun die Linie auch durch die zweite Richtungslinie gehen soll, so muſs für $x = g$ und $z = w''$, $y = \frac{1}{m} w''$ sein, also zugleich

$$y = \frac{1}{m} w'' = Mg \quad \text{und} \quad w'' = w' + Ng,$$

oder
$$mMg = w' + Ng,$$

oder
$$w' = g(mM - N).$$

Wir hatten aber auch $w' = z - Nx$, also $z - Nx = gmM - gN$,

oder
$$N = \frac{z - gmM}{x - g}.$$

Hier ist es nun offenbar, daſs im Allgemeinen beide Projectionen der beweglichen Linie sich zugleich ändern, oder M und N zugleich beständig sind, und zugleich veränderlich sind, also $N = f : M = f : \frac{y}{x}$ ist,

das ist:
$$\frac{z - \frac{gmy}{x}}{x - g} = f : \frac{y}{x}.$$

Eben die Gleichung, welche sich aus der Differentialgleichung ergab.

469. Wenn hier $f : \frac{y}{x} = C$ ist, oder gar nicht von $\frac{y}{x}$ abhängt, so ist $zx - mgy = Cx^2 - Cgx$, die Gleichung für eine Fläche der zweiten Ordnung. Auch dann erhält man eine Fläche der zweiten Ordnung, wenn $f : \frac{y}{x} = \frac{y}{x}$ ist, indem dann die Gleichung $zx - gmy = xy - gy$, wird.

470. Aufgabe. Der auf der Abscissen-Ebne liegende Querschnitt unsrer Fläche sei eine Parabel, man sucht die Form der Function f.

Auflösung. Wenn für die Parabel die Gleichung $y^2 = px$ ist, also $\frac{y}{x} = \frac{p}{y}$, so hat man für jeden Punct der Grundfläche, wo $z = 0$ ist,

$$\frac{p^2 gmy}{y^2(gp - y^2)} = f : \frac{p}{y}$$

oder $$\frac{gm.y}{p.p}\left(\frac{1}{\frac{y^2}{p^2}\left(\frac{g}{p} - \frac{y^2}{p^2}\right)}\right) = f : \frac{p}{y};$$

folglich auch $$f : \frac{y}{x} = \frac{gm}{p} \cdot \frac{x}{y}\left(\frac{1}{\frac{x^2}{y^2}\left(\frac{g}{p} - \frac{x^2}{y^2}\right)}\right)$$

$$= \frac{gmy^3}{x(gy^2 - px^2)},$$

und daher die Gleichung für die Fläche

$$z = \frac{gmy}{x} + \frac{gmy^3(x-g)}{x(gy^2 - px^2)} = \frac{gmy(y^2 - px)}{gy^2 - px^2}.$$

Diese Gleichung zeigt, dafs die Abscissen-Ebne mit der Fläche erstlich eine grade Durchschnittslinie, die Abscissenlinie selbst, und zweitens eine parabolische Durchschnittslinie bildet. Die erstere gehört der auf AFN senkrechten, durch AF gelegten Ebne; für die Fläche, welcher die zweite angehört, finden wir folgendes. Jedem bestimmtem x entsprechen entgegengesetzte gleich grofse Werthe von z, wenn man entgegengesetzte, gleich grofse Werthe von y nimmt. Für $x = g$ wird $z = my$, wie es sein mufs, da die zweite Richtungslinie ganz in der Fläche liegt.

Für positive y ist z positiv, wenn zugleich $y^2 > px$ und $y^2 > \frac{px^2}{g}$ ist, oder auch wenn zugleich $y^2 < px$ und $y^2 < \frac{px^2}{g}$ ist. Es sei zum Beispiel $x = \frac{1}{2}g$, so bleibt für positive y, z positiv so lange $y < \frac{1}{2}\sqrt{pg}$ ist, wird ne-

gativ wenn $y > \frac{1}{2}\sqrt{pg}$, aber kleiner als $\frac{1}{2}\sqrt{2pg}$ ist, und wird wieder positiv, wenn y gröſser als $\sqrt{\frac{pg}{2}}$ ist. Der Werth von z geht hier durch Null aus dem Positiven ins Negative über.

Um die Lage der beschreibenden Linie, wenn ihre Projection mit x den Winkel $= \alpha$ macht, genauer kennen zu lernen, sei $x = u \, Cos\, \alpha - v \, Sin\, \alpha$,

$$y = u \, Sin\, \alpha + v \, Cos\, \alpha,$$

und, um bloſs die durch die erste Richtungslinie gehenden Schnitte kennen zu lernen, $v = 0$,

$$\text{also} \quad z = \frac{g\, m\, Sin\, \alpha\, (u\, Sin^2\, \alpha - p\, Cos\, \alpha)}{g\, Sin^2\, \alpha \quad p\, Cos^2\, \alpha}.$$

Dies ist die Gleichung für die beschreibende Linie in derjenigen Lage, wo ihre Projection mit x den Winkel $= \alpha$ macht; sie schneidet die Abscissen-Ebne da, wo $u = \frac{p\, Cos\, \alpha}{Sin^2.\, \alpha}$ oder $x = p\, Cotang^2\, \alpha$, $y = p\, Cotang\, \alpha$ und wenn man

$$u - \frac{p\, Cos\, \alpha}{Sin^2\, \alpha} = \int \quad \text{setzt},$$

$$\text{also} \quad z = \frac{g\, m \int .\, Sin^3\, \alpha}{g\, Sin^2\, \alpha - p\, Cos^2\, \alpha},$$

$$\text{so ist} \quad \frac{z}{\int} = \frac{g\, m\, Sin\, \alpha}{g - p\, .\, Cotang^2\, \alpha} = \text{der Tangente des Neigungswinkels}$$

der beschreibenden Linie gegen die Abscissen-Ebne. Dieser Neigungswinkel ist also $= 0$ für $\alpha = 0$, wird $= 90°$ für $Cotang\, \alpha = \sqrt{\frac{g}{p}}$, und ist $= Ang.\, tang.\, m$, wenn $\alpha = 90°$ ist. Der Werth von α, wobei die beschreibende Linie senkrecht gegen die Abscissen-Ebne ist, läſst sich leicht zeichnen, wenn man auf der Projection FN (Fig. 91.) der zweiten Richtungslinie, FL gleich der mittlern Proportionallinie zwischen $g = AF$ und p aufträgt; L ist dann der Punct, wo die Parabel, deren Scheitel in A liegt und deren Axe AF ist, die Projection FL schneidet.

Es würde nicht schwer sein, die so beschriebne krumme Fläche noch näher kennen zu lernen, und ähnliche Anwendungen auch auf andre, zu Bestimmung der Function f gegebne Bedingungen zu machen.

6. *Von den Flächen, deren Berührungs-Ebnen sämmtlich unter gleichen Winkeln gegen die Abscissen-Ebne geneigt sind.*

471. Aufgabe. Die Differentialgleichung für diese Flächen und aus dieser die Integralgleichung anzugeben.

Auflösung. 1. Da (§. 246.) der Neigungswinkel der Berührungs-Ebne allgemein durch $tang\, \zeta = \sqrt{\left\{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}}$, ausgedrückt ist, so soll

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 = m^2, \text{ sein,}$$

und dieses ist die Differentialgleichung für unsre Fläche.

2. Um sie zu integriren, ist es am besten, zuerst durch theilweise Integration aus $dz = \left(\frac{dz}{dx}\right) dx + \left(\frac{dz}{dy}\right) dy$, herzuleiten,

$$z = x\left(\frac{dz}{dx}\right) + y\left(\frac{dz}{dy}\right) - \int \left\{ x d\left(\frac{dz}{dx}\right) + y.d.\left(\frac{dz}{dy}\right)\right\}.$$

Da nun hier $\left(\frac{dz}{dy}\right) = \sqrt{\left\{m^2 - \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}}$, sein soll,

$$\text{so ist } d.\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{-\left(\frac{dz}{dx}\right) d.\left(\frac{dz}{dx}\right)}{\sqrt{\left(m^2 - \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)}};$$

also das unaufgelöste Integral

$$= \int \left\{ x - \frac{y\left(\frac{dz}{dx}\right)}{\sqrt{\left(m^2 - \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)}} \right\} d.\frac{dz}{dx}.$$

Ein solches Integral kann nur dann eine Bedeutung haben, wenn

$$x - \frac{y\left(\frac{dz}{dx}\right)}{\sqrt{\left(m^2 - \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)}} = \text{eine Function von } \left(\frac{dz}{dx}\right) \text{ ist.}$$

Ich will diese Function mit $f' : \left(\frac{dz}{dx}\right)$, bezeichnen, und dann

$$\int f' : \left(\frac{dz}{dx}\right).d.\left(\frac{dz}{dx}\right) = f : \left(\frac{dz}{dx}\right) \text{ nennen.}$$

$$\text{So ist also } f' : \left(\frac{dz}{dx}\right) = x - \frac{y\left(\frac{dz}{dx}\right)}{\sqrt{\left(m^2 - \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)}}$$

und $z = x\left(\frac{dz}{dx}\right) + y\sqrt{\left(m^2 - \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)} - f:\left(\frac{dz}{dx}\right)$,

oder $z = \frac{m^2 y}{\sqrt{\left(m^2 - \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)}} + \left(\frac{dz}{dx}\right) f' : \left(\frac{dz}{dx}\right) - f : \left(\frac{dz}{dx}\right)$.

Diese beiden Gleichungen, aus denen $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ eliminirt werden müſste, geben das vollständige Integral, und in Hinsicht des doppelten Zeichens, welches die Wurzelgröſse erlaubt, muſs bemerkt werden, daſs das positive Zeichen immer da gelten wird, wo $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ einen positiven Werth hat, was sich aus den gegebnen geometrischen Bestimmungen immer wird entscheiden lassen.

472. Beispiel. Es sei $f' : \left(\frac{dz}{dx}\right) = 0;\, f : \left(\frac{dz}{dx}\right) = C$,

so ist $x\sqrt{\left(m^2 - \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)} = y\left(\frac{dz}{dx}\right)$, also

$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{mx}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$ und $z + C = m\sqrt{(x^2+y^2)}$, folglich ist die Fläche die Fläche eines graden Kegels, dessen Axe im Anfangspuncte der Coordinaten x, y, senkrecht auf der Abscissen-Ebne steht.

473. Beispiel. Es sei $f' : \left(\frac{dz}{dx}\right) = D$, also $f : \left(\frac{dz}{dx}\right) = D\left(\frac{dz}{dx}\right) + C$,

$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{m(x-D)}{\sqrt{(y^2+(x-D)^2)}}$, und $z + C = m\sqrt{(y^2+(x-D)^2)}$, eine Gleichung, die nur so fern allgemeiner als die vorige ist, als sie die Axe des Kegels nicht grade im Anfangspuncte der Coordinaten fordert.

474. Aufgabe. Es ist die Durchschnittslinie unsrer Fläche mit einer zur Abscissen-Ebne parallelen Ebne gegeben; es soll die Form der Function f' bestimmt werden.

Auflösung. Da der Winkel $= \zeta$, welchen die Berührungs-Ebne mit der Abscissen-Ebne macht, überall gleich, $tang\, \zeta = m$ ist, so läſst sich für die in jener Durchschnittscurve liegenden Puncte der Werth von $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ als Function von x ausdrücken.

Ist nämlich GA (Fig. 93.) die Durchschnittscurve, und für sie $HF = x'$, $FA = y'$, als Coordinaten aller Puncte derselben durch einander gegeben, die Höhe z aber $= z'$: so liegt die Tangente an A gewiſs in der

Berührungs-Ebne unsrer Fläche. Wenn nun AB die Tangente der Curve, AE eine Parallele zur Abscissenlinie, AK die Durchschnittslinie der Berührungs-Ebne mit einer durch AE senkrecht auf die Abscissen-Ebne gesetzten Ebne ist, so wird in dem körperlichen Drei-Eck an A, der ebne Winkel $a\dot{A}E = \eta$ durch $tang.\,\eta = \frac{dy'}{dx'}$ bestimmt, der an Aa anliegende Neigungswinkel ist $= \zeta$, und KAE kann also als zweite Cathete des an AE rechtwinklichen körperlichen Drei-Ecks bestimmt werden; aber $tang.\,KAE$ ist $= \left(\frac{dz'}{dx'}\right)$, und diese Gröſse also als Function von x' gegeben, da $tang.\,KAE = Sin\,\eta.\,tang.\,\zeta.$ oder $\left(\frac{dz'}{dx'}\right) = \frac{m.\,dy'}{\sqrt{(dx'^2 + dy'^2)}}$ ist. Da auf diese Weise der Differentialquotient für jeden Punct im Umfange der Curve als Function von x', oder umgekehrt x', als Function von $\left(\frac{dz'}{dx'}\right)$ gegeben ist, so läſst sich die Function f' bestimmen.

475. Eine ganz ähnliche Bestimmung fände statt, wenn die gegebne Curve, die in der Fläche liegen soll, eine doppelt gekrümmte wäre. Immer müſste jede Tangente an diese Curve auch in der an denselben Punct gelegten Berührungs-Ebne unsrer Fläche liegen, und die Lage der Tangente, nebst dem überall gleichen Neigungswinkel der Berührungs-Ebne, geben auch da Bestimmungen genug, um $\left(\frac{dz'}{dx'}\right)$ für alle Puncte der Curve durch x' auszudrücken.

Wären diese Curven nicht als stetige Curven durch Gleichungen, sondern nur durch Zeichnung gegeben: so fände zwar diese Bestimmung wohl ebenfalls statt, aber die Fortführung der Entwickelung mögte dann auf Schwierigkeiten führen, auf die ich mich hier nicht einlassen will.

476. Beispiel. Die Durchschnittslinie der Fläche mit der Abscissenlinie sei ein Kreis, dessen Gleichung $y'^2 = R^2 - (a - x')^2$ ist. Hier wird also

$$\frac{dy'}{\sqrt{(dx'^2 + dy'^2)}} = \frac{(a - x')}{R}, \text{ und } \left(\frac{dz'}{dx'}\right) = \frac{m(a - x')}{R}.$$

Dagegen wird $\left(\frac{dz'}{dy'}\right) = -\frac{m\,dx'}{\sqrt{(dx'^2 + dy'^2)}} = \frac{-my'}{R}$, weil in dem sphärischen Dreiecke, dessen beide Catheten die zu den Tangenten $= \left(\frac{dz'}{dy'}\right)$ und

$= \frac{dx'}{dy'}$ gehörigen Winkel sind, der Neigungswinkel $= 180° - \zeta$, als der erstern gegenüberliegend vorkömmt.

Wir haben daher aus den allgemeinen Formeln für unsre Fläche

$$f' : \left(\frac{dz'}{dx'}\right) = x' - \frac{y'\left(\frac{dz'}{dx'}\right)}{\left(\frac{dz'}{dy'}\right)} = x' + (a - x') = a,$$

also $f' : \left(\frac{dz'}{dx'}\right) = a$, und folglich auch allgemein

$$f' : \left(\frac{dz}{dx}\right) = a,\ f : \left(\frac{dz}{dx}\right) = a\left(\frac{dz}{dx}\right) + b.$$

Dadurch erhalten wir für unsre Fläche die Gleichungen

$$x = a + \frac{y\left(\frac{dz}{dx}\right)}{\sqrt{\left(m^2 - \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)}},\ \text{oder}\ \left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{m(x-a)}{\sqrt{(y^2 + (x-a)^2)}}$$

und $\quad z = m\sqrt{(y^2 + (a-x)^2)} - b$

als Gleichung für die grade Kegelfläche. Soll hier zugleich für $z = 0$, die Durchschnittslinie ein Kreis vom Halbmesser $= R$ sein, so ist $b = mR$, und folglich alles bestimmt.

477. **Beispiel.** Die Durchschnittslinie mit der Abscissen-Ebne sei eine Parabel, deren Gleichung $y'^2 = P(x' + a)$ ist.

Es ist also $dy' = \frac{P.dx'}{2y'}$ und $\sqrt{(dx'^2 + dy'^2)} = \frac{dx'.\sqrt{(P^2 + 4y'^2)}}{2y'}$,

also $\quad \left(\frac{dz'}{dx'}\right) = \frac{mP}{\sqrt{(P^2 + 4y'^2)}}.$

Um hier in Hinsicht auf die doppelten Werthe der Wurzelgröfse die richtigen Bestimmungen zu erhalten, will ich bemerken, dafs mit positiven dx' und y' der positive Werth des Differentiales $ds' = \sqrt{(dx'^2 + dy'^2)}$ zusammengehört, mit positiven dx' und negativen y' der negative Werth, daher ist $\sqrt{(P^2 + 4y'^2)}$ immer mit dem positiven Zeichen zu nehmen, oder $\sqrt{\left(\frac{P^2}{4y'^2} + 1\right)}$ das eine Mal mit dem $+$, das andre Mal mit dem $-$ Zeichen.

Daher ist denn auch $\left(\frac{dz'}{dx'}\right) = \frac{mP}{\sqrt{(P^2 + 4y'^2)}}$ immer positiv, wenn m positiv ist. Dagegen ist $\sqrt{\left(m^2 - \left(\frac{dz'}{dx'}\right)^2\right)} = \left(\frac{dz'}{dy'}\right) = \frac{-2y'm}{\sqrt{(P^2 + 4y'^2)}}$, weil in der

sphärisch-trigonometrischen Bestimmung der stumpfe Winkel $= 180° - \zeta$ vorkömmt.

Hiernach ist also $2y' = \frac{\left(-P\sqrt{m^2 - \left(\frac{dz'}{dx'}\right)^2}\right)}{\left(\frac{dz'}{dx'}\right)}$,

$$x' = -a + \frac{y'^2}{P} = -a - \tfrac{1}{4}P + \frac{m^2 P}{4\left(\frac{dz'}{dx'}\right)^2},$$

daher $f' : \left(\frac{dz'}{dx'}\right) = -a - \frac{1}{4}P + \frac{m^2 P}{4\left(\frac{dz'}{dx'}\right)^2} + \frac{1}{2}P$

woraus für $a = \frac{1}{4}P$ wird $f' : \left(\frac{dz'}{dx'}\right) = \frac{m^2 P}{4\left(\frac{dz'}{dx'}\right)^2}$,

und allgemein $f' : \left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{m^2 P}{4\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$ und $f : \left(\frac{dz}{dx}\right) = C - \frac{m^2 P}{4\left(\frac{dz}{dx}\right)}$.

So wird also für unsre Fläche ganz allgemein

$$x = \frac{y\left(\frac{dz}{dx}\right)}{\sqrt{\left(m^2 - \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)}} + \frac{m^2 P}{4\left(\frac{dz}{dx}\right)^2};$$

$$\text{und} \quad z = \frac{m^2 y}{\sqrt{\left(m^2 - \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)}} + C + \tfrac{1}{2}\frac{m^2 P}{\left(\frac{dz}{dx}\right)};$$

und hieraus müfste der Differentialquotient eliminirt werden, was vermittelst des doppelten Werthes von

$$\frac{y}{\sqrt{\left(m^2 - \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)}} = \frac{x}{p} - \frac{m^2 P}{4p^3} = \frac{z - C}{m^2} - \frac{P}{2p}, \text{ wenn } \left(\frac{dz}{dx}\right) = p \text{ ist,}$$

und vermittelst der daraus entspringenden cubischen Gleichung geschehen müfste.

478. Man kann die Gleichungen für die eben betrachtete Fläche noch auf einem andern Wege erhalten.

Es sei (Fig. 94.) A ein Punct in der gegebnen Parabel, der also durch $y'^2 = P(x' + \frac{1}{4}P)$ bestimmt ist. An ihr sei die Normallinie AD gezogen, so ist für jeden Punct unsrer Fläche, der über einem Puncte H dieser Normallinie liegt, $z = m \,.\, AH$, weil die durch AD senkrecht auf die Abscissen-Ebne gelegte Ebne die Ebne des Neigungswinkels der Berührungs-Ebne ist.

Die Abscisse des Punctes H ist, $x = x' + \dfrac{\frac{1}{2}P \,.\, AH}{\sqrt{(y'^2 + \frac{1}{4}P^2)}}$,

die Ordinate derselben, $y = y' - \dfrac{y' \,.\, AH}{\sqrt{(y'^2 + \frac{1}{4}P^2)}}$.

Vermöge der bekannten Eigenschaften der Parabel ist nämlich $BD = \frac{1}{2}P$,

$$x - x' = \frac{(y'-y)P}{2y'}, \text{ und}$$

$$AH = \sqrt{\{(x-x')^2 + (y'-y)^2\}} = \frac{(y'-y)}{2y'}\sqrt{(P^2 + 4y'^2)}$$

und $z = \frac{1}{2}m\sqrt{(P^2 + 4y'^2)} - \frac{1}{2}\dfrac{my}{y'}\sqrt{(P^2 + 4y'^2)}$.

Hier sind also beide Coordinaten, z sowohl als x, durch y und y' gegeben, indem

$$x = x' + \tfrac{1}{2}P - \tfrac{1}{2}\frac{Py}{y'} = \tfrac{1}{4}P + \frac{y'^2}{P} - \frac{Py}{2y'} \text{ ist.}$$

Die Gröſse y' sollte hier wieder eliminirt werden, was aber nur durch Auflösung einer Gleichung vom dritten Grade geschehen könnte.

Um hier die Uebereinstimmung dieser Gleichung mit der vorigen, von $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ abhängigen, zu vergleichen, müſsten wir den eben gefundenen Werth von z in Beziehung auf x differentiiren, um $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ zu erhalten; dieses partielle Differential wird gefunden, indem man y als beständig, y' aber als Function von x ansieht. Dieser Betrachtung gemäſs wird

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{dy'}{dx}\right)\left\{\frac{2my'}{\sqrt{(P^2+4y'^2)}} - \frac{2my}{\sqrt{(P^2+4y'^2)}} + \frac{my}{2y'^2}\sqrt{(P^2+4y'^2)}\right\}$$

$$= \left(\frac{dy'}{dx}\right)\left\{\frac{2my' + \frac{my}{2y'^2}P^2}{\sqrt{(P^2+4y'^2)}}\right\},$$

und da $dx = \left(\dfrac{2y'}{P} + \dfrac{Py}{2y'^2}\right)dy' - \dfrac{P\,dy}{2y'}$ wird,

so ist $\left(\frac{dy'}{dx}\right) = \frac{2Py'^2}{P^2 y + 4y'^3}$ und folglich $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{mP}{\sqrt{(P^2 + 4y'^2)}}$.

Unsre eben gefundenen Werthe von x und z werden also, wenn man für y' den hieraus folgenden Werth setzt:

$$x = \frac{m^2 P}{4\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} - \frac{y\left(\frac{dz}{dx}\right)}{\sqrt{\left(m^2 - \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)}},$$

$$z = \tfrac{1}{2}\frac{m^2 P}{\left(\frac{dz}{dx}\right)} - \frac{m^2 y}{\sqrt{\left(m^2 - \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)}}.$$

Diese Ausdrücke stimmen mit den vorigen überein, wenn wir die Wurzelgröfse negativ nehmen, wie wir es nach den oben angegebnen Gründen thun müssen, da wo $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ negativ ist.

479. Bemerkung. Da die eben angestellte Betrachtung zeigt, dafs unsre aus der Integration hergeleiteten Formeln sich auch aus der geometrischen Untersuchung herleiten lassen, so dürfen wir wohl hoffen, auch die allgemeinen durch künstliche Integration gefundenen endlichen Gleichungen in ihrer geometrischen Bedeutung nach zu weisen.

In jedem Falle, die Durchschnittslinie unsrer Fläche mit der Abscissen-Ebne mag nun bekannt oder unbekannt sein, können wir uns (Fig. 94.) FA als diese Durchschnittslinie denken, und ihre Coordinate $GB = x'$, $BA = y'$ nennen; und allgemein wird es immer richtig sein, dafs $z = m \,.\, AH$ ist, wenn AH ein Stück der Normallinie ist. Es läfst sich nämlich leicht übersehn, dafs eine durch die Tangente AL gelegte, unsre Fläche berührende Ebne, mit dieser Fläche alle die Puncte gemein haben wird, die sich in einer durch die Normallinie senkrecht auf die Abscissen-Ebne gesetzten Ebne befinden, und es ist folglich eine wesentliche Eigenschaft unsrer Fläche, dafs $z = m \,.\, AH$ ist, wenn H, durch $GX = x$, $XH = y$ bestimmt, ein Punct in der Normale irgend eines Punctes der Curve FA ist. Es ist ferner offenbar, dafs $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ einerlei Werth behält, so lange wir Puncte annehmen, die sich oberhalb derselben Normallinie befinden, und andre Werthe erhält, wenn wir zu andern Normallinien übergehen, indem $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ durch die Lage der Berührungs-Ebne, welche für alle oberhalb AD liegende Puncte eine und dieselbe ist, gegeben wird.

Es ist also $\left(\frac{dz}{dx}\right) = funct : GD$, oder eigentlich ganz allgemein $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ eine Function derjenigen Gröfsen, welche die Lage jeder einzelnen Normallinie bestimmen, unter denen sich GD befindet, die für jede Normallinie einen andern Werth erhält. So wäre also

$$GD = f' : \left(\frac{dz}{dx}\right) \text{ eine Bestimmung für unsre Curve.}$$

Aber $GD = GX + XD$ ist $= x + y \,.\, tang\, ALD$, wenn AL die Tangente ist; und da sich aus §. 474. leicht ergiebt, dafs $\frac{1}{m}\left(\frac{dz}{dx}\right) = Sin\; ALD$,

$$\frac{1}{m}\left(\frac{dz}{dy}\right) = -\, Cos\; ALD \text{ ist, so haben wir}$$

$$GD = x - \frac{y\left(\frac{dz}{dx}\right)}{\sqrt{\left(m^2 - \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)}} = f' : \left(\frac{dz}{dx}\right),$$

als die erste jener zwei aus der Differentialgleichung durch Integration gefundenen Gleichungen.

Die zweite Gleichung ist eine Folgerung daraus, dafs $z = m \,.\, AH$ ist. AH aber ist $= AM + NX - PX$, wenn GM durch den Anfangspunct der Abscissen mit AL parallel und ebenso HP mit AL parallel, XN darauf senkrecht ist. Da nun

$$NX = x \,.\, Sin\; ALB = \frac{x}{m}\left(\frac{dz}{dx}\right);$$

$$PX = y \,.\, Cos\; ALB = -\frac{y}{m}\left(\frac{dz}{dy}\right) \text{ ist, so wird}$$

$$z = m \,.\, AH = m \,.\, AM + x\left(\frac{dz}{dx}\right) + y\left(\frac{dz}{dy}\right);$$

und endlich läfst sich auch AM ausdrücken. Es läfst sich nämlich leicht zeigen, dafs AM in $AM + GM.\, d.\, ALD$ übergeht, wenn man von A zu dem nächsten Puncte der Curve FA fortgeht, und dafs also

$AM = \int GM.\, d.\, ALD$ ist. Da nun $GM = GD.\, Cos\, ALD$ ist, so haben wir $GM.\, d.\, ALD = GD.\, d.\, Sin\; ALD$, das ist

$$AM = \int\left(f' : \left(\frac{dz}{dx}\right) \cdot \frac{1}{m}\, d.\left(\frac{dz}{dx}\right)\right) = \frac{1}{m} f : \left(\frac{dz}{dx}\right),$$

und zwar mit dem — Zeichen, weil AM abnimmt, wenn der Winkel L wächst.

So lassen sich also beide Gleichungen so aus der geometrischen Betrachtung herleiten, daſs wir sie als durch diese auf eine neue Weise begründet ansehen dürfen, wenn es gleich schwierig gewesen wäre, zu ihnen zu gelangen, ehe man in der gefundenen Integration einen Wink dazu erhalten hatte.

480. Bemerkung. Wenn man die Werthe von x und z, so wie sie in §. 471. allgemein gefunden sind, auf irgend einen unveränderlichen Werth von $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ anwendet, so erhält man in den beiden Gleichungen

$$x = \frac{yp}{\sqrt{(m^2 - p^2)}} + f' : p; \quad z = \frac{m^2 y}{\sqrt{(m^2 - p^2)}} + pf' : p - f : p;$$

wo ich p statt $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ schreibe, die Gleichungen für die Projectionen derjenigen auf der Fläche gezeichneten Linien, in welchen p einen und denselben Werth erhält, und diese Linien sind offenbar grade Linien. Es läſst sich aus dem Vorigen übersehn, daſs diese graden Linien zugleich diejenigen sind, in welchen die Berührung mit den Tangential-Ebnen statt findet, und daſs man die ganze Fläche als den geometrischen Ort aller dieser Berührungslinien anzusehn hat.

481. Erklärung. In dieser letztern Hinsicht, weil man gleichsam die ganze Fläche als aus diesen aneinander gereiheten Linien zusammengesetzt ansehn kann, nennt man diese Linien die Characteristischen Linien der Fläche, und es läſst sich wohl übersehen, daſs sie allemal von einerlei Natur sein werden, wo immer man sie auf der Fläche nimmt.

482. Bemerkung. Wenn jede zwei einander nächste dieser characteristischen Linien einander schneiden, so bilden diese Durchschnittspuncte eine Knotenkante (arête de rebroussement.)

483. Aufgabe. Aus der allgemeinen Gleichung für alle hieher gehörige Flächen, die Gleichung für die Knotenkante zu finden.

Auflösung. Da die beiden Gleichungen $x = \frac{yp}{\sqrt{(m^2 - p^2)}} + f' : p$, und $z = \frac{m^2 y}{\sqrt{(m^2 - p^2)}} + pf' : p - f : p$, für irgend eine der characteristischen Linien gelten, wenn man p als unveränderlich ansieht, so wird offenbar für die zunächst benachbarte Characteristik oder characteristische Linie die Gleichung gefunden, wenn man p in $p + dp$ übergehn läſst, und auch den Coordinaten x, y, z, die Aenderungen $\left(\frac{dx}{dp}\right) dp$ und so weiter beifügt. Aber für den Durchschnittspunct zweier unmittelbar auf einander

folgender characteristischer Linien wird offenbar das von den Aenderungen der p abhängende Differential aller Coordinaten $=0$, und folglich müssen neben jenen zwei Gleichungen noch folgende zwei für diese Durchschnittspuncte bestehen,

$$0 = \frac{y}{\sqrt{(m^2-p^2)}} + \frac{yp^2}{\sqrt{(m^2-p^2)^3}} + f'' : p,$$

und $$0 = \frac{m^2 py}{\sqrt{(m^2-p^2)^3}} + f' : p + pf'' : p - f' : p.$$

Die erstere giebt $\frac{m^2 y}{\sqrt{(m^2-p^2)^3}} = - f'' : p$,

und durch diesen Werth wird die zweite von selbst identisch. Setzt man aber diesen Werth von y in die beiden Gleichungen für die Characteristik und eliminirt dann p, so hat man die Gleichungen für die Projectionen der Knotenkante.

484. **Beispiel.** In §. 476. war $f' : p = a$, also $f'' : p = 0$, und folglich $y = 0$, also $x = a$, $z = b$, und dadurch wird ein einziger Punct als Durchschnitt aller characteristischen Linien bestimmt, wie es beim graden Kegel sein muſs.

485. **Beispiel.** In §. 477. war $f' : p = \frac{m^2 P}{4p^2}$, also $f'' : p = -\frac{m^2 P}{2p^3}$,

folglich für die Knotenfurche $y = \frac{1}{2} P . \sqrt{\left(\frac{m^2}{p^2} - 1\right)^3}$,

oder $$p^2 = \frac{m^2 P^{\frac{2}{3}}}{P^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{4} . y^{\frac{2}{3}}},$$

also $$x = \sqrt[3]{2}\, P^{\frac{1}{3}} . y^{\frac{2}{3}} + \tfrac{1}{4} P + \frac{\sqrt[3]{4}}{4} P^{\frac{1}{3}} . y^{\frac{2}{3}} = \tfrac{1}{4} P + \tfrac{3}{4} \sqrt[3]{4} . P^{\frac{1}{3}} . y^{\frac{2}{3}}.$$

Die Gleichung für die Projection der Knotenfurche auf die Abscissen-Ebne, welche zeigt, daſs sie mit der Evolute der Parabel (§. 56.) einerlei ist. Der Grund dieser Zusammenstimmung ist einleuchtend, und es erhellt, daſs wenn man bei irgend einer unsrer Flächen, wo $tang.\ \zeta = m$ ist, die Durchschnittslinie mit der Abscissen-Ebne kennt, die Evolute dieser allemal die Projection der Knotenfurche ist. Für z wird der Werth nun auch leicht gefunden. Die mit der Abscissen-Ebne parallelen Schnitte unsrer Fläche, deren Basis eine Parabel ist, stimmen mit der im ersten Theil §. 530. betrachteten Curve überein, und jede von ihnen trifft die Knotenfurche da, wo (1. Th. Fig. 147.) die Spitzen I, K, liegen. Die Knotenfurche ist eine doppelt gekrümmte Linie und jede Characteristische Linie berührt die Knotenfurche;

denn wenn man aus den Gleichungen für die Knotenfurche $\frac{dz}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$ sucht, so erhält man *tang.* des Winkels, den die Berührungslinie der Knotenfurche hier mit der Abscissen-Ebne macht, und diese wird $= m$ gefunden.

486. **Bemerkung.** Man kann diese Fläche ansehn, als die Grenzfläche einer unendlichen Folge von Ebnen, die alle unter gleichen Winkeln gegen die Abscissen-Ebne geneigt sind, und durch die Tangente irgend einer als Grundlinie angenommenen Curve gehn. Betrachtet man sie so, so ist die Characteristik die gemeinschaftliche Durchschnittslinie zweier unmittelbar auf einander folgender Ebnen.

Man kann die Fläche auch ansehn, als die Umhüllungsfläche für eine Folge gleicher grader Kegel, deren Spitzen in der gegebnen Grundlinie unsrer Fläche liegen. Die Characteristik ist dann die Durchschnittslinie zweier auf einander folgender Kegel. *)

7. *Von der Umhüllungsfläche einer Folge von Kugeln, deren Mittelpuncte auf einer willkürlichen Curve liegen.*

487. **Bemerkung.** Wenn man sich in der Abscissen-Ebne eine Curve gezeichnet und eine Reihe von Kugeln so gelegt denkt, dafs ihre sämmtlichen Mittelpuncte in jener Curve liegen: so ist es die Fläche, welche alle diese Kugeln berührt, welche gleichsam aus den Durchschnittslinien je zweier benachbarter Kugeln zusammen gesetzt ist, oder wenigstens mit vollem Rechte der geometrische Ort dieser Durchschnittslinien heifsen kann, die wir hier betrachten.

488. **Aufgabe.** Die Differentialgleichung für unsre Fläche zu finden.

Auflösung. Unsre Fläche hat mit jeder der Kugeln eine ganze Folge von Berührungs-Ebnen gemein; sucht man also die allgemeine Gleichung für die Lage der Berührungs-Ebne einer Kugel so auszudrücken, dafs daraus die Gröfsen, welche eine einzelne dieser Kugeln bestimmen, weggeschafft werden, so hat man eine Gleichung, die auch unsre Fläche enthält.

Es sei ganz allgemein u die Abscisse, v die Ordinate der Curve, auf welcher die Mittelpuncte liegen, w der Halbmesser derjenigen Kugel, deren Mittelpunct durch u, v, bestimmt ist, so sind im Allgemeinen v, w, Func-

*) So hat Monge sie betrachtet, dessen Behandlung der Fläche von der hier gewählten ganz verschieden ist. Monge Application de l'Anal. à la Geometrie. pag. 45.

tionen von u und aus der Gleichung $w^2 = z^2 + (x-u)^2 + (y-v)^2$, die für jede der Kugeln gilt, könnte u durch x, y, z ausgedrückt werden. Da nun zugleich

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{(u-x)}{z}; \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{v-y}{z} \text{ wird,}$$

so würde die Secante des Neigungswinkels irgend einer Berührungs-Ebne der Kugeln durch

$$\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)} = \frac{w}{z} \text{ ausgedrückt werden, und}$$

wenn man hier w durch x, y, z ausdrückte, was im Allgemeinen möglich wäre, wenn w eine gegebne Function von u ist, so hätte man eine Gleichung die für alle solche Kugeln paſste. Da indeſs die Eliminirung aller Gröſsen u, v, w nur dann möglich ist, wenn v so wohl als w gegebne Functionen von u sind: so will ich bei dem Falle, wo $w = a$ eine unveränderliche Gröſse ist, stehn bleiben. Die Gleichung

$$1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 = \frac{a^2}{z^2} \text{ gilt also für alle Kugeln von unver-}$$

änderlichem Halbmesser, und zugleich für die Umhüllungsfläche, welche einer Reihe von gleichen Kugeln, mögen ihre Mittelpuncte, nach welchem Gesetze man will geordnet sein, zugehört.

489. Offenbar ist $a^2 = (x-u)^2 + (y-v)^2 + z^2$, ein Integral dieser Gleichung, indem die partiellen Differentiale von z ihr entsprechen. Sie enthält zwei willkürliche Constanten u und v; umfaſst aber die Umhüllungsfläche noch nicht.

Diese Gleichung ist nur eben das, was bei der in §. 471. angestellten Betrachtung die Gleichung für die Ebne $z = Ax + y\sqrt{(m^2 - A^2)} + B$ gewesen wäre, und es bleibt uns noch übrig die allgemeine Integralgleichung zu suchen, die wie wir es von dem Integrale einer partiellen Differentialgleichung fordern, eine unbestimmte Function enthält.

490. Aufgabe. Das Integral der Gleichung

$$z^2\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right) = a^2, \text{ zu finden.}$$

Auflösung. Da hier z durch $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ ausgedrückt ist, so wird, wenn ich $\left(\frac{dz}{dx}\right) = p$; $\left(\frac{dz}{dy}\right) = q$ setze,

aus der Gleichung $dz = p\,dx + q\,dy$, auch $dy = \frac{dz}{q} - \frac{p}{q}dx$,

folglich $y = \frac{z}{q} - \frac{px}{q} + \int \left\{ \frac{z\,dq}{q^2} + x\,d.\frac{p}{q} \right\}$.

Da hier $z = \frac{a}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} = \frac{a}{\sqrt{\left(1+q^2\left(1+\frac{p^2}{q^2}\right)\right)}}$ ist,

so ist es am besten $\frac{p}{q} = u$ zu setzen und z als Function von u und q anzusehn. Dann läſst sich $\frac{z\,dq}{q^2} = \frac{a\,dq}{q^2\sqrt{(1+q^2(1+u^2))}}$ so integriren, als ob u constant wäre, und alles übrige auf eine Function von u zurückführen. Es ist aber

$$a\int \frac{dq}{q^2 . \sqrt{(1+q^2(1+u^2))}} = -a\sqrt{\left(\frac{1}{q^2}+1+u^2\right)} + a\int \frac{u\,du}{\sqrt{\left(\frac{1}{q^2}+1+u^2\right)}}$$

also $$y = \frac{z-px}{q} - a\sqrt{\left(\frac{1}{q^2}+1+u^2\right)} + \int du \left\{ x + \frac{au}{\sqrt{\left(\frac{1}{q^2}+1+u^2\right)}} \right\}$$

und hier muſs nun offenbar

$$x + \frac{au}{\sqrt{\left(\frac{1}{q^2}+1+u^2\right)}} = f' : u \quad \text{sein,}$$

und dann $$y = \frac{z-px}{q} - a\sqrt{\left(\frac{1}{q^2}+1+u^2\right)} + f : u.$$

Das läſst sich noch bequemer so ausdrücken,

$$x + pz = f' : \frac{p}{q},$$

und $$y = \frac{z-px}{q} - \frac{a^2}{zq} + f : \frac{p}{q}.$$

491. Um sich durch die Probe des Differentiirens von der Richtigkeit des Integrals zu überzeugen, verfährt man so: die letzte Gleichung giebt

$$dy - \frac{dz}{q} + \frac{pdx}{q} = -\frac{zdq}{q^2} - \frac{xdp}{q} + \frac{pxdq}{q^2} + \frac{a^2dz}{qz^2} + \frac{a^2dp}{q^2z} + d.\frac{p}{q}.f' : \frac{p}{q},$$

die nach dem Gleichheitszeichen stehenden Glieder heben sich alle auf; denn wenn man für das letzte Glied seinen Werth $= \frac{(qdp-pdq)}{q^2}(x+pz)$ setzt, und sie alle mit q multiplicirt, so erhält man

$$= -\frac{zdq}{q} + \frac{a^2dz}{z^2} + \frac{a^2dq}{qz} + pzdp - \frac{p^2zdq}{q},$$

Aber aus der gegebnen Differentialgleichung ist

$$1+p^2 = -q^2 + \frac{a^2}{z^2},$$

$$pdp = -qdq - \frac{a^2dz}{z^3},$$

und jene Glieder heben sich alle auf.

492. Beispiel. Es sei $f': \frac{p}{q} = C$, also $p = \frac{C-x}{z}$,

$$y = \frac{z}{q} - \frac{Cx - x^2 + a^2}{qz} + \frac{Cp}{q},$$

oder $yq = \frac{z^2 - Cx + x^2 - a^2}{z} + \frac{C^2 - Cx}{z} = \frac{z^2 - a^2 + (C-x)^2}{z}$,

oder da $q = \sqrt{\left(\frac{a^2}{z^2} - 1 - p^2\right)} = \frac{\sqrt{(a^2 - z^2 - (C-x)^2)}}{z}$ ist,

$$-y = \sqrt{(a^2 - z^2 - (C-x)^2)}.$$

Diese Voraussetzung giebt also nur eine der Kugeln, deren Umhüllungsfläche wir verlangten.

493. Aufgabe. Die characteristische Linie unsrer Fläche anzugeben.

Auflösung. Wir können diese characteristische Curve auf zwei verschiedenen Wegen finden; denn sie ist erstlich die Durchschnittscurve jeder zwei unmittelbar auf einander folgender umhüllter Flächen, und zweitens erhält man sie aus unsern Integralgleichungen, wenn man darin $\frac{p}{q}$ als constant annimmt, und die Werthe von z sucht, die einem solchen constanten $\frac{p}{q}$ zugehören.

1. Da $z^2 + (x-u)^2 + (y-v)^2 = a^2$, die Gleichung für eine der Kugeln war, so ist für die zunächst anliegende

$$\left(z + \left(\frac{dz}{du}\right) du\right)^2 + (x-u-du)^2 + \left(y - v - \left(\frac{dv}{du}\right) du\right)^2 = a^2,$$

wenn die Ordinate für eben den Punct der Abscissen-Ebne, oder für unveränderte x, y, gesucht wird. In der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie beider aber ist $\left(\frac{dz}{du}\right) = 0$, also $(x-u) = -(y-v)\frac{dv}{du}$, und da v eine ge-

gebne Function von u ist, und von keiner andern Gröſse abhängt, so läſst sich eine der Gröſsen x, y, z aus beiden Gleichungen wegschaffen, und folglich jede der drei Projectionen der Durchschnittslinie erhalten. Die letzte Gleichung zeigt, daſs die Projection auf die Abscissen-Ebne eine grade Linie, und zwar die Normallinie der Curve ist, worauf die Mittelpuncte liegen; und ferner giebt $z^2 = a^2 - (y-v)^2 \left(\frac{du^2 + dv^2}{du^2}\right)$ die Curve selbst als einen Kreis an.

2. Die Gleichungen $x = -pz + f' : \frac{p}{q}$, $y = \frac{z - px}{q} - \frac{a^2}{zq} + f : \frac{p'}{q}$,

oder $y = \frac{z}{q}\left(1 + p^2 - \frac{a^2}{z^2}\right) - \frac{p}{q} f' : \frac{p}{q} + f : \frac{p}{q} = -qz + f : \frac{p}{q} - \frac{p}{q} f' : \frac{p}{q}$,

geben für einen unveränderlichen Werth von $\frac{p}{q} = b$, womit $f' : \frac{p}{q} = c$ und $f : \frac{p}{q} - \frac{p}{q} f' : \frac{p}{q} = g$ zusammengehört, $c - x = zp$ und $g - y = zq$, also $\frac{c-x}{g-y} = \frac{p}{q} = b$, das heiſst, wenn man auf der Fläche so fortgeht, daſs $\frac{p}{q}$ ungeändert bleibt, oder wenn man der characteristischen Linie folgt, so ist die Projection dieser Linie durch $c - x = b(g - y)$ gegeben, und diese Projection ist also eine grade Linie, die durch einen Punct geht, dessen Coordinaten c und g sind. Rechnet man die Länge dieser Linie von eben diesem Puncte an, und nennt $\sqrt{((c-x)^2 + (g-y)^2)} = s$, so ist $s = (g-y)\sqrt{(1+b^2)}$ also für Puncte der Characteristik $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{bs}{z\sqrt{(1+b^2)}}$, $\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{s}{z\sqrt{(1+b^2)}}$

und folglich $1 + \frac{b^2 s^2}{z^2(1+b^2)} + \frac{s^2}{z^2(1+b^2)} = \frac{a^2}{z^2}$,

oder $z^2 + s^2 = a^2$,

mithin die characteristische Linie eben jener Kreis vom Halbmesser $= a$, der auf der Abscissen-Ebne senkrecht steht.

494. Aufgabe. Die Knotenkante unsrer Fläche zu bestimmen.

Auflösung. Wenn man die characteristische Linie auf unsrer Fläche zeichnet, in welcher $\frac{p}{q}$ einen bestimmten Werth erhält, zum Beispiel $\frac{p}{q} = b$ ist, so geht man offenbar zur nächsten Characteristik über, wenn man $\frac{p}{q} = b + db$ setzt, und da wo beide Linien sich schneiden, bleiben x, y, z

ungeändert, obgleich b in $b+db$ übergeht; man hat also neben den zwei Gleichungen

$$x=-pz+c,$$

$$y=-qz+g,$$

auch noch $$0=-z\left(\frac{dp}{db}\right)db+dc,$$

und $$0=-z\left(\frac{dq}{db}\right)db+dg,$$

wodurch der Durchschnittspunct bestimmt ist, und der geometrische Ort desselben bestimmt werden kann, wenn die Function f eine gegebene ist.

495. Aufgabe. Die Function f zu bestimmen, wenn die Curve gegeben ist, auf welcher sich die Mittelpuncte der gleichen Kugeln befinden.

Auflösung. Es sei eine Gleichung zwischen u, v, als Coordinaten der Curve gegeben, so erhellt aus dem Vorigen, dafs für alle Puncte unsrer Fläche, welche sich senkrecht über einer Normallinie VN dieser Curve befinden, (Fig. 95.) die Berührungs-Ebne parallel mit der an V gezognen Tangente VW ist, und dafs folglich wenn ζ die Neigung dieser Tangential-Ebne gegen die Abscissen-Ebne ist, $\left(\frac{dz}{dx}\right)=tang\,\zeta.\frac{dv}{\sqrt{(du^2+dv^2)}}=p$, und $\left(\frac{dz}{dy}\right)=-tang\,\zeta.\frac{du}{\sqrt{(du^2+dv^2)}}=q$ gefunden wird (wie in §. 474.) Zugleich ist für jeden Punct dieses senkrecht auf die Abscissen-Ebne gelegten durch VN gehenden Schnittes $Cos\,\zeta=\frac{z}{a}$, $tang\,\zeta=\sqrt{\left(\frac{a^2}{z^2}-1\right)}$, also $\frac{p}{q}=\frac{-dv}{du}$; $pz=\frac{dv\sqrt{(a^2-z^2)}}{\sqrt{(du^2+dv^2)}}$. Liegt der durch x, y, z bestimmte Punct senkrecht über U, so ist offenbar das auf der Normallinie abgeschnittene Stück $UV=\sqrt{(a^2-z^2)}$, weil der Punct sich auf einer Kugel befindet, deren Mittelpunct V ist; es ist also

$$ST=UV\cdot\frac{dv}{\sqrt{(du^2+dv^2)}}=pz \quad\text{und}\quad x+pz=u,$$

also $u=f':\frac{-dv}{du}$, (nach §. 490.) wodurch die Form der Function f' gegeben wird.

496. Diese Betrachtung zeigt den geometrischen Sinn der ersten Gleichung, auf welche die Integration führte, dafs nämlich $u=f':\frac{p}{q}$ ist, oder alle die Puncte der Fläche, denen ein unveränderlicher Werth von $\frac{p}{q}$ zugehört,

sich oberhalb der Normallinie befinden, welche dem durch u bestimmten Puncte der Curve zugehört.

In der zweiten Gleichung $y+qz=f:\frac{p}{q}-\frac{p}{q}f':\frac{p}{q}$, ist offenbar $y+qz$ einerlei mit

$$y-\frac{du\sqrt{(a^2-z^2)}}{\sqrt{(du^2+dv^2)}}=y-\frac{UV.du}{\sqrt{(du^2+dv^2)}}=v=US-UZ,$$

und es muſs gezeigt werden, daſs auch der zweite Theil der Gleichung $=v$ ist. Aber wenn AL durch den Anfangspunct der Abscissen parallel mit der Tangente an V gezogen worden, so ist nach den eben gefundenen Bestimmungen

$$-\frac{p}{q}f':\frac{p}{q}=+\frac{dv}{du}.u=u.\,tang\,A=LT,$$

ferner ist $AL=u\,Sec\,A$, und wenn der Winkel A sich um dA ändert, so ist $ML=u\,dA\,Sec\,A$, $QL=u\,dA\,Sec^2A=u\,d.\,tang\,A$, also

$$VL=\int u.\,d.\,tang\,A,$$

und dies ist einerlei mit $-f:\frac{p}{q}$, weil $u=f':\frac{p}{q}$ und $d.tang\,A=-d.\frac{p}{q}$ war.

497. **Beispiel.** Die Linie der Mittelpuncte sei eine Parabel, $v^2=Pu$; $\frac{dv}{du}=\frac{P}{2v}$, also $f':\frac{-dv}{du}=f':\frac{-P}{2v}=\frac{v^2}{P}=u$; dann ist allgemein

$$f':-t=\frac{P}{4t^2}\text{ und }f:-t=\frac{P}{4t}.$$

Die Gleichungen $x=-pz+f':\frac{p}{q}$,

und $y=-qz+f:\frac{p}{q}-\frac{p}{q}f':\frac{p}{q}$,

geben also $$x+z\left(\frac{dz}{dx}\right)=\tfrac{1}{4}\frac{P.\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

$$y+z\left(\frac{dz}{dy}\right)=-\tfrac{1}{2}\frac{P\left(\frac{dz}{dy}\right)}{\left(\frac{dz}{dx}\right)},$$

woraus die partiellen Differentiale eliminirt werden müſsten.

Wenn man die Bestimmung jedes andern Punctes der Fläche an einen Punct in der gegebnen Parabel knüpfen will, so ist

$$x = u + \frac{dv.\sqrt{(a^2 - z^2)}}{\sqrt{(du^2 + dv^2)}}$$

$$y = v - \frac{du\sqrt{(a^2 - z^2)}}{\sqrt{(du^2 + dv^2)}},$$

woraus sich leicht übersehn läſst, daſs alle mit der Abscissen-Ebne parallelen Schnitte, für welche zum Beispiel $a^2 - z^2 = b^2$ wird, mit den im 1. Th. §. 530. betrachteten Linien übereinstimmen.

498. Um die Knotenfurche zu finden, müſsten neben den zwei Gleichungen

$$x = u + \frac{dv}{ds}\sqrt{(a^2 - z^2)},$$

$$y = v - \frac{du}{ds}.\sqrt{(a^2 - z^2)},$$

wenn ich $\sqrt{(du^2 + dv^2)} = ds$ setze, noch die zwei Gleichungen

$$0 = du + \sqrt{(a^2 - z^2)}.d.\frac{dv}{ds},$$

und $0 = dv - \sqrt{(a^2 - z^2)}.d.\frac{du}{ds}$, bestehn,

das ist, wenn du das unveränderliche Differential ist

$$0 = du + \sqrt{(a^2 - z^2)}\left\{\frac{ds.d^2v - \frac{dv^2\, d^2v}{ds}}{ds^2}\right\} = du + \frac{du^2.d^2v}{ds^3}\sqrt{(a^2 - z^2)}$$

und $0 = dv + \sqrt{(a^2 - z^2)}.\frac{du\,dv.d^2v}{ds^3}$; diese Gleichungen, die nothwendig einerlei sind, geben $\frac{-ds^3}{du.d^2v} = \sqrt{(a^2 - z^2)}$ oder $\sqrt{(a^2 - z^2)}$ gleich dem Krümmungshalbmesser der Curve, in welcher die Mittelpuncte der Kugeln sich befinden. Man muſs also, um einen Punct der Knotenfurche zu erhalten, $\sqrt{(a^2 - z^2)}$ = dem Krümmungshalbmesser der Parabel, auf ihrer Normallinie auftragen, und die Linie der Krümmungsmittelpuncte ist also hier und in allen Fällen die Projection der Knotenfurche auf die Abscissen-Ebne. Da wo a kleiner als der Krümmungshalbmesser ist, giebt es keine Knotenfurche mehr, weil da ein unmöglicher Werth von z sich als Höhe der in ihr liegenden Puncte ergäbe.

499. Bemerkung. Wenn man nur eine einzelne unsrer Flächen finden will, zum Beispiel die für welche $v^2 = Pu$ ist, so kann man aus den bei-

den Gleichungen

$$(x-u)^2+(y-v)^2+z^2=a^2=z^2+\left(x-\frac{v^2}{P}\right)^2+(y-v)^2,$$

und $(x-u)\dfrac{du}{dv}+(y-v)=0=\left(x-\dfrac{v^2}{P}\right)\cdot\dfrac{2v}{P}+y-v,$

die Gröſse v eliminiren, und erhält dann die Gleichung für die Fläche. Sucht man aber zum zweiten Male das Differential der letzten Gleichung so daſs man bloſs v als veränderlich betrachtet, und wendet man diese Gleichung

$0=\dfrac{2x}{P}-\dfrac{6v^2}{P^2}-1$, an, um v und z aus jenen beiden zu eliminiren, so erhält man

$$v=\sqrt{(\tfrac{1}{3}Px-\tfrac{1}{6}P^2)},$$

$$y^2=\tfrac{16}{27}\frac{(x-\frac{1}{2}P)^3}{P},$$

als Gleichung für die Projection der Knotenfurche, und diese Gleichung ist hier die für die Evolute der Parabel.

Diese Methode lehrt Monge; sie ist aber dann erst anwendbar, wenn man die Curve kennt, in welcher die Mittelpuncte liegen.

500. **Bemerkung.** Die Gleichung

$1+\left(\dfrac{dz}{dx}\right)+\left(\dfrac{dz}{dy}\right)^2=\dfrac{a^2}{z^2}$, giebt

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)=-\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{d^2z}{dx.dy}\right)-\frac{a^2}{z^3}\left(\frac{dz}{dx}\right),$$

und $\left(\dfrac{dz}{dx}\right)\left(\dfrac{d^2z}{dx\,dy}\right)=-\left(\dfrac{dz}{dy}\right)\left(\dfrac{d^2z}{dy^2}\right)-\dfrac{a^2}{z^3}\left(\dfrac{dz}{dy}\right)$;

oder, wenn ich $\left(\dfrac{dz}{dx}\right)=p$, $\left(\dfrac{dz}{dy}\right)=q$, $\left(\dfrac{d^2z}{dx^2}\right)=r$,

$\left(\dfrac{d^2z}{dx\,dy}\right)=s$, $\left(\dfrac{d^2z}{dy^2}\right)=t$ nenne,

$$pr+\frac{a^2}{z^3}p=-q\cdot s,$$

$$qt+\frac{a^2q}{z^3}=-ps,$$

also $p^2r+\dfrac{a^2}{z^3}p^2=q^2t+\dfrac{a^2q^2}{z^3}$,

$t=\dfrac{p^2}{q^2}r+\dfrac{a^2}{z^3}\left(\dfrac{p^2}{q^2}-1\right)$, und $s=\dfrac{-p}{q}\left(r+\dfrac{a^2}{z^3}\right)$,

ferner $rt - s^2 = -\frac{a^2 r}{z^3}\left(\frac{p^2+q^2}{q^2}\right) - \frac{a^4 p^2}{q^2 z^6}$, welches ich $= g$;

und $(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = (1+p^2+q^2)\left(r + \frac{rp^2}{q^2} + \frac{a^2 p^2}{q^2 z^3}\right) - \frac{a^2}{z^3}$;
welches ich $= h$ setze, weil diese Grössen einerlei sind mit denen, welche wir in §. 314. g und h nannten, und hier ist $k^2 = \frac{a^2}{z^2}$.

501. **Aufgabe.** Den Krümmungshalbmesser unsrer Fläche anzugeben.

Auflösung. Es ist nach den eben angegebnen Entwickelungen

$$h = -gz - \frac{a^2}{z^3}, \text{ weil } 1+p^2+q^2 = \frac{a^2}{z^2} \text{ ist,}$$

also $h^2 - 4k^2 g = \left(gz - \frac{a^2}{z^3}\right)^2$, also nach den Formeln in §. 314. der Krümmungshalbmesser

$$= \frac{k}{2g}\{h \mp \sqrt{(h^2 - 4gk^2)}\}$$

$$\text{entweder } = -kz = -a$$

$$\text{oder } = -\frac{a^2 k}{gz^3} = -\frac{a^3}{gz^4}.$$

Der eine Krümmungshalbmesser ist also überall $= a$, dem Halbmesser der umhüllten Kugeln gleich; der andre ist, da

$$g = \frac{a^2}{z^3}\left(-r\left(\frac{p^2+q^2}{q^2}\right) - \frac{a^2 p^2}{q^2 z^3}\right) \text{ war,}$$

$$= \frac{a}{z}\left(r\left(1+\frac{p^2}{q^2}\right) + \frac{a^2}{z^3}\cdot\frac{p^2}{q^2}\right),$$

und könnte in jedem einzelnen Falle bestimmt werden.

8. *Von den Flächen,*
deren Gleichung ist: $\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = c^2\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)$.

502. **Aufgabe.** Das Integral der Gleichung $\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = c^2\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)$ zu finden.

Auflösung. Nenne ich $\left(\frac{dz}{dx}\right)=p$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)=q$, so soll $\left(\frac{dq}{dy}\right)=c^2\left(\frac{dp}{dx}\right)$ sein, und es ist folglich $q\,dx+c^2p\,dy=dU$ eine für sich integrable Gleichung; da nun auch $dz=p\,dx+q\,dy$ ist, so haben wir

$$(cp+q)(dx+c\,dy)=dU+c\,dz,$$

also offenbar $U+cz=F:(x+cy)$,
und aus eben den Gründen

$$U-cz=f:(x-cy),$$

also $2cz=F:(x+cy)-f:(x-cy)$,
und dieses ist die verlangte Integralgleichung.

503. **Aufgabe.** Es ist irgend eine ebne oder doppelt gekrümmte Linie gegeben, die sich auf der Fläche befinden soll; man sucht die Form der einen Function durch die andre zu bestimmen.

Auflösung. Für die Puncte dieser Curve ist z und y als Function von x gegeben, und es erhellt allgemein, daſs dann die Function f durch die andre Function und durch Glieder die bloſs von x abhängen, kann ausgedrückt werden.

504. **Beispiel.** Die durch $z=a+mx$ und $y=nx$ gegebne grade Linie soll sich in unsrer Fläche befinden. Dann ist

$$2c(a+mx)=F:(x+ncx)-f:(x-ncx),$$

also ist $f:(x(1-nc))=F:(x(1+nc))-2ac-2cmx$,
oder wenn ich $x(1-nc)=W$ setze

$$f:W=F:\left(W.\frac{1+nc}{1-nc}\right)-2ac-\frac{2cmW}{1-nc}.$$

Die Gleichung für diese Fläche ist also

$$2c(z-a)-\frac{2cm(x-cy)}{1-nc}=F:(x+cy)-F:\left(\frac{(x-cy)(1+nc)}{1-nc}\right)$$

und wir könnten der Function F nun noch jede willkürliche Form beilegen.

Um doch eine dieser Flächen kennen zu lernen, sei

$$F:(x+cy)=\frac{(x+cy)^2}{b},\ \text{also}$$

$$z-a=\frac{m(x-cy)}{1-nc}+\frac{(x+cy)^2}{2bc}-\frac{(x-cy)^2(1+nc)^2}{2bc(1-nc)^2},$$

eine Fläche der zweiten Ordnung, für die auch

$$\left(z-a-\frac{m(x-cy)}{1-nc}\right)b=\frac{2xy(1+n^2c^2)-2n(x^2+c^2y^2)}{(1-nc)^2}\ \text{ist.}$$

505. **Bemerkung.** Sobald durch eine solche Bestimmung, wie die eben angenommene, die ganze Untersuchung auf eine einzige unbestimmte Function zurückgeführt ist, so bedürfte es im Allgemeinen nur noch einer zweiten, auf der Fläche gegebnen Linie, um diese Function zu bestimmen. Aber obgleich dadurch, wenn $W = F : U - F : V$ ist, und W, U, V Gröfsen sind, die durch x gegeben sind, die Form der Function F allerdings als bestimmt anzusehn ist, so geräth man doch bei der Entwickelung selbst meistens in zu mannigfaltige Schwierigkeiten. Ich will daher die Aufgabe, wenn zwei Curven als auf der Fläche liegend gegeben sind, beide Functionen $F.$ und $f.$ zu finden, hier übergehn.

506. **Aufgabe.** Auf einer gegebnen krummen Fläche ist diejenige Curve gegeben, in welcher unsre Fläche jene krumme Fläche berühren soll, man sucht die Form der Functionen F und f.

Auflösung. Unsre Hauptgleichung

$$z = \frac{1}{2c} F : (x + cy) - \frac{1}{2c} f : (x - cy),$$

giebt
$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{1}{2c} F' : (x + cy) - \frac{1}{2c} f' : (x - cy),$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \tfrac{1}{2} F' : (x + cy) + \tfrac{1}{2} f' : (x - cy),$$

also
$$c\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right) = F' : (x + cy),$$

$$c\left(\frac{dz}{dx}\right) - \left(\frac{dz}{dy}\right) = -f' : (x - cy).$$

Da nun an den Puncten, wo die gegebne Fläche von unsrer Fläche berührt wird, der Werth beider partiellen Differentiale eben derselbe bei beiden Flächen sein mufs, und für diese Puncte auch y als Function von x gegeben ist, so erhellt, dafs die Form der beiden Functionen F', f' bestimmt ist.

507. **Bemerkung.** Die Ordinate z stellt sich in der Gleichung $z = F : (x + cy) - f : (x - cy)$, als Unterschied der eben den x und y entsprechenden Ordinaten zweier Cylinderflächen dar. Denn wenn ich unter u und v die Ordinaten dieser zwei durch $u = F : (x + cy)$, und $v = f : (x - cy)$ dargestellten Cylinderflächen verstehe, so ist $z = u - v$. Die Axen beider Cylinderflächen sind durch $x + cy = g$ und $x - cy = h$ bestimmt, oder mit den hiedurch angegebnen Linien sind die in den Cylinderflächen liegenden graden Linien parallel; und es erhellt nun, dafs jeder mit der Axe des ersten Cylinders parallele Querschnitt unsrer Fläche blofs von der Function f abhängt, und nichts anders darbietet, als die immer gleichen, unter sich parallelen

Querschnitte des zweiten Cylinders. Ebenso erhält man parallel mit der Axe des zweiten Cylinders Schnitte unsrer Fläche, die mit den Schnitten des ersten Cylinders übereinstimmen. Denn wenn (Fig. 96.) AB eine mit der Seitenlinie des ersten Cylinders in der Abscissen-Ebne gezogne Parallele vorstellt, und die gegen die Abscissen-Ebne senkrechte Ebne die erste Cylinderfläche in CD, die zweite in $CEFDGH$ schneidet, so soll man in L, $z=LI-LE=LM=IE$ und $z=LI-LH=-IH=LP$ auftragen, und so in allen andern Puncten. Geht man zu einer zweiten mit AB parallelen Linie in der Abscissen-Ebne über, so erhält LI einen andern Werth, aber immer bildet der Einschnitt in den ersten Cylinder eine mit der vorigen parallele grade Linie, der Einschnitt in den zweiten Cylinder eine der vorigen gleiche Durchschnittslinie, und der Querschnitt unsrer Fläche ist für diese mit der Seitenlinie des ersten Cylinders parallelen Ebnen immer gleich. Es versteht sich, daſs eben das für die mit der Seitenlinie des zweiten Cylinders parallelen Schnitte statt findet.

508. Hieraus erhellt, mit welchem Rechte man die Durchschnittslinien unsrer Fläche mit Ebnen, die parallel mit den Seitenlinien des einen oder andern Cylinders sind, characteristische Linien der Fläche nennen kann, indem die Fläche hier als der geometrische Ort aller jener gleichen Linien erscheint. In jedem Puncte der Fläche giebt es also zwei characteristische Linien, die man erhält, wenn man Ebnen senkrecht auf die Abscissen-Ebne jener zwei graden Linien parallel durch diesen Punct legt. Für die eine derselben behält $x+cy$ einen unveränderlichen Werth, für die andre behält $x-cy$ einen gleichen Werth, und es läſst sich hieraus übersehen, daſs Flächen, die durch Differentialgleichungen des zweiten Grades bestimmt werden, dann zwei von einander unabhängige characteristische Linien haben werden, wenn die beiden durch die Integration eingeführten unbestimmten Functionen von verschiedenen Gröſsen, (so wie hier von $x+cy$ und $x-cy$) abhängen.

509. Bemerkung. Wir sind hier durch eine Betrachtung, die erst nach vollendeter Integration angestellt werden konnte, zur Kenntniſs der characteristischen Linien geleitet; es kann aber für die Vollführung der Integration wichtig sein, diese Linien schon aus der Differentialgleichung kennen zu lernen. Hiezu giebt Monge Mittel an, die sich auf folgende Betrachtung stützen.

Jede Fläche, die durch eine Differentialgleichung des zweiten Grades gegeben ist, kann angesehn werden, als ob sie durch eine unveränderliche Curve hervorgebracht würde, die, an zwei ganz willkürliche Richtungslinien sich anlehnend, mit paralleler Bewegung fortrückend, diese Fläche beschriebe. Hier ist also die beschreibende Curve als eine be-

stimmte, unveränderliche anzusehn, statt daſs die beiden Richtungslinien zwar als bestimmt angenommen werden müssen, wenn man eine einzelne jener Flächen, die in derselben Differentialgleichung enthalten sind, betrachten will, aber durchaus nach Willkür geändert werden können, wenn man von jener einen Fläche zu einer andern, gleichfalls in der Differentialgleichung enthaltenen, übergehn will.

Offenbar ist nun jene beschreibende Curve die Characteristik aller der Flächen, die in der Differentialgleichung enthalten sind, da sie dieselbe bleibt, während man den beiden unbestimmten Functionen alle möglichen Werthe giebt, oder als Richtungslinie allerlei verschiedene Curven annimmt. Um sie aus der Differentialgleichung kennen zu lernen, denken wir uns diese Characteristik gezeichnet auf irgend einer der so beschriebenen Flächen, die dadurch entstanden ist, daſs man einem gegebnen Paare von Richtungslinien gefolgt ist; denken wir uns nun zwei neue Richtungslinien, welche die beiden vorigen grade in den Puncten berühren, wo die gezeichnete Characteristik in diese Richtungslinien eintrifft, so würde die diesen Richtungslinien entsprechende Fläche, die nämlich entstände, wenn die Characteristik den zwei neuen Richtungslinien folgte, die vorige Fläche in allen Puncten der gezeichneten Characteristik berühren. Jeder Punct jener gezeichneten Characteristik, der durch x, y, z bestimmt ist, hat also das Eigenthümliche, daſs für ihn die Berührungs-Ebne dieselbe bleibt, oder $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ ungeändert bleiben, während die Bestimmungen der beiden Richtungslinien sich um ihre Differentiale ändern; oder umgekehrt, wenn man diejenigen Puncte der Fläche sucht, für welche x, y, z, $\left(\frac{dz}{dx}\right) = p$, $\left(\frac{dz}{dy}\right) = q$, ungeändert bleiben, während die Richtungslinien sich um ihre Differentiale ändern, so hat man Puncte der Characteristik.

Die Differentialgleichung enthält auſser jenen fünf Gröſsen noch

$$\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) = r, \left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) = s \text{ und } \left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = t,$$

und man findet daher aus der Differentialgleichung, wenn man darin diese drei Gröſsen als veränderlich betrachtet, eine Gleichung von der Form $R dr + S ds + T dt = 0$. Aber da auch $dp = r dx + s dy = 0$ und $dq = s dx + t dy = 0$, sein soll für alle Puncte der Characteristik, und folglich $dr.dx + ds.dy = 0$ und $ds.dx + dt.dy = 0$ ist, so erhalten wir $ds = \frac{-dr\,dx}{dy}$ und $dt = -\frac{ds.dx}{dy} = \frac{dr.dx^2}{dy^2}$, also ist jene Gleichung $R dr + S ds + T dt = 0$, insofern sie für alle Puncte einer und der-

selben Characteristik gilt,

$$Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2 = 0.$$

Dieses ist die Gleichung für die Characteristik, und da R, S, T aus der gegebnen Differentialgleichung gefunden werden, so erhellt, wie man die Characteristik wenigstens dann bestimmt, wenn diese Gleichung integrabel ist.

510. Für unsre Fläche war $t = c^2 r$, also $R = c^2$, $S = 0$, $T = -1$, und daher $c^2 dy^2 - dx^2 = 0$, die Gleichung für die Projection der characteristischen Linien, die also, weil der Ausdruck zwei ungleiche Factoren enthält, durch

$$x + cy = Const \quad \text{und} \quad x - cy = Const$$

angegeben werden. Diese Gleichungen zeigen an, dafs die beiden characteristischen Linien ebne Curven sind, die in den auf die Abscissen-Ebne senkrechten Ebnen liegen, welche in den beiden Gleichungen $x + cy = l$, $x - cy = m$, dargestellt sind.

511. Beispiel. Wenn $c = 1$ ist, so sind beide eben bestimmte Ebnen gegen y unter Winkeln von 45 Graden geneigt, also auf einander senkrecht. Nehmen wir zugleich die beiden Cylinder als elliptisch an, so dafs

$$\tfrac{1}{2} F:(x+y) = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - (x+y)^2)},$$

$$\tfrac{1}{2} f:(x-y) = \frac{g}{h}\sqrt{(h^2 - (x-y)^2)} \quad \text{sei, so ist}$$

$$z^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - (x+y)^2) + \frac{g^2}{h^2}(h^2 - (x-y)^2) + \frac{2bg}{ah}\sqrt{\{(a^2-(x+y)^2)(h^2-(x-y)^2)\}},$$

als Gleichung für unsre Fläche, die demnach von der vierten Ordnung ist.

Man kann auch die Gleichung so ausdrücken, dafs

$$z^2 + \frac{2zg}{h}\sqrt{(h^2 - (x-y)^2)} + g^2 - \frac{g^2}{h^2}(x-y)^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}(x+y)^2$$

ist, und bestimmt dann, indem man $x - y$ einen unveränderlichen Werth $= l$ giebt, durch

$$z^2 + \frac{2zg}{h}\sqrt{(h^2 - l^2)} + g^2 - \frac{g^2 l^2}{h^2} = b^2 - \frac{b^2}{a^2}(l + 2y)^2,$$

den Werth von z, welchen es für die verschiedenen, durch y gegebnen Puncte derjenigen graden Linie erlangt, in welcher $x - y$ den unveränderlichen Werth $= l$ hat. Nennt man die Coordinaten auf den graden Linien, welche gegen y unter den Winkeln von 45 Gr. und 135 Gr. geneigt sind, u und v, so dafs $x + y = u\sqrt{2}$, $x - y = v\sqrt{2}$ ist, so wird

$$\left(z+\frac{g}{h}\sqrt{(h^2-2v^2)}\right)^2=b^2-\frac{2b^2u^2}{a^2},$$

das ist, alle in einer bestimmten Entfernung $=v'$ von der einen Linie, senkrecht auf die Abscissen-Ebne gelegten Schnitte sind Ellipsen, deren mit z parallele halbe Axen $=b$, und deren mit u parallele halbe Axen $=\frac{a}{\sqrt{2}}$ sind; der Mittelpunct jeder Ellipse liegt aber in der Tiefe $=\frac{g}{h}\sqrt{(h^2-2v'^2)}$, so dafs der geometrische Ort dieser Mittelpuncte selbst wieder eine Ellipse ist, deren halbe Axen g und $\frac{h}{\sqrt{2}}$ sind.

Die ganze Fläche wird also beschrieben, indem die eine characteristische Linie auf der andern als ihrer Richtungslinie uud zwar ohne alle Drehung, mit sich selbst parallel, fortrückt.

512. Lehrsatz. Alle in unsrer Differentialgleichung enthaltene Flächen können angesehn werden, als dadurch hervorgebracht, dafs die eine characteristische Curve sich ohne Drehung auf der andern characteristischen Curve fortbewegt.

Beweis. Die beiden characteristischen Linien sind übrigens völlig willkürliche Curven, von denen blofs bestimmt ist, dafs sie ebne Curven sind, und in Ebnen, senkrecht gegen die Abscissen-Ebne, die nach beiden Seiten von y gleiche Winkel bilden, liegen. Es sei also (Fig. 97.) AB die Abscissenlinie, AC mit y parallel, und $tang\, CAD = tang\, CAE = c$; dann sind AD, AE die Linien über welchen senkrecht die Ebnen stehn, in denen die für $x=0$, $y=0$ geltenden characteristischen Linien sich befinden.

Die senkrechte Höhe jedes Punctes der einen Characteristik über AY, sei durch $z=F:x=F:AX$, die senkrechte Höhe jedes Punctes der zweiten über AD sei durch $w=f:u=f:AU$ gegeben. Denkt man sich die erste so auf der zweiten fortgeschoben, dafs der zuerst über A liegende Punct, dessen Höhe dort $=h$ war, nun nach V gekommen ist, wo seine Höhe $=w=f:u$ ist: so ist zugleich auch der zuerst über Y liegende Punct, dessen Höhe $=F:x$ war, nun nach y gekommen, wo jetzt seine Höhe $=F:x+f:u-h$ sein wird. Nenne ich nun die drei Coordinaten des über y liegenden Punctes unsrer Fläche X, Y, Z, so ist offenbar

$$X = AW = u + x,$$

$$Y = Wy = \frac{u-x}{c},$$

$$Z = F:x + f:u - h,$$

wo h ohne allen Nachtheil weggelassen werden könnte, indem man $F:x$

schon als so bestimmt annehmen kann, daſs es $= h$ giebt für $x = 0$. Da aber

$$u + x = X$$

$$u - x = c\,Y,$$

also $u = \frac{1}{2}(X + c\,Y)$; $x = \frac{1}{2}(X - c\,Y)$,

so erhalten wir $Z = F : \left(\frac{X - c\,Y}{2}\right) + f : \left(\frac{X + c\,Y}{2}\right) - h$,

welches die Gleichung ist, die für unsre Flächen gefunden wurde.

513. **Bemerkung.** Wenn man statt X und Y andre Coordinaten annähme, so daſs $X = U\,Cos\,\alpha + V\,Sin\,\alpha$,

$Y = U\,Sin\,\alpha - V\,Cos\,\alpha$,

wäre, so würde Z, da der Divisor 2 und die Gröſse h hier bekanntlich nichts Wesentliches sind, sich so ausdrücken lassen:

$$Z = F : \{U(Cos\,\alpha - c\,Sin\,\alpha) + V(Sin\,\alpha + c\,Cos\,\alpha)\}$$
$$+ f : \{U(Cos\,\alpha + c\,Sin\,\alpha) + V(Sin\,\alpha - c\,Cos\,\alpha)\}.$$

Ich will dafür $Z = F : (a\,U + b\,V) + f : (g\,U + h\,V)$ setzen,

und erhalte dann $\left(\frac{d^2 Z}{d\,U^2}\right) = a^2 F'' : (a\,U + b\,V) + g^2 . f'' : (g\,U + h\,V)$,

$$\left(\frac{d^2 Z}{d\,U\,d\,V}\right) = a\,b\,.\,F'' : (a\,U + b\,V) + g\,h\,f'' : (g\,U + h\,V),$$

$$\left(\frac{d^2 Z}{d\,V^2}\right) = b^2 F'' : (a\,U + b\,V) + h^2 f'' : (g\,U + h\,V),$$

also, wenn ich aus diesen Gleichungen beide unbestimmte Functionen eliminire,

$$b\,h\left(\frac{d^2 Z}{d\,U^2}\right) + a\,g\left(\frac{d^2 Z}{d\,V^2}\right) - (a\,h + b\,g)\left(\frac{d^2 Z}{d\,U\,d\,V}\right) = 0$$

und diese Differentialgleichung ist folglich dem Wesentlichen nach nicht allgemeiner als die vorhin betrachtete.

514. **Bemerkung.** Die Gleichung $\left(\frac{d^2 z}{d\,x^2}\right) = c^2\left(\frac{d^2 z}{d\,y^2}\right)$ kömmt bei Untersuchungen in der Physik öfter vor, da von ihr die Theorie der Saiten-Schwingungen und der Fortpflanzung des Schalles abhängt, und auch die Bewegung tropfbar flüssiger Körper auf sie führt. Bei der letztern Betrachtung tritt der schwierige Umstand ein, daſs $c^2 = -1$ ist, und die Integration daher $z = F : (x + y\sqrt{-1}) - f : (x - y\sqrt{-1})$, giebt, wo also die beiden characteristischen Linien unmöglich werden. (Etwas Aehnliches wird in der Folge (§. 536.) näher betrachtet werden.) Gleichwohl erhellt, daſs z nicht nothwendig unmöglich wird, denn für $F = -f$, hätte man

$$z = F : (x + y\sqrt{-1}) + F : (x - y\sqrt{-1}),$$

was zum Beispiel für $F: x = \frac{x^2}{b}$, in $bz = 2x^2 - 2y^2$ übergeht; so wie denn auch der **Taylor**sche Lehrsatz zu einer Entwickelung führt, aus welcher alle unmögliche Formen wegfallen.

515. **Bemerkung.** Um die Betrachtungen über die characteristischen Linien noch etwas vollständiger zu übersehn, mag hier noch eine kurze Entwickelung der Gleichung

$$y\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) - x\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) - (x-y)\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) = \frac{2y}{b}$$

folgen. Wenn man hieraus nach **Monge**'s Anleitung die Characteristik finden wollte, so hätte man

$$y\,dr - (x-y)\,ds - x\,dt = 0,$$

oder nach §. 509. $\quad y\,dy^2 + (x-y)\,dx\,dy - x\,dx^2 = 0,$

eine Gleichung die aus zwei ungleichen Factoren besteht und

$(y\,dy + x\,dx)\,(dy - dx) = 0$ giebt, also für die beiden characteristischen Linien die Gleichungen

$$y^2 + x^2 = l^2 \quad \text{und} \quad y - x = k.$$

Aus dieser Bestimmung sieht man, daſs das Integral zwei unbestimmte Functionen eben dieser Gröſsen enthalten muſs, daſs also, da auſserdem noch vielleicht eine bestimmte aus x, y, z zusammengesetzte Function vorkommen kann,

$$z + U = F:(y-x) + f:(y^2 + x^2)$$

sein wird, wo U nun durch zweimaliges Differentiiren bestimmt wird, indem

$$\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) = -\left(\frac{d^2 U}{dx^2}\right) + F'' + 4x^2 f'',$$

$$\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) = -\left(\frac{d^2 U}{dx\,dy}\right) - F'' + 4xy f'',$$

$$\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = -\left(\frac{d^2 U}{dy^2}\right) + F'' + 4y^2 f'', \quad \text{wird}$$

also durch Elimination der beiden Functionen

$$y\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) + y\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) - x\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) - x\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) = -y\left(\frac{d^2 U}{dx^2}\right) - y\left(\frac{d^2 U}{dx\,dy}\right)$$
$$+ x\left(\frac{d^2 U}{dy^2}\right) + x\left(\frac{d^2 U}{dx\,dy}\right).$$

Vermöge der gegebnen Gleichung soll aber das was vor dem Gleichheitszeichen steht $= \frac{2y}{b}$ sein, und folglich ist auch

$$y\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)+(y-x)\left(\frac{d^2U}{dydx}\right)-x\left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)=\frac{-2y}{b}.$$

Hier reicht es hin, für U eine Function anzunehmen, die dieser Gleichung Genüge thut, und eine solche ist offenbar

$$-\frac{x^2}{b},\text{ so dafs } z=\frac{x^2}{b}+F:(y-x)+f:(y^2+x^2)$$

die vollständige Auflösung ist. *)

Die Projection der einen characteristischen Linie ist also die durch $y-x=k$ ausgedrückte grade Linie, weil die Durchschnittscurve der Ebne, die durch sie senkrecht auf die Abscissen-Ebne gesetzt ist, blofs von f abhängt, F aber als eine constante Gröfse enthält.

Die Projection der andern characteristischen Linie ist ein Kreis, weil, wenn man in unsrer Fläche von einem Puncte, für welchen $x^2+y^2=l^2$ ist, aus, auf der senkrechten Cylinderfläche, deren Radius $=l$ ist, fortgeht, die Function f unverändert bleibt, und also die Durchschnittscurve mit der Cylinderfläche blofs von der unbestimmten Function F abhängt.

10. *Von den abwickelbaren Flächen.*

516. **Erklärung.** Flächen heifsen abwickelbar, wenn man sie ohne Zertrennung oder Faltung in eine Ebne ausdehnen kann. Damit das geschehen könne, mufs jede Berührungs-Ebne nicht in einem einzigen, sondern in mehrern Puncten berühren; — es wird sich nachher zeigen, dafs die Linie, worin die berührten Puncte liegen, eine grade Linie sein mufs. Aendert man nun die Lage der Berührungs-Ebne unendlich wenig, so wird sie in einer neuen graden Linie berühren, welche die vorige gewöhnlich irgendwo schneiden wird, oder im einzelnen Falle auch mit ihr parallel sein kann; bei einer zweiten Aenderung der Berührungs-Ebne findet die Berührung in einer dritten graden Linie statt, deren Durchschnittspunct mit der zweiten im Allgemeinen von dem gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte der beiden ersten verschieden ist.

Indem man so die Tangential-Ebne sich nach und nach in verschiedene unendlich nahe Lagen gebracht denkt, legen sich also trianguläre Räume, welche die Figur (Fig. 98.) durch ABC, CDE, EFG, GHI dar-

*) Hätte man eine andre Genüge thuende Auflösung gewählt, so würde sie nur aufser dem Gliede $\frac{-x^2}{b}$ noch Functionen jener beiden Gröfsen enthalten und nie etwas allgemeineres geben.

stellt, an diese Ebne an, und die krumme Fläche wird also gleichsam in diese Ebne niedergelegt, oder als abgewickelt auf ihr gezeichnet.

Es läſst sich übrigens leicht einsehn, daſs jedem triangulären Raume ABC ein gegenüber liegender aBc entspricht und daſs $BDFH$, die Linie der Durchschnittspuncte aller auf der Fläche gezogenen graden Linien, eine Knotenkante (arête de rebroussement) bildet, deren Tangenten jene graden Linien sind.

517. Kegel und Cylinder gehören als einzelne Fälle mit hieher, indem bei jenem die sämmtlichen Durchschnittspuncte der auf der Fläche gezognen graden Linien in einen einzigen Punct zusammen fallen, beim Cylinder dagegen alle diese graden Linien parallel werden. — Daſs für alle doppelt gekrümmte Linien, die Fläche, worin sich ihre sämmtlichen Tangenten befinden, eine abwickelbare ist, deren Knotenkante eben jene Linie bildet; daſs die sämmtlichen durch eine Krümmungslinie einer krummen Fläche gezogenen Normallinien in einer solchen Fläche liegen, erhellt nun leicht und ist schon früher erwähnt worden. (§. 324. 352.)

518. Aufgabe. Eine Differentialgleichung für alle abwickelbare Flächen zu finden.

Auflösung. Wenn ein Punct irgend einer Fläche durch x, y, z gegeben ist, so war die Gleichung für ihre Berührungs-Ebne

$$(u-x)\left(\frac{dz}{dx}\right)+(v-y)\left(\frac{dz}{dy}\right)-w+z=0,$$ und die Lage dieser Ebne wird bekanntlich bestimmt durch die drei Gröſsen A, B, C in der Gleichung $Au+Bv-w+C=0$, also hier durch die drei Gröſsen

$$\left(\frac{dz}{dx}\right),\ \left(\frac{dz}{dy}\right)\ \text{und}\ \ z-x\left(\frac{dz}{dx}\right)-y\left(\frac{dz}{dy}\right).$$

Die abwickelbaren Flächen sollen nun das Eigenthümliche haben, daſs die Berührungs-Ebne sie immer in einer ganzen Folge von Puncten berührt, daſs man also von jenem Puncte, der durch x, y, z gegeben war, zu einem richtig gewählten benachbarten Puncte übergehen kann, ohne aus derselben Berührungs-Ebne herauszugehen; wir fragen daher mit Recht, ob sich aus jener Gleichung für die Berührungs-Ebne die Bestimmung dieser Richtung, vor allem aber, ob sich eine Bedingungsgleichung angeben läſst, welche statt finden muſs, wenn ein solches Fortgehen auf der Fläche möglich sein soll.

Da in der Gleichung $Au+Bv-w+C=0$ die drei Gröſsen A, B, C einen unveränderlichen Werth behalten müssen, wenn man in derselben Ebne bleibt, so müssen hier die drei Gröſsen $\left(\frac{dz}{dx}\right)$; $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ und

$z - x\left(\frac{dz}{dx}\right) - y\left(\frac{dz}{dy}\right)$ ungeändert bleiben, wenn man zu dem richtig gewählten benachbarten Puncte übergeht; es muſs daher

$$d.\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0;\; d.\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0,$$

$$d.\left\{z - x\left(\frac{dz}{dx}\right) - y\left(\frac{dz}{dy}\right)\right\} = dz - \left(dx\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)dy\right) - xd\left(\frac{dz}{dx}\right) - yd\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0$$

sein, und hier findet offenbar, da $dz = \left(\frac{dz}{dx}\right)dx + \left(\frac{dz}{dy}\right)dy$ ist, die letzte von selbst statt, wenn die beiden ersten statt finden. Die beiden ersten aber geben:

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)dx + \left(\frac{d^2z}{dx.dy}\right)dy = 0, \text{ und } \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)dx + \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)dy = 0,$$

also $\frac{dy}{dx} = \frac{-r}{f} = \frac{-f}{t}$, wenn ich $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = r$, $\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) = f$, $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = t$ nenne, und damit ist die Bedingungsgleichung $rt = f^2$ gefunden, welche gelten muſs, damit jene Eigenschaft statt finde, oder die Gleichung, welche das Characteristische der abwickelbaren Flächen enthält. Findet sie statt, so ergiebt sich, sobald r, f, t, gegebne Functionen sind, auch $\frac{dy}{dx}$ oder die Projection der Richtung nach welcher man fortgehn muſs, um in der Berührungslinie zu bleiben, die ganz in derselben Tangential-Ebne liegt.

519. Die Gleichung für alle Kegelflächen $\frac{c-z}{b-y} = f : \frac{a-x}{b-y}$, entspricht dieser Bedingung, denn es ist

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = \frac{1}{y-b}f'' : \left(\frac{a-x}{b-y}\right);\; \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) = \frac{a-x}{(b-y)^2}f'' : \left(\frac{a-x}{b-y}\right)$$

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \frac{(a-x)^2}{(y-b)^3}f'' : \left(\frac{a-x}{b-y}\right).$$

Auch die in §. 475. u. f. betrachteten Flächen gehören hieher; denn für sie sollte $\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 = m^2$, sein,

$$\text{also } \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) = 0,$$

$$\text{und } \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = 0,$$

folglich, wenn man hiefür $pr + qs = 0$ und $ps + qt = 0$ schreibt und $\frac{p}{q}$ eliminirt, $s^2 = rt$ sein, so daſs jene Bedingung uns die dort betrachteten Flächen als abwickelbare kennen lehrt.

520. **Aufgabe.** Die Gleichung $rt = s^2$ zu integriren.

Auflösung. Wenn ich $\left(\frac{dz}{dx}\right) = p$, $\left(\frac{dz}{dy}\right) = q$ setze, so ist

$$dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy,$$

also, da $r = \frac{s^2}{t}$ sein soll,

$$dp = \frac{s}{t}(s\,dx + t\,dy) = \frac{s}{t}\,dq,$$

und $p = f : q$ ist das erste Integral.

Um zum zweiten Male zu integriren, können wir

$z = \int (p\,dx + q\,dy)$, durch theilweise Integration ausdrücken und

$z = px + qy - \int (x\,dp + y\,dq)$ setzen,

also $\quad z = x \cdot f : q + qy - \int \{xf' : q + y\}\,dq.$

Diese Gleichung kann nur bestehen, wenn

$y + xf' : q = F' : q$ ist, und dann ist zugleich

$z = x \cdot f : q + qy - F : q.$

521. Das erste Integral hätte sich aus §. 517. auch so herleiten lassen. Die drei Gröſsen p, q und $z - px - qy$, sollten alle drei bei dem Fortgange zum benachbarten Puncte ungeändert bleiben, wenn man in der Richtung fortging, welche durch die Berührungslinie auf eben der Ebne vorgezeichnet wird; sie sollte dagegen sich ändern, wenn man eine andre Richtung des Fortgangs auf der Fläche wählt; jene Gröſsen sind also zugleich constant und zugleich variabel, also $p = f : q$, und auch

$p = funct : (z - px - qy)$, oder $z = px + qy + Funct : p$,

und jede dieser zwei Gleichungen ist für sich allein, als erstes Integral anzusehn. Die letzte stimmt ganz mit dem im vorigen §. gefundenen Werthe von z zusammen, indem eine Function von $p = f : q$ selbst eine Function von q ist. Diese letztere, die ich $= - F : q = Funct : p$ nennen will, steht aber mit den übrigen Gröſsen in der Beziehung, daſs

$$dz = p\,dx + q\,dy + x\,dp + y\,dq - (F' : q)\,dq$$

oder $xdp + ydq = dq . F' : q$, oder $y + xf' : q = F' : q$ sein mufs, weil $dp = dq . f' : q$ wird.

522. **Bemerkung.** Wenn man diejenigen Puncte auf der Fläche aufsucht, für welche q einen unveränderlichen Werth erhält, und folglich auch die Functionen von q constant bleiben, so liegen diese auf der durch irgend einen gegebnen Punct gehenden Characteristik, und diese ist daher allemal eine grade Linie, deren Projection durch $y = -bx + c$ gegeben ist, wenn man $q = a$, $f' : q = b$, $F' : q = c$ setzt, und auch die zweite Projection, welche z durch x ausdrückt, ist offenbar eine grade Linie. Also ist die Characteristik selbst eine grade Linie.

Nach **Monge's** Regel würden wir hier, wo

$$rt - f^2 = 0 \text{ ist}, \quad t dr - 2f df + r dt = 0,$$

und also (nach §. 509.) für die Characteristik

$$t dy^2 + 2f dx dy + r dx^2 = 0,$$

oder $$t dy^2 + 2 dx . dy \sqrt{rt} + r dx^2 = 0,$$

das ist $$dy\sqrt{t} + dx\sqrt{r} = 0, \text{ erhalten.}$$

Die Gleichung $t dy^2 + 2f dx dy + r dx^2 = 0$

$$\text{oder } \left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) dy^2 + 2\left(\frac{d^2 z}{dx dy}\right) dx dy + \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) = 0,$$

ist einerlei mit $d^2 z = 0$, und fordert also dafs

$z = Ax + By + C$, sei, oder die Characteristik eine ebne Curve, von der sich dann weiter zeigen läfst, was unsre vorigen Schlüsse schon ergaben, dafs sie eine grade Linie sei.

523. **Lehrsatz.** In jedem Puncte einer abwickelbaren Fläche ist die eine der beiden Krümmungslinien eine grade Linie.

Beweis. In §. 314. wurde der Krümmungshalbmesser durch $\frac{k}{2g}\{h \mp \sqrt{(h^2 - 4gk^2)}\}$ ausgedrückt, und es war $g = rt - f^2$, also hier $g = 0$, und folglich der eine Krümmungshalbmesser allemal unendlich; der andre wird $\frac{k}{2g}\left\{h - \left(h - \frac{2gk^2}{h} - \frac{2g^2k^4}{h^3} - \text{etc.}\right), = \frac{k^3}{h}\right\}$, und läfst sich also in jedem Falle leicht bestimmen.

524. **Bemerkung.** Um einige Beispiele von abwickelbaren Flächen zu erhalten, wollen wir in den Gleichungen

$$y = -x . f' : q + F' : q;$$
$$z = xf : q + qy - F : q,$$

den unbestimmten Functionen willkürliche Werthe geben.

1. Es sei $f':q = aq;\quad F':q = bq,$
$f:q = \frac{1}{2}aq^2;\quad F:q = \frac{1}{2}bq^2 + C,$

also $y = bq - aqx;$

$$z = (b - ax)\frac{q^2}{2} - C$$

oder $z + C = \frac{y^2}{2(b - ax)}$; die Gleichung für eine Kegelfläche, deren Spitze durch $x = \frac{b}{a}$, $y = 0$, $z = -C$ gegeben ist, so dafs, wenn man $z + C = u$, $\frac{b}{a} - x = v$ setzt, $2a.uv = y^2$ ist. Um diese Gleichung auf die gewöhnlichere Form der Gleichung für den Kegel zurückzuführen, könnte man neue Coordinaten ξ und ζ einführen,

so dafs $u = \frac{\xi + \zeta}{\sqrt{2}}$, $v = \frac{\xi - \zeta}{\sqrt{2}}$,

und folglich $\xi^2 = \zeta^2 + \frac{y^2}{a}$ wären, also die mit ξ parallelen Schnitte Ellipsen.

2. Es sei $f':q = aq,\quad f:q = \frac{1}{2}aq^2,$
$F':q = bq^2,\quad F:q = \frac{1}{3}bq^3;$
$y = -axq + bq^2;\quad z = \frac{2}{3}bq^3 - \frac{1}{2}axq^2.$

Hieraus $q = \frac{ax}{2b} + \frac{\sqrt{(4by + a^2x^2)}}{2b}$,

also $z = \frac{1}{12}\frac{a^3x^3}{b^2} + \frac{1}{2}\frac{axy}{b} + \left(\frac{1}{3}\frac{y}{b} + \frac{1}{12}\frac{a^2x^2}{b^2}\right)\sqrt{(4by + a^2x^2)}$

oder $z = \frac{ax}{12b^2}(a^2x^2 + 6by) + \frac{1}{12b^2}\sqrt{(4by + a^2x^2)^3}$,

eine Gleichung, die rational entwickelt vom fünften Grade ist, und daher eine Fläche der fünften Ordnung angiebt.

525. Aufgabe. Aus der gegebnen Gleichung für eine abwickelbare Fläche die Gleichung für die Knotenkante zu bestimmen.

Auflösung. Die Knotenkante ist der geometrische Ort aller Durchschnittspuncte jeder zwei unendlich nahe auf einander folgender characteristischer Linien. Da nun die durch irgend einen Punct gehende characteristische Linie gefunden wird, wenn man q einen constanten Werth beilegt, so geht man zur nächsten über, indem man q um sein Differential wachsen läfst. Für den gemeinschaftlichen Punct beider aber bleiben x, y, z, ungeändert indem q sich ändert, und man erhält daher die Gleichungen für

die Projectionen der Knotenfurche, wenn man für ein veränderliches q, dx, dy, dz alle $=0$ setzt.

526. **Beispiel.** Wir nahmen §. 524.

$$y=-aqx+bq^2 \text{ und } z=\tfrac{2}{3}bq^3-\tfrac{1}{2}axq^2, \text{ an,}$$

erhalten also für die Aenderung von q

$$dy=-aq\,dx+(2bq-ax)\,dq, \text{ und}$$

$$dz=-\tfrac{1}{2}aq^2\,dx+(2bq^2-axq)\,dq,$$

welche im Allgemeinen die Lage der nächsten characteristischen Linie angeben, aber zur Bestimmung ihres Durchschnittspunctes mit der vorigen

$q=\dfrac{ax}{2b}$ fordern, und vermittelst dieses Werthes uns die Gleichungen für zwei Projectionen der Knotenfurche geben, nämlich

$$y=-\frac{a^2x^2}{4b} \text{ und } z=-\tfrac{1}{24}\frac{a^3x^3}{b^2}=\tfrac{1}{3}\sqrt{\frac{y^3}{b}}.$$

Diese Projectionen sind also Parabeln der zweiten und der dritten Ordnung, und man erhielte die Knotenfurche, wenn man auf dem senkrechten Cylinder, dessen Basis die Parabel vom Parameter $-\dfrac{4b}{a^2}$ ist, die Curve zeichnete, welche durch die übrigen beiden Projectionen angegeben wird, und die Fläche selbst ist diejenige, in welcher alle Tangenten jener Curve liegen. Uebrigens hätte diese Reihe doppelter Puncte aus der rational gemachten Gleichung auch nach den in §. 298. gegebnen Regeln gefunden werden können.

527. **Aufgabe.** Es sind die beiden Gleichungen für zwei Projectionen der Knotenfurche gegeben, man sucht die Form der Functionen F und f in der Gleichung für die abwickelbare Fläche.

Auflösung. Da die in der abwickelbaren Fläche liegenden graden Linien nichts anders sind, als Tangenten der Knotenfurche, so könnte man den geometrischen Ort aller dieser Tangenten suchen und so die Gleichung für die Fläche finden. Um aber eine Anleitung zu Bestimmung der beiden in unsern Gleichungen vorkommenden Functionen zu geben, wähle ich folgendes Verfahren.

Wenn die Coordinaten der Curve u, v, w heifsen, x, y, z aber die drei Coordinaten irgend eines Punctes in einer Tangente dieser Curve sind, so ist ja aus bekannten Gründen $y-v=\dfrac{dv}{du}(x-u)$,

$$z-w=\frac{dw}{du}(x-u),$$

da dies die Gleichungen für die Projectionen der Tangente sind. Aber diese Tangenten sind die characteristischen Linien unsrer Fläche, also ist zugleich für jeden ihrer Puncte

$$y = -xf':q + F':q \quad \text{und} \quad z = xf:q - xqf':q + qF':q - F:q,$$

und es ist daher, da q und seine Functionen in der ganzen Ausdehnung derselben characteristischen Linie ungeändert bleiben,

$$-f':q = \frac{dv}{du} \quad \text{und} \quad F':q = v - \frac{u\,dv}{du},$$

zugleich aber auch $f:q - qf':q = \frac{dw}{du}$ und

$$qF':q - F:q = w - u\,\frac{dw}{du}.$$

Hieraus ergiebt sich q durch Differentiirung, indem

$$-dqf'':q = \frac{d^2 v}{du} \quad \text{und} \quad -q\,dqf'':q = \frac{d^2 w}{du}$$

ist, wenn du als unveränderliches Differential angenommen wird. Diese Gleichungen geben, wenn man $dq.f'':q$ eliminirt, $q = \frac{d^2 w}{d^2 v}$. Eben das würde aus $dqF'':q = -\frac{u\,d^2 v}{du}$ und $q\,dqF'':q = -\frac{u\,d^2 w}{du}$, folgen. So kann also sowohl q selbst als $f':q$, $F':q$ durch u ausgedrückt werden, und damit ist die Form der Functionen gegeben.

528. **Beispiel.** Die Schraubenlinie sei die Knotenfurche, und daher

$$v^2 = R^2 - u^2; \quad w = nR.\,Arc\,Cos\,\frac{u}{R},$$

dann ist $\frac{dv}{du} = -\frac{u}{v}$; $\frac{dw}{du} = -\frac{nR}{v}$,

$$\frac{d^2 v}{du^2} = -\frac{R^2}{v^3}; \quad \frac{d^2 w}{du^2} = -\frac{nRu}{v^3},$$

also $q = \frac{d^2 w}{d^2 v} = \frac{nu}{R}$; $f':q = -\frac{dv}{du} = \frac{u}{v} = \frac{q}{\sqrt{(n^2 - q^2)}}$,

$$F':q = v - \frac{u\,dv}{du} = \frac{R^2}{v} = \frac{Rn}{\sqrt{(n^2 - q^2)}};$$

daher wird ferner $f:q = \int dqf':q = C - \sqrt{(n^2 - q^2)}$,

und $F:q = \int dq\,F':q = D - Rn\,Arc\,Cos\,\frac{q}{n}$.

So erhalten wir also für die Fläche folgende zwei Gleichungen, aus denen q eliminirt werden müfste, $y = \frac{Rn - qx}{\sqrt{(n^2 - q^2)}}$ und

$$z = Cx - D + \frac{Rnq - n^2 x}{\sqrt{(n^2 - q^2)}} + Rn.\ Arc\ Cos.\ \frac{q}{n}.$$

Setzt man hier $C = D = 0$, und für q seinen Werth, so sind die Gleichungen

$$y = \frac{R^2 - ux}{\sqrt{(R^2 - u^2)}},$$

$$z = \frac{n(u - x)R}{\sqrt{(R^2 - u^2)}} + Rn.\ Arc\ Cos\ \frac{u}{R},$$

eben die beiden Gleichungen, welche die Lage der Tangente einer Schraubenlinie bestimmen, und aus denen u eliminirt werden müfste, um den geometrischen Ort aller Tangenten zu erhalten.

529. Aufgabe. Es sind zwei krumme Flächen gegeben, die von der abwickelbaren Fläche berührt werden sollen, man sucht die Gleichung für diese Fläche.

Auflösung. Wenn die eine Fläche durch eine Gleichung zwischen den Coordinaten x', y', z', die andre durch eine Gleichung zwischen x'', y'', z'' gegeben ist, und x, y, z die Coordinaten für Puncte der abwickelbaren Fläche sind: so muſs jede Berührungs-Ebne, welche jene beiden Flächen berührt, auch unsre Fläche berühren, und unsre Fläche wird die sämmtlichen graden Linien in sich enthalten, die zwischen den in derselben Berührungs-Ebne liegenden Berührungspuncten an beide gegebne Flächen gezogen sind. Beziehn wir also die oben genannten Coordinaten auf solche zusammen gehörende Puncte, so muſs (§. 259.)

$$\left(\frac{dz'}{dx'}\right) = \left(\frac{dz''}{dx''}\right) = \left(\frac{dz}{dx}\right),\ \left(\frac{dz'}{dy'}\right) = \left(\frac{dz''}{dy''}\right) = \left(\frac{dz}{dy}\right) \text{ und}$$

$$z' - x'\left(\frac{dz'}{dx'}\right) - y'\left(\frac{dz'}{dy'}\right) = z'' - x''\left(\frac{dz''}{dx''}\right) - y''\left(\frac{dz''}{dy''}\right) = z - x\left(\frac{dz}{dx}\right) - y\left(\frac{dz}{dy}\right),$$

sein. Durch die beiden Hauptgleichungen für die gegebnen Flächen und die eben gefundenen drei Gleichungen zwischen x', y', z', x'', y'', z'', werden allemal fünf dieser Gröſsen, wenn sie einer und derselben Berührungs-Ebne angehören sollen, durch die sechste bestimmt, und da dann auch für eben diese Berührungs-Ebne $\left(\frac{dz}{dx}\right) = p$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right) = q$ als $= \left(\frac{dz''}{dx''}\right)$ und $= \left(\frac{dz''}{dy''}\right)$ gegeben sind, so hat man die Gleichung derjenigen Berührungs-Ebne, die an einen bestimmten Punct der einen Fläche gelegt ist. Durch die Verbindung

Uu 2

mit ihrer Differentialgleichung kann man dann die sechste Gröſse wegschaffen, und so die Gleichung für die krumme Fläche erhalten. Wie da zugleich $f:q$ und $F:q$ in bestimmter Form hervorgehn, läſst sich leicht zeigen.

530. **Beispiel.** Ein kugelförmiger leuchtender Körper wirft seine Strahlen auf einen sphäroidischen Körper; man sucht die Gleichungen zur Bestimmung der Fläche, welche den Schatten begrenzt.

Es sei für die eine Fläche $z''^2 = R^2 - (x'' - b)^2 - y''^2$; für die andre $m^2 z'^2 = a^2 - x'^2 - y'^2$; so muſs für eine Ebne, welche beide Körper berührt,

erstlich $\left(\frac{dz'}{dx'}\right) = \left(\frac{dz''}{dx''}\right)$ oder $\frac{x'}{m^2 z'} = \frac{x'' - b}{z''}$,

zweitens $\left(\frac{dz'}{dy'}\right) = \left(\frac{dz''}{dy''}\right)$ oder $\frac{y'}{m^2 z'} = \frac{y''}{z''}$,

drittens $z' - x'\left(\frac{dz'}{dx'}\right) - y'\left(\frac{dz'}{dy'}\right) = z'' - x''\left(\frac{dz''}{dx''}\right) - y''\left(\frac{dz''}{dy''}\right)$,

oder $\frac{a^2}{m^2 z'} = \frac{R^2 + b(x'' - b)}{z''}$, sein.

Die erstern geben $x' = \frac{m^2 z'}{z''}(x'' - b)$; $y' = \frac{m^2 z'}{z''} \cdot y''$,

also $a^2 = m^2 z'^2 + \frac{m^4 z'^2}{z''^2}(R^2 - z''^2)$,

$$z'^2 = \frac{a^2 z''^2}{m^2(m^2 R^2 + (1 - m^2) z''^2)};$$

die dritte giebt $z' = \frac{a^2 z''}{m^2(R^2 + b(x'' - b))}$, und folglich

$$m(R^2 + b(x'' - b)) = a\sqrt{(m^2 R^2 - (m^2 - 1) z''^2)},$$

oder $x'' - b = \frac{-R^2}{b} + \frac{a}{mb}\sqrt{(m^2 R^2 - (m^2 - 1) z''^2)}$,

dadurch ist also ferner $y''^2 = R^2 - (x'' - b)^2 - z''^2$ durch z'' ausgedrückt, und auch x', y' könnte durch z'' ausgedrückt werden. Da nun für diejenige Berührungs-Ebne, deren Berührungspunct an der einen Fläche durch x'', y'', z'' gegeben ist,

$$z - x\left(\frac{dz''}{dx''}\right) - y\left(\frac{dz''}{dy''}\right) = z'' - x''\left(\frac{dz''}{dx''}\right) - y''\left(\frac{dz''}{dy''}\right)$$

sein soll, so ist die Lage dieser Ebne, wenn ich $\left(\frac{dz''}{dx''}\right) = p$, $\left(\frac{dz''}{dy''}\right) = q$

und $z'' - x''p - y''q = \frac{R^2 + b(x'' - b)}{z''} = W$ nenne, durch

$z - px - qy = W$, vermittelst z'' bestimmt, die Projection der Characteristik ist durch

$$x + \frac{\left(\frac{dq}{dz''}\right)}{\left(\frac{dp}{dz''}\right)} y = - \frac{\left(\frac{dW}{dz''}\right)}{\left(\frac{dp}{dz''}\right)}$$

gegeben, und derjenige Punct der Knotenfurche, welche dem durch z'' bestimmten Strahle entspricht, durch das Differential der letztern Gleichung.

Nach diesen Formeln liefse sich die Anwendung auf alle Fälle machen, die ich hier dem Leser auszuführen überlasse.

Die beschränktere Frage, welchen Einflufs auf die Dauer der Verfinsterungen der Jupiters Monde durch den Jupiter die sphäroidische Gestalt des letztern habe, hat Laplace beantwortet. Mécanique céleste. Tome IV. pag. 105.

531. Bemerkung. Wenn man sich die abwickelbare Fläche nun wirklich abgewickelt oder in eine Ebne ausgebreitet vorstellt, so entsteht die Frage, wo man jeden auf der krummen Fläche gegebnen Punct, in der Ebne wieder auffinden werde. Es scheint dieses am leichtesten zu geschehn, wenn man auf der krummen Fläche die durch den gegebnen Punct gehende Characteristik sucht, und auf ihr den Abstand des Punctes von der Knotenfurche bestimmt.

532. Lehrsatz. Wenn man eine abwickelbare Fläche in eine Ebne niederlegt, oder sie abgewickelt darstellt, so behält die abgewickelte Knotenfurche in jedem Puncte eben den Krümmungshalbmesser, der ihr als wahrer Krümmungshalbmesser auf der krummen Fläche zukam. (Fig. 99.)

Beweis. Man kann sich jede abwickelbare Fläche vorstellen als zusammengesetzt aus unendlich kleinen ebnen, durch die sich schneidenden Linien *BC*, *BE*, oder *DE*, *DG*, gebildeten Flächen, und *ABDF*, die krumme Linie, woran *BC*, *DE*, *DG* Tangenten sind, ist die Knotenfurche. Stellt unsre Figur nun die abgewickelte Fläche vor, so würde, um ihr die vorige Gestalt einer abwickelbaren krummen Fläche wieder zu geben, erfordert, dafs man die Fläche *EDG* um *ED*, die Fläche *HFG* um *FG* und so ferner drehte. Indem aber dieses geschieht beschreibt *DF* um *DE* oder um die verlängerte *BD* eine grade Kegelfläche, folglich ist der Winkel, den *BD* mit *DF* bildet, ein unveränderlicher. Dieses gilt, wenn man die Fläche als aus kleinen ebnen Theilen zusammengesetzt ansieht, für alle jene Winkel, welche durch die polygonische Knotenfurche gebildet werden,

und offenbar gilt es eben so gut, wenn man statt der aus ebnen Theilen zusammengesetzten Fläche eine krumme Fläche und statt der polygonischen Knotenfurche eine Curve annimmt. Es erhellt also, dafs diese bei der Abwickelung eben die Krümmung in einem gegebnen Puncte behält, welche sie als Knotenfurche der krummen Fläche hatte. Man kann sie daher in einer Ebne zeichnen, indem man ihr überall die gegebnen Krümmungshalbmesser giebt.

533. Aufgabe. Es ist ein Punct auf der abwickelbaren Fläche gegeben, man sucht die Lage desselben in der abgewickelten, in eine Ebne ausgebreiteten Fläche.

Auflösung. Aus dem Vorigen erhellt, wie man die durch den gegebnen Punct gehende characteristische Linie finden kann, da die Gleichung für die Fläche gegeben ist; man wird ferner die Lage des Punctes der Knotenfurche, wo eben jene Characteristik sie berührt, angeben können; und folglich, wenn man den Bogen der Knotenfurche von einem festen Anfangspuncte an rechnet, die Länge dieses Bogens bis zu jenem Puncte hin, bestimmt erhalten. Da nun zugleich die auf der Characteristik abgemessene Entfernung des gegebnen Punctes von der Knotenfurche durch diese Bestimmungen gegeben wird, so hat man Bestimmungen genug, um den gegebnen Punct in der abgewickelten Fläche wieder zu finden. Man nimmt nämlich von eben dem Anfangspuncte an, den Bogen der in der Ebne niedergelegten Knotenfurche so grofs, wie er sich vorhin fand; zieht an dem so gefundenen Puncte die Tangente, als diejenige grade Linie, in welcher nach der Abwickelung die Characteristik, auf der unser Punct liegt, sich wieder findet; und trägt den Abstand von dem Berührungspuncte so grofs auf, wie er vorhin gefunden ist: so hat man den auf der abwickelbaren krummen Fläche gegebnen Punct auf der abgewickelten Fläche oder in der Ebne.

534. Diese Anleitung mag hier, da der Raum keine vollständige Ausführung gestattet, hinreichen. Einige merkwürdige Folgerungen findet man in Lacroix Traité du calcul diff. et integr. Tome. I. §. 360. ff. und in den Mémoires présentés à l'Institut de France Tome I. II.

10. *Von der Fläche, deren beide Krümmungshalbmesser in jedem Puncte gleich grofs, aber von entgegengesetztem Zeichen sind.*

535. Aufgabe. Die Differentialgleichung dieser Fläche zu finden.

Auflösung. Die Krümmungshalbmesser einer Fläche wurden in §. 314. durch

$$\frac{hk}{2g} \pm \frac{k}{2g}\sqrt{(h^2 - 4gk^2)}$$

ausgedrückt; sollen sie also allemal beide gleich, aber von entgegengesetztem Zeichen sein, so muſs $hk = 0$ sein; aber hier war

$$k^2 = 1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 = 1 + p^2 + q^2,$$

$$h = 2\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) - \left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) - \left(1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$$

oder $h = 2pq\cdot ſ - (1+p^2)\,t - (1+q^2)\,r$,

wenn $p, q, r, ſ, t$, ihre vorige Bedeutung behalten, und es muſs also $h = 0$ sein, da offenbar k nicht $= 0$ sein kann. Es ist also

$$0 = (1+q^2)\,r - 2pqſ + (1+p^2)\,t,$$

die Differentialgleichung des zweiten Grades für unsre Fläche.

536. **Aufgabe.** Die characteristische Linie dieser Fläche zu bestimmen.

Auflösung. Nach der in §. 509. erklärten Methode würde man für sie

$$(1+q^2)\,dy^2 + 2pq\,dx\,dy + (1+p^2)\,dx^2 = 0$$

und daraus $$\frac{dy}{dx} = \frac{-pq}{1+q^2} + \frac{\sqrt{(-1-p^2-q^2)}}{1+q^2}$$

erhalten. Aber für die characteristische Linie muſs, da sie auf der krummen Fläche liegt, auch die für diese gegebene Gleichung gelten, und aus der Verbindung beider Gleichungen geht also eine neue Gleichung für die Characteristik hervor.

Da nun $dp = r\,dx + ſ\,dy$, $dq = ſ\,dx + t\,dy$ ist, so erhält man die ursprünglich gegebne Gleichung durch

$$0 = (1+q^2)\frac{dp}{dx} + (1+p^2)\frac{dq}{dy} - \frac{ſ}{dx\,.\,dy}\{(1+q^2)dy^2 + 2pq\,dx\,dy + (1+p^2)dx^2\}$$

dargestellt, und es muſs also zugleich auch

$$(1+q^2)\frac{dp}{dx} + (1+p^2)\frac{dq}{dy} = 0,$$

oder $-pq\,dp + (1+p^2)\,dq + dp\sqrt{(-1-p^2-q^2)} = 0,$

das ist $(1+q^2)\,dp^2 - 2pq\,dp\,dq + (1+p^2)\,dq^2 = 0,$

sein, für alle Puncte der Characteristik. Diese Gleichung läſst sich integriren mit Hülfe einer neuen Differentiirung, bei welcher man, da p eine Function von q ist, dq als unveränderlich annehmen darf, und dann erhält

$0 = d^2p \,.\, (dp + q^2\,dp - pq\,dq)$; — eine Gleichung, die neben einer besondern Auflösung *), als eigentliches Integral

$$dp = a\,dq, \text{ und folglich}$$
$$a^2(1 + q^2) - 2apq + (1 + p^2) = 0$$
oder $$p - aq = \sqrt{(-1 - a^2)},$$

giebt. Aber wegen des doppelten Werthes und der Unbestimmtheit der constanten Gröſse a, kann man eben so gut

$$p - bq = -\sqrt{(-1 - b^2)},$$

setzen, und diese Gleichungen sind die, welche für die beiden characteristischen Curven gefunden werden.

Sie stellen diese Curven als unmöglich dar, und deuten dadurch an, daſs die Frage, wie man auf der Fläche fortgehn müsse, um auf der Characteristik zu bleiben, hier gar nicht statt finde, oder daſs es nicht eine solche Folge übereinstimmender Linien gebe, wie wir sie uns bei allen solchen Flächen glauben denken zu dürfen. (§. 509.)

537. Wir hätten eben diesen Schluſs schon aus der ersten für die Characteristik gefundenen Gleichung herleiten können; denn indem diese

$$(1 + q^2)dy^2 + 2pq\,dx\,dy + (1 + p^2)\,dx^2 = 0,$$
oder $$dx^2 + dy^2 + (p\,dx + q\,dy)^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$$

gab, zeigt sie an, daſs für die anzugebende Characteristik $dx = 0$, $dy = 0$, $dz = 0$, sein muſs, weil auf keine andre Weise jener Gleichung Genüge geschehen kann; sie zeigt also an, daſs man von dem Puncte, von welchem aus wir die Characteristik zu verfolgen gedachten, gar nicht fortgehn dürfe, oder daſs es keine solche durch diesen Punct gehende Linie gebe, die wir als eine, ihrer Natur nach dieselbe bleibende, und vielleicht nur bei veränderter Stellung ihren Parameter ändernde, Curve, die durch ihre Bewegung die Fläche beschriebe, ansehn dürften. Monge zieht daher den Schluſs, daſs man die Fläche als durch die Bewegung eines Punctes entstehend ansehn müsse.

538. Aus den beiden Gleichungen für p und q folgt

$$(b - a)p = b\sqrt{(-1 - a^2)} + a\sqrt{(-1 - b^2)},$$
$$(b - a)q = \sqrt{(-1 - a^2)} + \sqrt{(-1 - b^2)},$$

und auch $a = \dfrac{pq + \sqrt{(-1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2}$ und $b = \dfrac{pq - \sqrt{(-1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2}$.

In diesen beiden letzten Ausdrücken sind die Gröſsen angegeben, von denen die unbestimmten Functionen abhängen müssen, womit aber noch nicht die Integration so leicht zu übersehn ist.

*) Diese verdient aber keine weitere Berücksichtigung, da, wenn man aus $dp(1 + p^2) - pq\,dq = 0$, den Werth $dp = \frac{pq\,dq}{1 + q^2}$, in die Gleichung $(1 + q^2)\,dp^2 - 2pq\,dp\,dq + (1 + p^2)\,dq^2 = 0$, setzt $1 + p^2 + q^2 = 0$ folgen würde, was unmöglich ist.

539. **Aufgabe.** Das Integral der Gleichung
$0=(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t$ zu finden.

Auflösung. Da sich aus dem Vorigen übersehn läſst, daſs x, y, z, Functionen der zwei Gröſsen a, b sind, so würde es nach **Monge's** allgemeiner Methode angemessen sein, die Differentiale $\left(\frac{dx}{da}\right)$, $\left(\frac{dx}{db}\right)$ u. s. w. in die Rechnung einzuführen, um aber die dabei erforderliche, höchst weitläuftige Rechnung zu vermeiden, will ich sogleich versuchen

$$x=a+b \quad \text{und} \quad y=F:a+f:b$$

zu setzen, und sehn ob sich alsdann ein der Gleichung Genüge thuendes Resultat für z ergiebt. *) Wir erhalten also, indem wir nun a und b als die unabhängigen veränderlichen Gröſsen behandeln,

$$\left(\frac{dx}{da}\right)=\left(\frac{dx}{db}\right)=1;\ \left(\frac{dy}{da}\right)=F':a;$$

$\left(\frac{dy}{db}\right)=f':b;$ und da nun

$$dz=\left(\frac{dz}{da}\right)da+\left(\frac{dz}{db}\right)db,$$ offenbar durch

$$\left(\frac{dz}{da}\right)=\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dx}{da}\right)+\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dy}{da}\right)=p+q\,F':a,$$

$$\left(\frac{dz}{db}\right)=\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dx}{db}\right)+\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dy}{db}\right)=p+q f':b,$$

ausgedrückt wird, so ist $p=\dfrac{\left(\frac{dz}{da}\right)f':b-\left(\frac{dz}{db}\right)F':a}{f':b-F':a}$

$$q=\frac{\left(\frac{dz}{da}\right)-\left(\frac{dz}{db}\right)}{-f':b+F':a}.$$

Nun ist ferner $\left(\frac{d^2z}{da^2}\right)=\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left(\frac{dx}{da}\right)^2+2\left(\frac{d^2z}{dx.dy}\right)\left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{dy}{da}\right)+\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\left(\frac{dy}{da}\right)^2$

$$+\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{d^2x}{da^2}\right)+\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{d^2y}{da^2}\right),$$

oder $\left(\frac{d^2z}{da^2}\right)=r+2s\,.\,F':a+t(F':a)^2+q\,F'':a;$

*) Die ganz allgemein ausgeführte Rechnung kann man in Lacroix Traité du calc. int. §. 734. finden.

und, wie sich leicht übersehen läſst:

$$\left(\frac{d^2 z}{da\,db}\right) = r + s\,\{F':a + f':b\} + t\,.\,F':a\,.\,f':b;$$

$$\left(\frac{d^2 z}{db^2}\right) = r + 2s\,.\,f':b + t\,(f':b)^2 + q\,f'':b;$$

und daraus

$$r = \frac{\left(\frac{d^2 z}{da^2}\right)(f':b)^2 - 2\left(\frac{d^2 z}{da\,db}\right)F':a.f':b + \left(\frac{d^2 z}{db^2}\right)(F':a)^2 - q\,\{(F'':a(f':b)^2 + f'':b(F':a)^2\}}{(F':a - f':b)^2}$$

$$s = \frac{-\left(\frac{d^2 z}{da^2}\right)f':b + \left(\frac{d^2 z}{da\,db}\right)\{F':a + f':b\} - \left(\frac{d^2 z}{db^2}\right)F':a + q\,\{F':a.f'':b + f':b.F'':a\}}{(F':a - f':b)^2}$$

$$t = \frac{\left(\frac{d^2 z}{da^2}\right) - 2\left(\frac{d^2 z}{da\,db}\right) + \left(\frac{d^2 z}{db^2}\right) - q\,\{F'':a + f'':b\}}{(F':a - f':b)^2}.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0,$$

so ergiebt sich

$$0 = \left(\frac{d^2 z}{da^2}\right)\left\{(f':b)^2 + 1 + \left(\frac{dz}{db}\right)^2\right\}$$

$$- 2\left(\frac{d^2 z}{da\,db}\right)\left\{1 + F':a.f':b + \left(\frac{dz}{db}\right)\left(\frac{dz}{da}\right)\right\}$$

$$+ \left(\frac{d^2 z}{db^2}\right)\left\{1 + (F':a)^2 + \left(\frac{dz}{da}\right)^2\right\}$$

$$- q\,\left\{F'':a + f'':b + F'':a(f':b)^2 + f'':b(F':a)^2 + f'':b.\left(\frac{dz}{da}\right)^2 + F'':a\left(\frac{dz}{db}\right)^2\right\}$$

Diese Gleichung findet statt, wenn

$$1 + (f':b)^2 + \left(\frac{dz}{db}\right)^2 = 0,$$

$$1 + (F':a)^2 + \left(\frac{dz}{da}\right)^2 = 0,$$

und $\left(\frac{d^2 z}{da.\,db}\right) = 0$ ist.

Vermöge der letzten Gleichung müſste also $z = \phi:a + \psi:b$ sein; aber vermöge der beiden ersten

$$\varphi' : a = \surd \{-1 - (F' : a)^2\},$$
$$\psi' : b = \surd \{-1 - (f' : b)^2\}.$$

Damit ist nun freilich in den drei Gleichungen

$$x = a + b; \quad y = F : a + f : b$$

und $z = \int da . \surd \{-1 - (F' : a)^2\} + \int db \surd \{-1 - (f' : b)^2\}$

das verlangte Integral gefunden *), aber es erhellt nur nicht, welchen Gebrauch man irgend von diesem Integral machen soll, da die Ausdrücke alle auf unmögliche Formen führen.

540. Bemerkung. Dieses Integral könnte zu der Meinung verleiten, dafs es gar keine solche Fläche gebe; aber dafs man darin irren würde, ergiebt sich aus andern Betrachtungen, die ich sogleich (nach Monge) anführen will. Es scheint mir daher dieses Integral, an dessen Richtigkeit nicht zu zweifeln ist, einen Beweis zu geben, dafs unsre Methoden in Fällen dieser Art noch einer grofsen Erweiterung bedürfen, oder dafs es gewifs möglich sein mufs, (wie wir das ja bei andern Gröfsen, die wir in der Form unmöglicher Ausdrücke zu entwickeln, aber auch in ihrer wahren, brauchbaren Form darzustellen, im Stande sind, sehr oft finden,) durch ein auf anderm Wege gefundenes und in einer möglichen Form ausgedrücktes Integral eben das in einem verständlichen und brauchbaren Ausdrucke darzustellen, was hier unter den unmöglichen Formen versteckt ist.

541. Bemerkung. Da das Integral auf keine Methode führt, um die Entstehung der gesuchten Fläche nachzuweisen, so giebt Monge folgende, aus der für sie angenommenen Haupt-Eigenschaft entlehnte Construction an.

Es sei (Fig. 92.) eine ganz willkürliche, doppelt gekrümmte Curve ABC angenommen, und man stelle sich vor, dafs eine grade Linie sich so fortbewege, dafs sie immer jene Curve berühre, und folglich eine abwickelbare Fläche beschreibe, deren Knotenfurche jene Curve ist. Irgend ein Punct der Tangente durchläuft, während sie sich, jene Curve berührend und abwickelnd fortbewegt, eine Curve DEF, deren Normale EB in jedem Puncte B mit jener Tangente BE zusammenfällt, und diese zweite Curve DEF ist eine durch Abwickelung jener ersten entstandene.

*) Sehr verschiedene von Monge, Legendre und andern vorgeschlagene Integrations-Methoden geben alle dasselbe Resultat; man findet die Untersuchungen darüber zusammengestellt in Lacroix Traité du calcul integr. §. 772.

Diese zweite Curve DEF werden wir sogleich als die eine Krümmungslinie unsrer Fläche kennen lernen, und ihre Krümmungs-Mittelpuncte A, B, C liegen, da sie eine abwickelnde ist, auf der ersten Curve ABC.

Man verlängere nun jede Normale BE der zweiten Curve so weit bis G über sie hinaus, daſs diese Verlängerung dem zwischen der ersten und zweiten Curve abgeschnittenen Stücke der Normallinie, das ist, dem Krümmungshalbmesser der zweiten Curve an jeder Stelle, gleich sei, und nehme den so bestimmten Endpunct G als zweites Centrum, oder als zweiten Krümmungs-Mittelpunct unsrer Fläche an, während der erste Krümmungs-Mittelpunct B auf jener ersten Curve liegt. Auf diese Weise bestimmt man zu einer ganzen Folge von Puncten, D, E, F, die nämlich auf der durch Abwickelung entstandenen Curve liegen, beide Krümmungsmittelpuncte, nämlich A, H für den Punct D; B, G für den Punct E; C, I für den Punct F; und wenn man sich um die ganze Reihe der zweiten Mittelpuncte mit dem richtigen, eben bestimmten Halbmesser Kreise, wie EK, beschrieben denkt, deren Ebne allemal durch die Normallinie der zweiten Curve gelegt, und senkrecht gegen die Richtung dieser zweiten Curve DEF ist, so bilden die unendlich kleinen Bogen Ee dieser Kreise, die zunächst an jener zweiten Curve anliegen, einen unendlich schmalen Streifen unsrer Fläche.

Um von diesem unendlich schmalen Streifen zu dem nächsten überzugehn, dient nun folgende Ueberlegung.

Wenn man auf dem Umfange eines solchen Kreises (der der erste heiſsen mag) einen unendlich kleinen Bogen Ee von der ersten Krümmungslinie an nimmt, und nach dem Endpuncte e den Radius vom zugehörigen Mittelpuncte G zieht, und nun auf dem unendlich nahen zweiten Kreise, dessen Mittelpunct in g liegt, bis zu dem Radius fortgeht, der mit diesem Ge in einer Ebne liegt, so ergiebt sich ein unendlich nahe bei der ersten Curve liegender Durchschnittspunct L dieser Radien; nimmt man ebenso auf dem dritten Kreise den Punct der mit dem zweiten Radius und dem dritten Mittelpuncte in einer Ebne liegt, so haben wieder dieser zweite und dritte Radius einen Durchschnittspunct gemein; und es wird so durch diese Radien eine neue abwickelbare Fläche dargestellt, auf deren Knotenfurche sich die sämmtlichen Durchschnittspuncte dieser Radien befinden. Diese der ersten willkürlich angenommenen Curve unendlich nahe liegende Knotenfurche aLc, bietet nun durch ihre Abwickelung abermals eine der vorigen Krümmungslinie DEF unendlich nahe Curve dar, von welcher man eben so zu einer folgenden fortschreiten kann.

So unbequem allerdings diese Construction ist, so hat sie doch den Vorzug, das Problem, eine solche Fläche darzustellen, als auflösbar nachzuweisen und es in voller Allgemeinheit zu umfassen, da sie von einer ganz

willkürlichen Curve ausgeht, und also zwei ganz unbestimmte Functionen, welche die beiden Projectionen dieser Curve darstellen, willkürlich anzunehmen erlaubt, wie es die Differentialgleichung des zweiten Grades fordert.

542. Aufgabe. Das Integral unsrer Gleichung

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0,$$

durch eine Reihe darzustellen.

Auflösung. Wenn man*) versucht, dem Werthe von z eine nach den Potenzen von y geordnete Form zu geben, wo die Coefficienten dieser Potenzen nicht mehr von y abhängen, und daher

$$z = X + X'y + X''y^2 + X'''y^3 + X^{\text{IV}}y^4 + \text{etc. setzt,}$$

so wird
$$p = \frac{dX}{dx} + y\frac{dX'}{dx} + y^2\frac{dX''}{dx} + y^3\frac{dX'''}{dx} + \text{etc.}$$

$$q = X' + 2y X'' + 3y^2 X''' + 4y^3 X^{\text{IV}} + \text{etc.}$$

$$r = \frac{d^2X}{dx^2} + y\frac{d^2X'}{dx^2} + y^2\frac{d^2X''}{dx^2} + y^3\frac{d^2X'''}{dx^2} + \text{etc.}$$

$$s = \frac{dX'}{dx} + 2y\frac{dX''}{dx} + 3y^2\frac{dX'''}{dx} + 4y^3\frac{dX^{\text{IV}}}{dx} + \text{etc.}$$

$$t = 2X'' + 2.3.yX''' + 3.4.y^2X^{\text{IV}} + 4.5.y^3X^{\text{V}} + \text{etc.}$$

so dafs unsre Gleichung, wenn wir sogleich jeden Coefficienten einer bestimmten Potenz von y gleich Null setzen, giebt:

$$0 = (1+X'^2)\frac{d^2X}{dx^2} - \frac{2X'dX.dX'}{dx^2} + X''.2\left(1+\frac{dX^2}{dx^2}\right);$$

$$0 = 4X'X''\frac{d^2X}{dx^2} + (1+X'^2)\frac{d^2X'}{dx^2} - \left(\frac{2X'dX'^2}{dx^2}\right)$$
$$-4\frac{X'dXdX''}{dx^2} + 2.3.X'''\left(1+\frac{dX^2}{dx^2}\right)$$

und so ferner.

Hier bestimmen sich allerdings X'', X''' und die folgenden aus den gänzlich willkürlich bleibenden X und X', und so fern ist die Reihe nicht nur der Entwickelung fähig, sondern auch ein vollkommenes Integral, das zwei unbestimmte Functionen enthält; aber seine Brauchbarkeit ist sehr geringe, weil es nur dann anwendbar ist, wenn y für alle Puncte der Fläche einen so kleinen Werth behält, dafs man die folgenden Glieder weg-

*) wie Lagrange es für eine andre Gleichung in seiner mécanique analytique. Seconde Partie. Sect. 8. §. 23. gethan hat.

lassen könnte, was um so weniger mit Sicherheit geschehen kann, da es schwer zu bestimmen ist, in welchem Maafse die folgenden durch X'', X''', X^{IV} bezeichneten Functionen wachsen mögen. Um es anzuwenden, müfste man wohl DEF (Fig. 92.) so annehmen, dafs für sie y immer höchst klein bliebe, und so liefse sich wenigstens einige Anwendung dieser Reihe denken.

543. Bemerkung. Die Fläche, zu deren Bestimmung diese Untersuchungen dienen sollten, ist noch in einer andern Hinsicht merkwürdig. Nimmt man nämlich eine ganz willkürliche Begrenzungslinie an, und fragt nach der Fläche, die diese Begrenzungslinie in sich enthält, und deren dadurch eingeschlossener Flächen-Raum zugleich ein Kleinstes ist, so kömmt man auf eben diese Differentialgleichung. —

Läge die ganze Begrenzungslinie in einer Ebne, so versteht sich, dafs auch die Fläche eine Ebne wird, also eine Fläche, deren sämmtliche Krümmungshalbmesser durch $\pm\infty$ ausgedrückt werden, und die so fern allerdings die Eigenschaft hat, welche wir zu Anfang forderten.

Siebenter Abschnitt.

Von den Grenzflächen, die durch besondre Auflösungen der Differentialgleichungen bestimmt werden.

544. Bemerkung. Obgleich sich uns in den vorigen Untersuchungen schon mehrere Fälle dargeboten haben, wo zu einem ganzen Systeme von Flächen Umhüllungsflächen gefunden wurden, so verdienen dennoch diese Grenzflächen noch eine nähere Betrachtung. Zuerst erhellt schon, dafs jene Umhüllungsflächen keinesweges auf eine solche Weise einzeln da stehn, wie es für die aus besondern Auflösungen hergeleiteten Grenzlinien (§. 184.) der Fall war, sondern dafs die Integrale, die uns ihre Natur angaben, vielmehr als die wahren und allgemeinen Integrale angesehn werden mufsten, und es ist daher nöthig, hier die Frage, wie jene sich von den durch besondre Auflösungen angegebnen Grenzflächen unterscheiden, vollständiger zu beantworten.

Ich will mich dabei auf die partiellen Differentialgleichungen des ersten Grades beschränken.

545. Bemerkung. Für jede partielle Differentialgleichung des ersten Grades zwischen drei veränderlichen Gröfsen giebt es ein Integral, das zwei willkürliche Constanten enthält, (wie §. 489. ein Beispiel zeigt,) denn wenn man für eine Function z, in welcher zwei beständige Gröfsen h und k vorkommen, beide partielle Differentiale $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ sucht, so wird man durch sie die Gröfsen h, k eliminiren und so die Differentialgleichung finden können, zu welcher der Werth von z das Integral ist. Zum Beispiel (§. 489.)

$$z^2 = a^2 - (x-h)^2 - (y-k)^2$$

giebt

$$z\left(\frac{dz}{dx}\right) = -(x-h) \text{ und } z\left(\frac{dz}{dy}\right) = -y+k,$$

also auch

$$z^2\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right) = a^2,$$

als Differentialgleichung für alle Kugeln vom Halbmesser $= a$, die ihre Mittelpuncte in der Abscissen-Ebne haben.

Aber aufser diesem Integrale, welches Lagrange das vollständige Integral nennt, kömmt jeder Gleichung mit partiellen Differentialen noch ein allgemeines Integral zu, welches eine unbestimmte Function enthalten mufs.

Denken wir uns nämlich aus jenen unzähligen Kugeln, um sogleich bei einem Beispiele stehn zu bleiben, ein bestimmtes System ausgesondert, so dafs die zu diesem gehörenden Kugeln ihre Mittelpuncte alle auf einer bestimmten Curve haben, so ist, wie wir (§. 487. u. folg.) gesehn haben, die Umhüllungsfläche dieses Systems ebenfalls in der Differentialgleichung ausgedrückt, und das Integral, welches alle diese Umhüllungsflächen darstellt, kann mit Recht, weil jenes System von Kugeln willkürlich angenommen werden konnte, ein allgemeines Integral heifsen.

In diesem allgemeinen Integrale wird die eine der beiden Constanten als Function der andern angenommen, weil wir uns ein bestimmtes System jener Flächen ausgesondert denken; aber da eine jede Function dafür angenommen werden darf, so erhellt die vollkommene Allgemeinheit dieses Integrals.

546. Die Verbindung dieses allgemeinen Integrales mit jenem vollständigen Integrale läfst sich nun so übersehen.

Es sei z durch x, y, h und k ausgedrückt, und durch diese Gleichung eine einzelne Fläche gegeben. Offenbar geht man zu einer andern Fläche eben der Art über, wenn man statt h und k andre Werthe setzt, und wenn dieser Fortgang durch unendlich kleine Aenderungen geschieht, während auch x, y, sich ändern, so wird

$$dz = \left(\frac{dz}{dx}\right) dx + \left(\frac{dz}{dy}\right) dy + \left(\frac{dz}{dh}\right) dh + \left(\frac{dz}{dk}\right) dk,$$

werden. Für jede einzelne jener Flächen galt die Differentialgleichung

$dz = \left(\frac{dz}{dx}\right) dx + \left(\frac{dz}{dy}\right) dy$; diese bleibt auch für den Uebergang auf die nächste Fläche noch gültig, wenn $\left(\frac{dz}{dh}\right) dh + \left(\frac{dz}{dk}\right) dk = 0$ ist; und die im 5ten Abschn. der ersten Abth. angestellten Betrachtungen zeigen deutlich, dafs wir auf der Umhüllungsfläche beider fortgehn, wenn wir den Fortgang der letzten Bedingungsgleichung gemäfs nehmen. Da nun aus den unzähligen Flächen schon ein System, für welches die Umhüllungsfläche gesucht wird, ausgesondert ist, so ist k durch h gegeben, und jene Bedingungsgleichung giebt folglich h durch x und y an, so dafs mit Hülfe dieses Werthes die Gröfse h aus der Hauptgleichung kann weggeschafft werden. In Beziehung auf ein System von Kugeln, so wie wir es uns eben vorhin dachten, würde die Bestimmung des h durch x, y, angeben, auf welcher Kugelfläche wir uns für ein gegebnes x und y befinden müssen, um uns auf der Umhüllungsfläche zu befinden.

547. Beispiel. Es sei in der Gleichung

$$z^2 = a^2 - (x - h)^2 - (y - k)^2,$$

$k = nh$, oder man nehme die Mittelpuncte des Systems von Kugeln in grader Linie an, so ist

$\left(\frac{dz}{dh}\right) = \frac{x-h}{z}$ und $\left(\frac{dz}{dk}\right) = \frac{y-k}{z} = \frac{y-nh}{z}$, und zugleich auch $dk = n\,dh$. Hier giebt also die Bedingungsgleichung

$$\left(\frac{dz}{dh}\right) dh + \left(\frac{dz}{dk}\right) dk = 0,$$

$$x - h + ny - n^2 h = 0,$$

also $h = \frac{x + ny}{1 + n^2}$, und man erhielte die Gleichung für die Umhüllungsfläche

$$z^2 = a^2 - \left(x - \frac{x + ny}{1 + n^2}\right)^2 - \left(y - \frac{nx + n^2 y}{1 + n^2}\right)^2$$

oder $$z^2 = a^2 - \left(\frac{n^2 x - ny}{1 + n^2}\right)^2 - \left(\frac{y - nx}{1 + n^2}\right)^2$$

als Gleichung für einen Cylinder.

548. Obgleich diese Eliminirung der Gröfse h erst statt findet, wenn man für k eine bestimmte Function von h setzt, so läfst sich doch auf einem andern Wege zeigen, dafs in unserm Beispiele das in §. 490. gefundene all-

gemeine Integral mit dem, was die Eliminirung giebt, übereinstimmt. Es soll nämlich, wenn ich $k = F:h$, also $\frac{dk}{dh} = F':h$ nenne vermöge der Bedingungsgleichung $\left(\frac{dz}{dh}\right) dh + \left(\frac{dz}{dk}\right) dk = 0$,

in unserm Falle $\frac{(x-h)}{z} + \frac{(y - F:h)}{z} . F':h = 0$, sein,

aber da zugleich $-\frac{(x-h)}{z} = \left(\frac{dz}{dx}\right) = p$ und $\frac{-(y - F:h)}{z} = \left(\frac{dz}{dy}\right) = q$,

ist, so ergiebt eben diese Bedingungsgleichung $-\frac{p}{q} = F':h$, und zugleich

$h = x + pz$, so dafs, wenn ich $h = f':\frac{p}{q}$ setze, $x + pz = f':\frac{p}{q}$, eben so wie in §. 490. gefunden wird. Aber wir haben hier auch $y + qz = F:h$, und um dies in die mit f bezeichnete Function zu übertragen, bemerke ich, dafs

aus $h = f':\frac{p}{q}$ auch folgt $dh = d.\frac{p}{q}.f'':\frac{p}{q}$,

und dafs $\int dh . F':h = F:h$, also, wenn ich für $F':h$ und dh ihre Werthe

setze, $F:h = -\int \frac{p}{q}.d.\frac{p}{q}.f'':\frac{p}{q} = -\frac{p}{q}f':\frac{p}{q} + f:\frac{p}{q}$

also auch $y + qz = -\frac{p}{q}f':\frac{p}{q} + f:\frac{p}{q}$.

Dieser Werth stimmt genau mit dem in §. 490. überein; denn da dort

$$y = \frac{z}{q} - \frac{px}{q} - \frac{a^2}{zq} + f:\frac{p}{q},$$

also $y + qz = qz + \frac{z}{q} + \frac{p^2 z}{q} - \frac{a^2}{zq} - \frac{p}{q}f':\frac{p}{q} + f:\frac{p}{q}$ war,

und $\frac{z}{q}\left(1 + p^2 + q^2 - \frac{a^2}{z^2}\right) = 0$ ist, so geht jener Werth in

$$y + qz = -\frac{p}{q}f':\frac{p}{q} + f:\frac{p}{q}$$ über.

549. **Lehrsatz.** Wenn man aus der Hauptgleichung die beiden constanten Gröfsen h und k vermittelst der beiden Gleichungen $\left(\frac{dz}{dh}\right) = 0$ und

$\left(\frac{dz}{dk}\right) = 0$, eliminirt, so erhält man eine besondre Auflösung der für z durch partielle Differentiale gegebnen Differentialgleichung, wofern nämlich die Differentialgleichung eine solche besondre Auflösung gestattet. Diese besondre Auflösung gehört einer Fläche, welche alle in dem vollständigen Integral enthaltenen Flächen berührt.

Beweis. Wenn man aus der Hauptgleichung die Werthe von $\left(\frac{dz}{dh}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dk}\right)$ sucht, und es ergiebt sich, daſs sie gleich Null gesetzt, h und k durch die veränderlichen Gröſsen ausgedrückt ergeben, so erhellt, daſs man diese Functionen von x und y in die Hauptgleichung setzen kann, ohne dadurch die Differentialgleichung in welcher bloſs $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ vorkommen, zu ändern, und der Werth für z, den man vermittelst dieser Functionen, die statt h, k gesetzt werden, erhält, ist (zufolge der Betrachtungen im 5. Abschn. der ersten Abth.) eine besondre Auflösung.

Daſs die in dieser besondern Auflösung dargestellte Fläche die in der Hauptgleichung enthaltenen Flächen berührt, und also eine Grenzfläche bildet, erhellt leicht. Nimmt man nämlich für x, y, einen bestimmten Werth an, so erhält z in dem vollständigen Integral einen verschiedenen Werth, je nachdem man h und k anders annimmt, oder einen verschiedenen Werth für jede einzelne Fläche. Werden aber beide so angenommen, wie es die durch x, y ausgedrückten Functionen, die die besondre Auflösung geben, grade für diese Werthe von x, y, fordern, so hat man einerlei Werth für z in der Fläche, welche dem vollständigen Integral und in der Fläche, welche der besondern Auflösung entspricht; überdas werden auch $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ an eben der Stelle für beide einerlei, und folglich berühren die Flächen hier einander. Da nun für jeden Werth von x und y sich eine solche Stelle angeben läſst *), so berührt die durch die besondre Auflösung ausgedrückte Grenzfläche alle in der vollständigen Integralgleichung enthaltenen Flächen.

550. Bemerkung. Die durch irgend einen einzelnen Werth der unbestimmten Function vermittelst des allgemeinen Integrals ausgedrückte Fläche berührt nur die zu diesem einzelnen Systeme gehörenden im vollständigen Integrale enthaltnen Flächen; die durch die besondre Auflösung ausgedrückte Grenzfläche berührt sie alle.

*) Für jeden Werth, wofür die Ausdrücke möglich bleiben.

551. **Beispiel.** Für die vorhin betrachteten Kugeln hatten wir

$$a^2 = z^2 + (x-h)^2 + (y-k)^2,$$

$$dz = -\frac{(x-h)}{z}dx - \frac{(y-k)}{z}dy - \frac{(x-h)}{z}dh + \frac{(y-k)}{z}dk,$$

$\left(\frac{dz}{dh}\right) = 0$, $\left(\frac{dz}{dk}\right) = 0$, gäbe also $x = h$ und $y = k$, so dafs $z = \pm a$ eine besondre Auflösung der Gleichung $1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 = \frac{z^2}{a^2}$ wäre, und das ist auch in der That der Fall, da die Differentialquotienten $= 0$ sind, wenn $z = a$ ist. Diese besondre Auflösung giebt zwei mit der Abscissen-Ebne parallele Ebnen, die in der That auch alle Kugeln vom Halbmesser $= a$, deren Mittelpuncte in der Abscissen-Ebne liegen, berühren.

551. * **Lehrsatz.** Wenn blofs eine Differentialgleichung des ersten Grades zwischen x, y, z, $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ gegeben ist, so hat diese Gleichung eine besondre Auflösung, wenn in der durch eine neue Differentiirung hervorgehenden Gleichung $P dx + Q dy + R.d.\left(\frac{dz}{dx}\right) + S d.\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0$ alle Coefficienten P, Q, R, S, zugleich verschwinden.

Beweis. Ebenso wie in §. 195. müssen die zweiten Differentiale in den Puncten, wo sie sich sowohl auf die Grenzfläche als auf die Flächen, die sich an jene anschliefsen, beziehn sollen, unbestimmt bleiben, und das findet statt, wenn alle jene Coefficienten zugleich $= 0$ werden.

552. **Beispiel.** Die Differentialgleichung

$$1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 = \frac{z^2}{a^2}, \text{ giebt}$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right).d\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)d.\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{z}{a^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)dx + \frac{z}{a^2}\left(\frac{dz}{dy}\right)dy = 0,$$

wo alle Coefficienten $= 0$ werden, wenn $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{dz}{dy}\right) = 0$, also $z = a$ ist.

553. **Aufgabe.** Die Fläche zu bestimmen, für welche die vom Anfangspuncte der Coordinaten auf jede ihrer Berührungs-Ebnen gesetzten Senkrechten alle gleich grofs werden.

Auflösung. Es sei der Punct der Fläche, an welchen die Berührungs-Ebne gelegt wird, durch x, y, z, und irgend ein Punct dieser Ebne durch u, v, w bestimmt, so ist

$$z - w = (x-u)\left(\frac{dz}{dx}\right) + (y-v)\left(\frac{dz}{dy}\right),$$

und des durch u, v, w bestimmten Punctes Abstand vom Anfangspuncte ist $= \sqrt{(u^2 + v^2 + w^2)}$, der am kleinsten wird, wenn $u\,du + v\,dv + w\,dw = 0$ ist; aber $dw = du\left(\frac{dz}{dx}\right) + dv\left(\frac{dz}{dy}\right)$,

also $\left(u + w\left(\frac{dz}{dx}\right)\right) du + \left(v + w\left(\frac{dz}{dy}\right)\right) dv = 0$, woraus

$u = -w\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $v = -w\left(\frac{dz}{dy}\right)$ also der gesuchte

kleinste Abstand $= w\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}$, das ist,

weil $w = z - (x-u)\left(\frac{dz}{dx}\right) - (y-v)\left(\frac{dz}{dy}\right)$ war, und also hier

$$w\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right) = z - x\left(\frac{dz}{dx}\right) - y\left(\frac{dz}{dy}\right),$$

der kleinste Abstand $= \dfrac{z - x\left(\frac{dz}{dx}\right) - y\left(\frac{dz}{dy}\right)}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}}$.

Dieser soll unveränderlich $= a$ sein, also für unsre Fläche

$a\sqrt{(1 + p^2 + q^2)} = z - px - qy$, wenn p, q die bekannten Werthe haben.

Das vollständige Integral dieser Gleichung ist

$z = hx + ky + a\sqrt{(1 + h^2 + k^2)}$, und enthält alle die Ebnen, deren senkrechter Abstand vom Anfangspuncte $= a$ ist.

Für das allgemeine Integral, welches sich auch auf einem ähnlichen Wege wie §. 490. finden lieſse, erhält man die Bestimmung, indem man aus $z = hx + yf:h + a\sqrt{(1 + h^2 + (f:h)^2)}$ und $\left(\frac{dz}{dh}\right) + \left(\frac{dz}{d.f:h}\right)f':h = 0$ die Gröſse h eliminirt.

Aber die Differentialgleichung giebt auch eine besondre Auflösung. Um diese zu finden, suche ich zuerst aus der Differentialgleichung

$z = px + qy + a\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}$ durch Differentiiren

$$dz = p\,dx + q\,dy = p\,dx + q\,dy + \left(x + \frac{pa}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}\right)dp + \left(y + \frac{qa}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}\right)dq$$

und setze $x + \frac{pa}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} = 0$ und $y + \frac{qa}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} = 0$,

woraus $p = \frac{xq}{y} = \frac{-x}{\sqrt{(a^2-x^2-y^2)}}$ und $q = \frac{-y}{\sqrt{(a^2-x^2-y^2)}}$ folgt, also $z = \sqrt{(a^2-x^2-y^2)}$. Dieses ist die besondre Auflösung, welche eine Kugel giebt, die offenbar alle jene Ebnen in dem Puncte berührt, wo das Perpendikel aus dem Anfangspuncte sie trifft.

Aus dem vollständigen Integral

$$z = hx + ky + a\sqrt{(1+h^2+k^2)}$$

hätten wir sie gefunden, wenn wir $\left(\frac{dz}{dh}\right) = x + \frac{ah}{\sqrt{(1+h^2+k^2)}} = 0$ und $\left(\frac{dz}{dk}\right) = y + \frac{ak}{\sqrt{(1+h^2+k^2)}} = 0$ gesetzt hätten.

554. Aehnliche Betrachtungen ließen sich nun auch bei partiellen Differentialgleichungen des zweiten Grades anstellen, wenn sie besondre Auflösungen gestatten. Vergl. Lagrange sur les integr. particulières in den Memoires de l'acad. de Berlin. 1774.

Achter Abschnitt.

Von den doppelt gekrümmten Linien, die durch eine Differentialgleichung zwischen drei veränderlichen Gröſsen dargestellt werden.

555. **Bemerkung.** Um eine Linie, die nicht in der Abscissen-Ebne liegt, durch ihre drei Coordinaten darzustellen, hat man bekanntlich zwei Gleichungen nöthig, die entweder zwei Projectionen derselben angeben, oder wenn sie beide alle drei Gröſsen enthalten, wenigstens dienen, die zusammengehörenden Werthe aller drei Coordinaten zu bestimmen. Hat man nur eine Gleichung zwischen drei Coordinaten und zwar in endlicher Form, so daſs die Differentiale nicht darin vorkommen, so ist dadurch nicht allein eine krumme Fläche bestimmt, sondern die Gleichung enthält zugleich die unzähligen graden oder krummen Linien, die sich auf eben der Fläche zeichnen lassen.

Eben das gilt noch, wenn eine gewöhnliche Differentialgleichung, die den Bedingungen der Integrabilität entspricht, zwischen den drei Gröſsen gegeben ist, denn auch da gehört zu dieser Differentialgleichung (sie mag nun eines Multiplicators bedürfen, um integrabel zu sein, oder nicht,) ein Integral, welches eine Fläche ausdrückt, und folglich wieder alle die auf dieser Fläche möglichen Linien mit in sich schlieſst. Aber unter den Differentialgleichungen zwischen drei veränderlichen Gröſsen giebt es sehr viele, die sich selbst durch einen Multiplicator nicht so integriren lassen, daſs eine einzige Gleichung ihr Integral ausdrückte; diese gehören also nicht einer Fläche, sondern es werden, wir wir jetzt zeigen wollen, ganze Classen von krummen Linien eben so durch sie ausgedrückt, wie durch die Gleichungen zwischen partiellen Differentialen ganze Classen von Flächen dargestellt werden.

556. **Bemerkung.** Wenn man allgemeine Bedingungen für krumme Linien angiebt, die nicht ausreichen, um die Curve völlig zu bestimmen, so läſst sich leicht übersehen, daſs die aus jener Bedingung hergeleiteten Gleichungen eine ganze Classe von Curven umfassen müssen, welches in endlicher Form entweder nur dadurch geschehen kann, daſs eine Gleichung für die Fläche gefunden wird, worauf sie alle sich befinden, oder dadurch daſs zwei Gleichungen gefunden werden, die irgend eine unbestimmte Function enthalten. Das letztere ist der Fall da, wo die Differentialgleichung für die Curve den gewöhnlichen Bedingungen der Integrabilität nicht entspricht. Die folgenden Untersuchungen geben Beispiele von solchen Bestimmungen.

557. **Aufgabe.** Eine allgemeine Differentialgleichung für alle Curven zu finden, in welcher eine durch Umdrehung entstandene Fläche eine conische Fläche berühren kann.

Auflösung. Die durch den Anfangspunct der x und y auf die Abscissen-Ebne gesetzte Senkrechte sei die Axe der runden Fläche, so ist für diese die Differentialgleichung (§. 451.) $y\left(\frac{dz}{dx}\right) = x\left(\frac{dz}{dy}\right)$.
Für die conischen Flächen dagegen war, (§. 440.)

$$(a-x)\left(\frac{dz}{dx}\right)+(b-y)\left(\frac{dz}{dy}\right)=(c-z).$$

In den Puncten, wo beide Flächen sich berühren, müssen nicht bloſs x, y, z für beide einerlei sein, sondern auch $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ in beiden gleiche Werthe haben; in allen Berührungspuncten ist also

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{y}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{c-z}{b-y} - \left(\frac{a-x}{b-y}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right),$$

das ist $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{x(c-z)}{y(b-y)+x(a-x)}$,

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{y(c-z)}{y(b-y)+x(a-x)},$$

daher $dz = \frac{(x\,dx+y\,dy)(c-z)}{y(b-y)+x(a-x)}$, und dieses ist eine Gleichung für alle jene Curven, in welchen eine Berührung statt finden kann.

558. Diese Gleichung entspricht den Bedingungen der gewöhnlichen Integrabilität nur dann, wenn $a=b=0$ ist, in welchem Falle die Berührungslinien Kreise würden, weil des Kegels Spitze in der Axe des runden Körpers liegt.

Für alle andere Fälle *) kann die Gleichung

$$x(c-z)(b-2y) - y(c-z)(a-2x) - x(c-z)y + xy(c-z) = 0$$

nicht statt finden, da sie nicht Null, sondern $(bx-ay)(c-z)$ giebt. Gleichwohl lassen sich die gesuchten Curven auch in allen andern Fällen finden.

559. Aufgabe. Das Integral der Gleichung $\frac{dz}{c-z} = \frac{x\,dx+y\,dy}{y(b-y)+x(a-x)}$ zu finden, oder die beiden Gleichungen anzugeben, welche alle jene Berührungslinien darstellen.

Auflösung. Um weitläuftige Formeln zu vermeiden, will ich $a=0$ setzen, wodurch die Allgemeinheit nicht wesentlich beschränkt wird, indem man nur die Abscissenlinie so annimmt, daſs die durch ihren Anfangspunct mit y parallele Ebne die Spitze des Kegels enthält.

Sehe ich dann zuerst in der Gleichung $\frac{dz}{z-c} = \frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y(y-b)}$, y als constant an, suche das Integral dieser Voraussetzung gemäſs, und füge statt der beständigen Gröſse eine Function von y bei, so ist

$$\log(z-c) = \tfrac{1}{2}\log(x^2+y^2-yb) + \log f:y,$$

oder $z-c = f:y \,.\, \sqrt{\{x^2+y^2-by\}}$.

Dieser Werth soll aber auch dann der Gleichung entsprechen, wenn y veränderlich ist; alsdann wird

*) Die Bedingungsgleichung, welche statt finden muſs, wenn das Integral von $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$, durch eine Gleichung ausgedrückt sein soll, ist:

$$P\left(\frac{dR}{dy}\right) - Q\left(\frac{dR}{dx}\right) + R\left(\frac{dQ}{dx}\right) - P\left(\frac{dQ}{dz}\right) + Q\left(\frac{dP}{dz}\right) - R\left(\frac{dP}{dy}\right) = 0.$$

$$dz = \frac{dx \,.\, x \,.\, f:y}{\sqrt{(x^2+y^2-by)}} + dy \left\{ f:y \,.\, \frac{y - \frac{1}{2}b}{\sqrt{(x^2+y^2-by)}} + f':y \,.\, \sqrt{(x^2+y^2-by)} \right\}$$

$$\frac{dz}{c-z} = \frac{x\,dx}{x^2+y^2-by} + dy \left\{ \frac{y-\frac{1}{2}b}{x^2+y^2-by} + \frac{f':y}{f:y} \right\}$$

und es soll folglich $\frac{y-\frac{1}{2}b}{x^2+y^2-by} + \frac{f':y}{f:y} = \frac{y}{x^2+y^2-by}$

oder $\frac{1}{2}b \,.\, f:y = f':y \,.\, (x^2+y^2-by)$ sein.

Diese beiden Gleichungen müssen beide statt finden, für die gesuchte Curve, die also nun, indem man entweder für $f:y$ eine willkürliche Form annähme, oder indem man diese Function aus irgend einer Bedingung bestimmte, vollständig gefunden wäre.

Zweite Auflösung. Ein andres Verfahren führt auf noch bequemere Formeln. Da die gesuchte Curve auf der durch Umdrehung entstandenen Fläche liegen muſs, so muſs die für diese Fläche geltende Formel

$x^2+y^2=F:z$ auch für sie gelten, und eben das lieſse sich aus der Differentialformel, die $dz = (z-c) \,.\, \frac{d\,.\,(x^2+y^2)}{2\,(x\,(x-a)+y\,(y-b))}$ gab, herleiten, indem sie, zufolge der oft gebrauchten Schlüsse, nur dann bestehen kann, wenn $x^2+y^2=F:z$, ist.

Aber da die Curve zugleich auf der conischen Fläche liegen soll, und diese fordert, daſs $(a-x)\left(\frac{dz}{dx}\right) + (b-y)\left(\frac{dz}{dy}\right) = z-c$, sei, jene Gleichung aber $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{2x}{F':z}$, $\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{2y}{F':z}$ giebt: so muſs

$2x\,(a-x)+2y\,(b-y)=(z-c)\,F':z$ sein, und diese beiden Gleichungen $F:z=(x^2+y^2)$; $F':z=\frac{2x\,(a-x)+2y\,(b-y)}{c-z}$

bestimmen gleichfalls unsre Curve.

560. Aufgabe. Es ist die Gleichung für eine bestimmte runde Fläche gegeben, man sucht alle Berührungslinien mit Kegelflächen, die für sie statt finden.

Auflösung. In der letzten Auflösung ist dann $F:z$ sogleich gegeben, und der Werth von $F':z$ giebt die Curve an. Diese wird für eine völlig bestimmte runde Fläche, da die Lage der Kegelspitze gegeben ist, nur eine einzige ganz bestimmte Curve, indem die ganze Folge von Ebnen, die durch die Spitze des Kegels gehend diese Fläche berühren, völlig bestimmt ist; dagegen erhält man verschiedene verwandte Curven, wenn man den constanten Gröſsen in der Gleichung für die runde Fläche andre Werthe giebt.

Daſs auch in der ersten Auflösung $f:y$ bestimmt wird, läſst sich an Beispielen leicht zeigen.

561. Beispiel. Die runde Fläche sei eine Kugel, deren Gleichung $R^2 - z^2 = x^2 + y^2$ ist. Dann giebt die zweite Auflösung $R^2 - z^2 = F:z$, und folglich $F':z = -2z = \frac{2x(a-x)+2y(b-y)}{c-z}$, oder $(c-z)z-(a-x)x+(b-y)y=0$. Die Verbindung beider Gleichungen $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$ und $0 = x^2+y^2+z^2 - ax - by - cz$ giebt $R^2 = ax + by + cz$, und zeigt, daſs die Berührungscurve eine ebne Curve ist, was auch ja bekannt genug ist, indem die von einem bestimmten Puncte ausgehenden Berührungslinien die Kugel allemal in einem Kreise berühren, dessen Ebne senkrecht auf die von der Spitze des Kegels nach dem Mittelpuncte der Kugel gezogne grade Linie ist.

Die erste Auflösung in §. 559. würde hier geben

$$z - c = f:y.\sqrt{(R^2 - z^2 - by)}, \quad \text{oder } f:y = \frac{z-c}{\sqrt{(R^2 - z^2 - by)}},$$

$$\text{also } f':y = \left(\frac{dz}{dy}\right)\left\{\frac{1}{\sqrt{(R^2-z^2-by)}} + \frac{z(z-c)}{\sqrt{(R^2-z^2-by)^3}}\right\} + \frac{\frac{1}{2}b(z-c)}{\sqrt{(R^2-z^2-by)^3}}$$

Nun aber sollte $\frac{1}{2}bf:y = f':y.(x^2+y^2-by) = f':y.(R^2-z^2-by)$ sein, und da die eben gefundenen Werthe geben $\frac{1}{2}b.f:y = \frac{\frac{1}{2}b(z-c)}{\sqrt{(R^2-z^2-by)}}$,

$$(R^2-z^2-by)f':y = \frac{\frac{1}{2}b(z-c)}{\sqrt{(R^2-z^2-by)}} + \left(\frac{dz}{dy}\right).\frac{\{R^2-z^2-by+z^2-cz\}}{\sqrt{(R^2-z^2-by)}}$$

so muſs offenbar $R^2 - by - cz = 0$ sein, und dies ist die Gleichung für die Ebne, worin die Berührungslinie liegt, nämlich eben dieselbe, die wir durch die zweite Auflösung für $a = 0$ finden.

562. Aufgabe. Die allgemeine Differentialgleichung für die Berührungslinie runder Flächen mit den durch

$$x(g-x)\left(\frac{dz}{dx}\right) + y\,(g-x)\left(\frac{dz}{dy}\right) = mgy - xz$$

ausgedrückten Flächen zu finden. (Vergl. §. 466.)

Auflösung. Für die runden Flächen war

$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{y}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right)$, und also soll $\frac{y}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{mgy - zx}{y(g-x)} - \frac{x}{y}\left(\frac{dz}{dx}\right)$, oder $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{mgxy - zx^2}{(x^2+y^2)(g-x)}$; $\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{mgy^2 - zxy}{(x^2+y^2)(g-x)}$ sein. Es wird daher $dz = \frac{(mgy-zx)(xdx+ydy)}{(g-x)(x^2+y^2)}$, die Differentialgleichung für alle diese Berührungslinien.

563. Aufgabe. Die Integralgleichungen für diese Linien zu finden.

Auflösung. Zuerst erhellt wieder, daſs $x^2 + y^2 = f:z$ sein muſs. Daraus folgt $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{2x}{f':z}$; $\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{2y}{f':z}$ und dies in die Gleichung

$(g-x)\left(x\left(\frac{dz}{dx}\right)+y\left(\frac{dz}{dy}\right)\right)=mgy-xz$ gesetzt, giebt als zweite Gleichnng für die Curve, $2(g-x)(x^2+y^2)=f':z.(mgy-xz)$.

564. Beispiel. Die runde Fläche sei eine Kugel, also $f:z=R^2-x^2$, so ist $2(g-x)(x^2+y^2)=-2z(mgy-xz)$ oder $(g-x)(x^2+y^2)=xz^2-mgyz$, die Gleichung für die Fläche, deren Durchschnittslinie mit der Kugel die Berührungslinie ist. Da $z^2=R^2-x^2-y^2$, so ist auch $g(x^2+y^2)-R^2x=-mgy\sqrt{(R^2-x^2-y^2)}$ die Gleichung für eine Projection dieser Berührungslinie. Es sei $x^2+y^2=\varrho^2$, $\frac{x}{\varrho}=Cos\,\psi$, $\frac{y}{\varrho}=Sin\,\psi$, so ist, $g\varrho-R^2\ Cos\,\psi=-mg.Sin\,\psi\sqrt{(R-\varrho^2)}$, oder $g^2\varrho^2(1+m^2\ Sin^2\,\psi)-2g\varrho R^2\ Cos\,\psi=m^2g^2R^2\ Sin^2\,\psi-R^4\ Cos^2\,\psi$, oder $\varrho=\frac{R^2\ Cos\,\psi}{g(1+m^2\ Sin^2\,\psi)}\pm\frac{\sqrt{\{g^2+m^2g^2\ Sin^2\,\psi-R^2\ Cos^2\,\psi\}}\ mR\,Sin\,\psi}{g(1+m^2\ Sin^2\,\psi)}$ eine Gleichung für die Projection der Berührungslinie auf der Abscissen-Ebne.

565. Aufgabe. Eine allgemeine Differentialgleichung für alle Curven, deren Tangenten alle gleich geneigt gegen die Abscissen-Ebne sind, zu finden, und die zwei ihr entsprechenden Integralgleichungen anzugeben.

Auflösung. Wenn $ds=\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}$ ein kleiner Bogen der Curve, und $d\sigma=\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ die Projection desselben auf die Abscissen-Ebne ist, so soll $tang\,\zeta=\frac{dz}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}=m$ eine beständige Gröſse sein, indem ζ hier den unveränderlichen Neigungswinkel der Berührungslinie bedeutet. Es ist also $dz^2=m^2(dx^2+dy^2)$ die Differentialgleichung für alle diese Curven.

Diese Gleichung giebt zuerst, wenn man y als beständig ansieht,

$$z=mx+V,$$

da aber nun

$$dz=m\,dx+dV, \quad \text{oder}$$

$$dz^2=m^2dx^2+2m\,dx\,dV+dV^2=m^2dx^2+m^2dy^2$$

werden würde, wenn man die Function V als veränderlich ansieht, so ist auch

$$dx=\frac{m\,dy^2}{2dV}-\frac{dV}{2m},$$

oder wenn $V=f:y$ ist,

$$x=\tfrac{1}{2}m\int\frac{dy}{f':y}-\frac{f:y}{2m}.$$

Diese beiden Gleichungen $z=mx+f:y$, und $x=\frac{1}{2}m\int\frac{dy}{f':y}-\frac{f:y}{m}$, enthalten also das vollständige Integral.

566. Diese Auflösung ist völlig allgemein, indefs hat sie das Unbequeme, dafs die Bestimmung der Function f, da sie unter dem Integralzeichen steht, Schwierigkeit hätte, und folgende Auflösung verdient daher gleichfalls angeführt zu werden.

Die Gleichung $dz^2 = m^2 dx^2 + m^2 dy^2$, giebt

$$1 = m^2 \frac{dx^2}{dz^2} + m^2 \frac{dy^2}{dz^2}, \text{ also } \frac{dy}{dz} = \sqrt{\left(\frac{1}{m^2} - \frac{dx^2}{dz^2}\right)},$$

folglich, wenn $\frac{dx}{dz} = a$, oder $x = az + b$ wäre,

würde $dy = dz \sqrt{\left(\frac{1}{m^2} - a^2\right)}$ und $y = z\sqrt{\left(\frac{1}{m^2} - a^2\right)} + c$,

so dafs diese beiden Gleichungen, worin a, b, c constante Gröfsen bedeuten, eine Genüge thuende Auflösung enthalten.

Diese Gleichungen können selbst dann noch der Differentialgleichung entsprechen, wenn auch a, b, c veränderlich, aber auf eine angemessene Art von einander abhängig sind. Sie geben erstlich $(x-b)^2 + (y-c)^2 = \frac{z^2}{m^2}$,

oder um alles auf b zu beziehn $(x-b)^2 + (y-f:b)^2 = \frac{z^2}{m^2}$,

und dieses ist eine Gleichung für die Oberflächen grader Kegel, deren Spitzen in der Abscissen-Ebne liegen und deren Seitenlinien eben den Winkel mit der Abscissen-Ebne machen, welchen wir bei unsrer Curve forderten. Indem man $f:b$ statt c setzt, denkt man sich eine bestimmte, aber nach Willkür angenommene Folge dieser Kegel und jede Seitenlinie aller dieser Kegel ist eine solche Linie, die der Differentialgleichung entspricht. Auch die Durchschnittslinie zweier so unmittelbar auf einander folgender Kegel thut dem Differential Genüge, und diese wird gefunden, wenn man die Gleichung

$(x-b)^2 + (y-f:b)^2 = \frac{z^2}{m^2}$, mit ihrem in Beziehung auf b genommenen Differential $(x-b) + (y-f:b)f':b = 0$ verbindet. Aber offenbar thut nun auch die Linie der gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte eben dieser Seitenlinien, oder die Knotenfurche der Fläche, in welcher alle jene Durchschnittslinien liegen, den Forderungen Genüge, und diese wird bestimmt, indem man noch zu den beiden vorigen Gleichungen das in Beziehung auf b genommene Differential der letztern $1 + (f':b)^2 - (y-f:b)f'':b = 0$, hinzufügt. Die durch diese drei Gleichungen bestimmte doppelt gekrümmte Curve ist also die gesuchte, die hier aber im einzelnen Falle dadurch bestimmt ist, dafs man die Linie kennt, in welcher die Kegelspitzen liegen.

In welcher Verbindung diese Aufgabe mit den in §. 471. u. folg. betrachteten Flächen steht, erhellt hieraus.

567. Bemerkung. Wenn man aus der allgemeinen Gleichung §. 565. die Form der Function f durch die Bedingung herleiten wollte, daſs die Linie sich auf einer gegebnen Fläche befinden solle, so würde das freilich etwas schwierig sein, aber dies wird man auch kaum nöthig haben, da die ganze Aufgabe eine völlig bestimmte ist, wenn die Fläche gegeben ist, worauf die Linie sich befinden soll.

Sollte zum Beispiel auf der Kugelfläche, deren Gleichung $z^2 = R^2 - x^2 - y^2$ ist, $dz^2 = m^2 dx^2 + m^2 dy^2$ sein, so wäre zugleich

$$dz^2 = \frac{(x dx + y dy)^2}{R^2 - x^2 - y^2} = m^2 dx^2 + m^2 dy^2,$$

und hiemit wäre eine Gleichung zwischen zwei veränderlichen Gröſsen gegeben, deren Integral sich immer bestimmen läſst.

Diese Beispiele reichen hin, um das Wesentlichste des hier behandelten Gegenstandes übersehn zu lassen; wer sich vollständiger unterrichten will, wird in Monge's Abhandlung in den Mémoires de l'Acad. de Paris pour 1784. pag. 502. mehrere Fälle betrachtet finden, die ich hier, um die Grenzen eines Lehrbuches nicht zu sehr zu überschreiten, übergehn muſs.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Inhalt.

Erster Theil.

Einleitung.

Erste Abtheilung. Untersuchung derjenigen geometrischen Bestimmungen, wo alle zu betrachtende Linien und Puncte in einer Ebne liegen.

1. Abschn. Ueber die Mittel, durch welche man aus gegebnen Formeln, grade Linien, bloſs ihrer Länge nach, ohne Rücksicht auf eine bestimmte Lage, darstellen kann. §. 1 — 14.
2. Abschn. Wie man die Lage eines Punctes gegen bekannte Linien durch Coordinaten oder durch Winkel und Abstand bestimmt, — Gleichungen für verschiedene Systeme von Coordinaten. §. 15 — 36.
3. Abschn. Bestimmung der Lage eines Punctes aus andern Bedingungen. §. 37 — 54.
4. Abschn. Von den geometrischen Oertern, oder denjenigen geometrischen Aufgaben, wo jeder Punct einer Curve den für die Lage des Punctes gegebnen Bedingungen entspricht. §. 55 — 72.
5. Abschn. Von der Eintheilung der krummen Linien in Ordnungen, und von der Linie der ersten Ordnung. §. 73 — 88.
6. Abschn. Vom Kreise. §. 89 — 107.
7. Abschn. Von der Parabel. §. 108 — 164.
8. Abschn. Von der Ellipse nnd Hyperbel. §. 165 — 276.
9. Abschn. Von den Linien der zweiten Ordnung im Allgemeinen. §. 277 — 295.
10. Abschn. Beispiele von Aufgaben, die auf Linien der zweiten Ordnung führen. §. 296 — 310.
11. Abschn. Von den unendlichen Aesten der Curven und den Asymptoten derselben. §. 311 — 361.
12. Abschn. Allgemeine Bestimmung der Tangenten der Curven, ihrer doppelten Puncte, Knoten und Spitzen. §. 362 — 386.
13. Abschn. Betrachtung einzelner Linien höherer Ordnungen. §. 387 — 548.
 1. Die Linie, deren Gleichung ist: $(z^2+x^2)^2+2a^2(z^2-x^2)=f^4-a^4$, §. 387 — 403.
 2. Die Linie, deren Gl. $z^3+x^2(b+z)-axz=0$; §. 404 — 419.
 3. Die Cissoide. §. 420 — 435.
 4. Die Linie, deren Gl. $z^4-x^4-4axz^2=0$; §. 436 — 443.
 5. Die Linie, deren Gl. $z^4+x^4-4axz^2=0$; §. 444 — 457.
 6. Die Cardioide. §. 458 — 468.
 7. Die Conchoide. §. 469 — 481.
 8. Die Linie, deren Gl. $z^2=ax\left(m-\frac{x}{b}\right)^2$, wohin eine Brennlinie der Parabel gehört. §. 481 — 488.
 9. Die Linie, deren Gleichung ist: $z(x+z)(x-z)=ax^2+bz^2+c^2z+a^3$; §. 489 — 502.
 10. Die Linien, für welche $x^{\frac{m}{n}}+z^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m}{n}}$ ist. §. 503 — 519.

11. Die Curve, welche man erhält, wenn man auf dem Radius Vector der Parabel immer gleiche Stücke von der Parabel an abschneidet. §. 520 — 529.
12. Die Curve, welche in jedem Puncte der Parabel von dieser gleich entfernt ist. §. 530 — 548.

14. Abschn. Von den gemeinschaftlichen Durchschnittspuncten zweier Curven, und der Anwendung derselben, um höhere Gleichungen durch Construction aufzulösen. §. 549 — 559.

15. Abschn. Von der Krümmung der Curven und der Bestimmung der Krümmungshalbmesser. §. 560 — 572.

16. Abschn. Von transscendenten Curven. §. 573 — 641.

1. Die Curve, deren Gl. $\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{z}}{\sqrt{b}}\right)^{\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = a\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{z}}{\sqrt{b}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}-1}$ ist, §. 574 — 579.
2. Logarithmische und Exponential-Curven. §. 580 — 590.
3. Die Spirallinien. §. 591 — 607.
4. Die Cycloide. §. 608 — 624.
5. Die Epicycloide und Hypocycloide. §. 625 — 641.

Zweite Abtheilung. Untersuchungen über die geometrischen Bestimmungen, wo nicht alle zu betrachtende Linien und Puncte in einer Ebne liegen.

1. Abschn. Bestimmung der Lage eines Punctes durch drei Coordinaten. §. 642 — 653.

2. Abschn. Ueber die Bestimmung von Linien, die nicht in der Abscissen-Ebne liegen. §. 654 — 662.

3. Abschn. Allgemeine Betrachtungen über die Bestimmung von Flächen durch Gleichungen. Untersuchung der Flächen der ersten Ordnung. §. 663 — 678.

4. Abschn. Von der Kugelfläche, Cylinderfläche und Kegelfläche und den Durchschnittslinien welche sie mit Ebnen bilden. §. 679 — 706.

5. Abschn. Von den Flächen der zweiten Ordnung im Allgemeinen. §. 707 — 743.

6. Abschn. Bestimmung der Berührungs-Ebne für krumme Flächen. §. 744 — 753.

7. Abschn. Von den Durchschnittslinien zweier krummen Flächen. §. 754 — 760.

Zweiter Theil.

Erste Abheilung. Untersuchungen über ebne Curven.

1. Abschn. Von den Tangenten der Curven, ihren Wendungspuncten, Knoten und Spitzen. §. 1 — 44.
2. Abschn. Von dem Krümmungshalbmesser, der Evolute und den durch Abwickelung entstandenen Curven. §. 45 — 78.
3. Abschn. Von der Quadratur der durch krummen Linien eingeschlossenen Flächenräume. §. 79 — 106.
Allgemeine Regeln für die Quadratur, wenn die Formeln keine bequeme Integration zulassen. §. 85 — 103.
4. Abschn. Von der Rectification krummer Linien. §. 107 — 137.
Vergleichung zwischen verschiedenen auf der Lemniscata, der Ellipse und Hyperbel abgeschnittenen Bogen. §. 116 — 137.
5. Abschn. Bestimmung krummer Linien aus Eigenschaften, die zu Differentialgleichungen führen.
1. Differentialgleichungen vom ersten Grade. §. 138 — 157.
2. Differentialgl. vom zweiten Grade. §. 158 — 169.
3. Curven, die in der Statik und Mechanik vorkommen. §. 170 — 183.
6. Abschn. Von den Grenzcurven. §. 184 — 218.
7. Abschn. Von den Trajectorien und einigen andern Curven, die mit gegebnen Curven in einer bestimmten Beziehung stehn.
1. Von den Trajectorien. §. 219 — 237.
2. Andre Curven, die in jedem Puncte mit gegebnen Curven in bestimmter Beziehung stehn. §. 238 — 242.

Zweite Abtheilung. Untersuchungen über krumme Flächen und doppelt gekrümmte Linien.

1. Abschn. Ueber die Bestimmung der Berührungs-Ebnen krummer Flächen. §. 243 — 262.
Ueber die gröſsten und kleinsten Werthe der Ordinaten. §. 263 — 268.
Ueber die Asymptoten krummer Flächen. §. 269 — 293.
Von den doppelten Puncten krummer Flächen. §. 294 — 307.
2. Abschn. Von der Krümmung der Flächen, den Krümmungslinien auf denselben, und ihren Krümmungshalbmessern. §. 308 — 332.

3. Abschn. Von den doppelt gekrümmten Linien. §. 333 — 397.
Nähere Betrachtung einzelner Curven.
1. Die loxodromische Linie. §. 364 — 374.
2. Die auf der Kugel beschriebene Cycloide. §. 377 — 393.
3. Die kürzeste Linie auf der Fläche des graden Kegels. §. 394 — 397.
4. Abschn. Von der Bestimmung des Inhalts der durch krumme Flächen begrenzten Räume. §. 399 — 413.
5. Abschn. Von der Quadratur krummer Flächen. §. 414 — 425.
6. Abschn. Bestimmung der Flächen durch Eigenschaften, die zu Differentialgleichungen führen. §. 427 — 543.
1. Von den cylindrischen Flächen. §. 427 — 438.
2. Von den conischen Flächen. §. 439 — 447.
3. Von den durch Umdrehung entstehenden Flächen. §. 448 — 453.
4. Von den krummen Flächen, die durch Bewegung einer graden Linie entstehen, wenn diese immer eine bestimmte Axe schneidet, und mit ihr immer gleiche Winkel macht. §. 454 — 464.
5. Von den Flächen, die von einer graden Linie beschrieben werden, welcher zwei grade Linien als Richtungslinien dienen. §. 465 — 470.
6. Von den Flächen, deren Berührungs-Ebnen alle unter gleichen Winkeln gegen die Abscissen-Ebne geneigt sind. §. 471 — 486.
7. Von der Umhüllungsfläche einer Folge von Kugeln, deren Mittelpuncte auf einer willkürlich gegebenen Linie liegen. §. 487 — 501.
8. Von den Flächen, deren Differentialgleichung ist: $\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = c^2 \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)$. §. 502 — 515.
9. Von den abwickelbaren Flächen. §. 516 — 534.
10. Von den Flächen, deren beide Krümmungshalbmesser in jedem Puncte gleich grofs, aber einander entgegengesetzt sind. §. 535 — 543.
7. Abschn. Von den Grenzflächen, die durch besondre Auflösungen der Gleichungen mit partiellen Differentialen bestimmt werden. §. 544 — 554.
8. Abschn. Von den doppelt gekrümmten Linien, die durch eine Differentialgleichung zwischen drei veränderlichen Gröfsen dargestellt werden. §. 555 — 567.

Druckfehler.

S. 3. Z. 4. soll $\frac{ax}{z}$ stehn.

Z. 20. lese man: $+$ statt: $\times$

S. 4. Z. 1. l.: $\frac{a^3\,dx}{x^3\sqrt{\left(\frac{a^2}{x^2}-1\right)}}$.

S. 6. Z. 4. l.: $-2xz$.

S. 8. Z. 9. l: 2, statt: 3.

S. 10. Z. 2. v. u. l.: und da also, wo $x =$

S. 11. Z. 8. l.: $0,1353\,.\,a = a\,.\,e^{-2}$.

S. 32. Z. 12. l.: $a^4(b^2 - z^2) - b^4 x^2$.

S. 36. Z. 13. l.: a, statt: u.

S. 44. Z. 9. l: Wenn BED.

S. 49. Z. 6. l.: $\frac{5}{2}wf^2 + \frac{3}{2}w^2 f^2$.

S. 62. Z. 7. l.: $-\frac{1}{2}w'^2$ statt: $+\frac{1}{2}w'^2$.

S. 63. letzte Z. l.: $\frac{u}{144}$.

S. 78. letzte Z. l: u^3 statt: x^3.

S. 88. Z. 13. l.: b, giebt

Z. 5. v. u. l.: $\sqrt{(f^2 - z^2)}\,dz$

S. 114. Z. 14. muſs die eine Formel: $h\int\sqrt{(dx^2 + dz^2)} = hf$ weggestrichen werden.

Z. 5. v. u. l.: $\left(ds - d.\left((x+h)\frac{dx}{ds}\right)\delta x\right.$.

S. 136. Z. 13. l.: $\frac{z^2}{v^2} - \frac{2z}{v} =$

S. 137. Z. 14. l.: $(wz - p)^2$

S. 141. Z. 21. l.: $= -2z\,d^2x\,dz$.

S. 147. Z. 6. v. u. l.: v^3 statt: v.

S. 154. Z. 9. l.: wenn statt: von

S. 162. Z. 11. l.: indem n und ϕ

S. 177. Z. 5. v. u. l.: Fläche; also.

S. 181. Z. 18. l.: $r^4 c'^2$ statt: $r^4 c'$.

S. 197. Z. 1. muſs sich die Parenth. vor f schlieſsen.

S. 205. Z. 5. v. u l.: $-\frac{1}{m}(u - x) - \frac{z}{mb}(v - y)$.

S. 206. Z. 13. fehlt im letzten Gliede der Factor x.

S. 217. Z. 3. l.: $-\frac{x^2}{nz^3}$.

S. 238. Z. 16. l.: $(u - x)\,dx\,d^2z$.

S. 247. Z. 19. l.: α statt: x.

S. 251. Z. 9. l.: $\frac{1}{3}\Phi^2$ und $\frac{\Phi}{\sqrt{3}}$

S. 254. Z. 8. l.: $Cos^2 m\Phi$

S. 256. Z. 10. l: $Cotang^2.\alpha$.

S. 259. Z. 8. v. u. l.: Wd statt: ad.

S. 275. letzte Z. l.: y^2.

S. 285. Z. 5. v. u. l.: b statt: l.

S. 307. Z. 3. l.: $-P\sqrt{\left(m^2-\left(\frac{dz'}{dx'}\right)^2\right)}$.

S. 315. Z. 4. v. u. l. $\frac{a^2\,dq}{z\,q^2}$.

S. 321. Z. 15. l. $\left(\frac{dz}{dx}\right)^2$.

S. 325. Z. 22. l. jenen

S. 330. Hier ist in §. 315. ein Rechnungsfehler im Manuscr. unbemerkt geblieben. Um die Folgen desselben zu beseitigen, ist es am besten die erste Gleichung (in d. 7. Zeile) so umzuändern:

$$y\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)-x\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right)-(x-y)\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right)=\frac{2}{b}\left(\frac{x^2+y^2}{x+y}\right)+\left(\frac{y-x}{y+x}\right)\left(\left(\frac{dz}{dx}\right)+\left(\frac{dz}{dy}\right)\right)$$

dann bleiben die übrigen Schlüsse und das zuletzt gefundene Integral richtig, nur muſs der Gang der Rechnung für U etwas abgeändert werden.

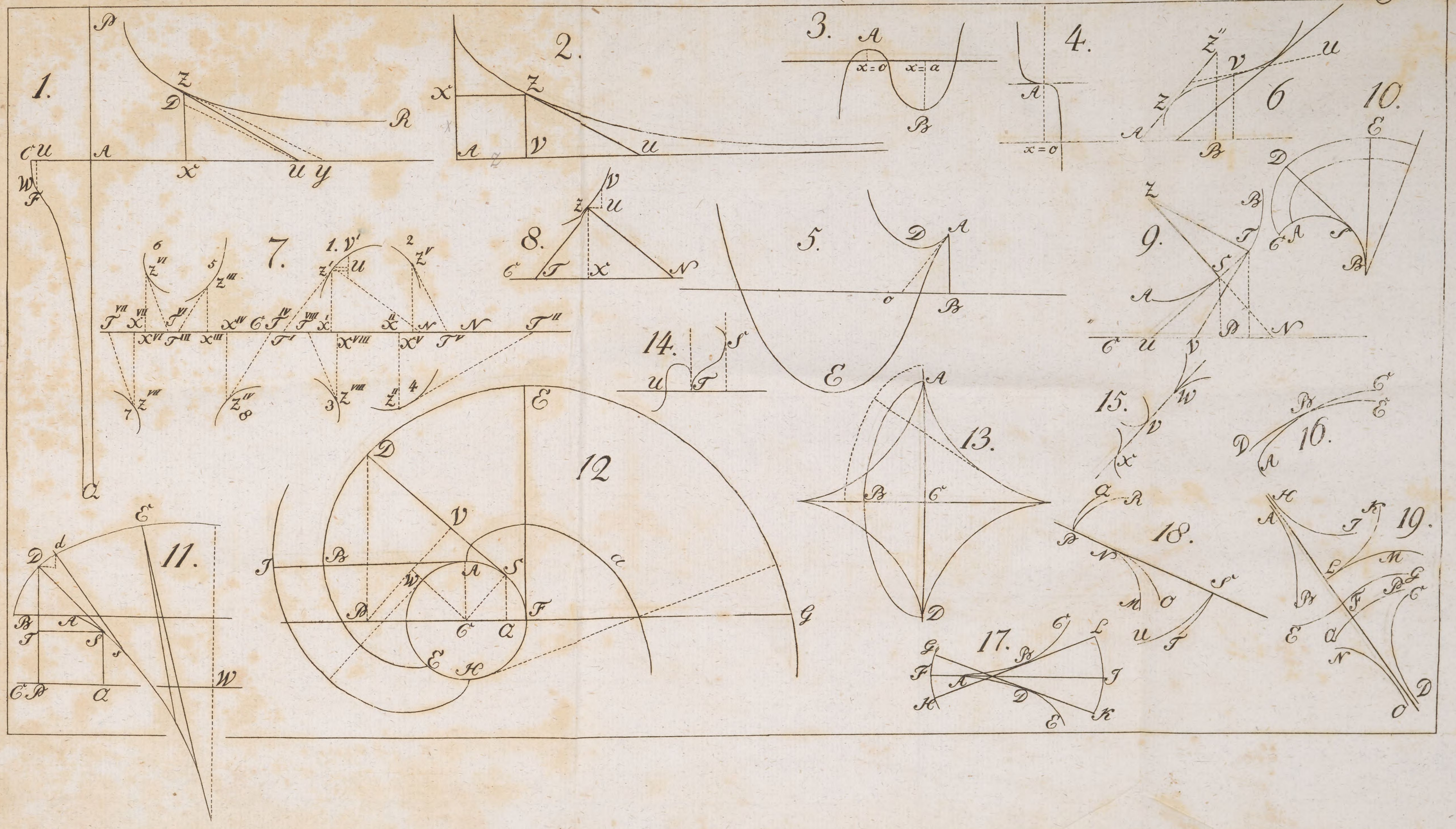
S. 355. Z. 3. l. $+\frac{(x-h)}{z}dh$.

S. 362. Z. 3. l. R^2-z^2.

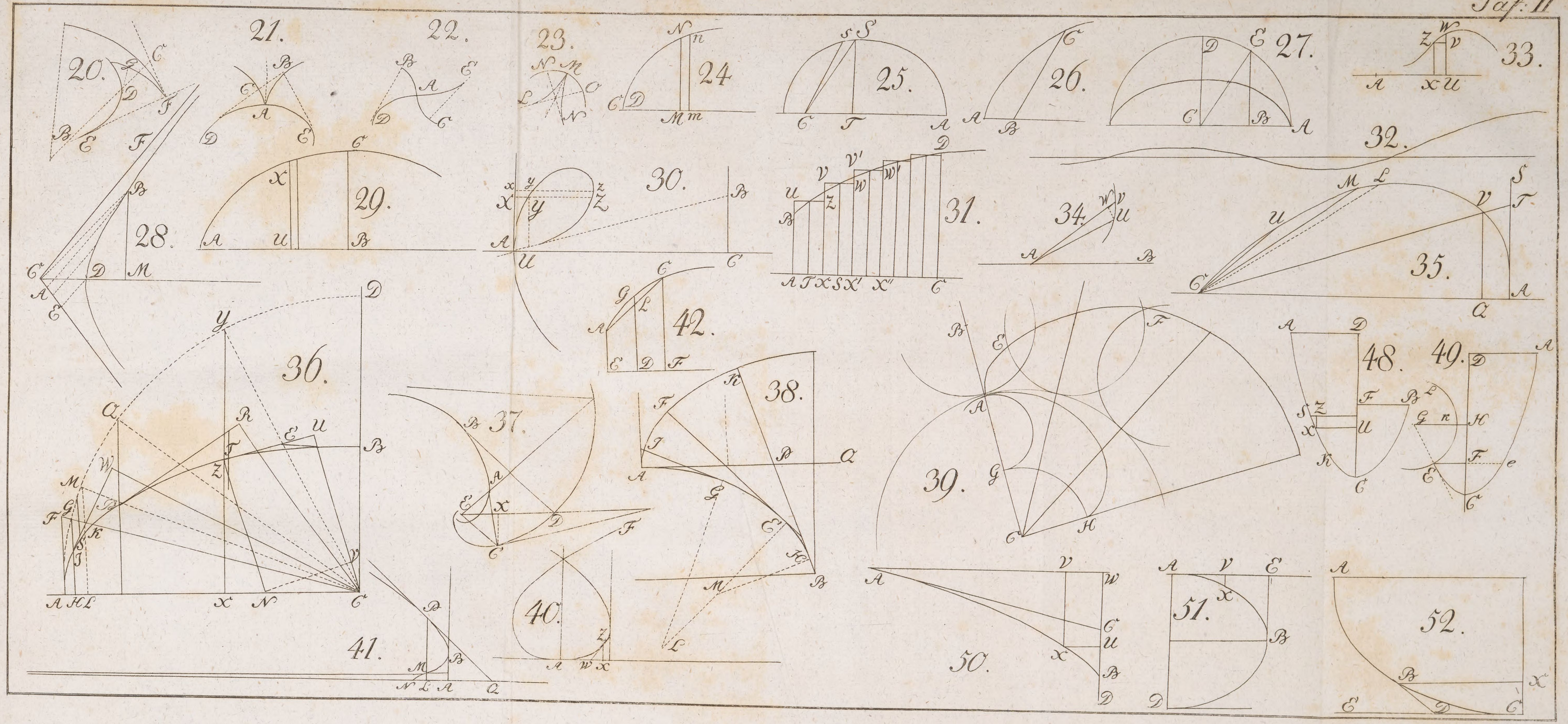
Z. 9. l. $\sqrt{(R^2-\varrho^2)}$.


BAYERISCHE STAATS-BIBLIOTHEK MUENCHEN

Taf. I


Taf. II

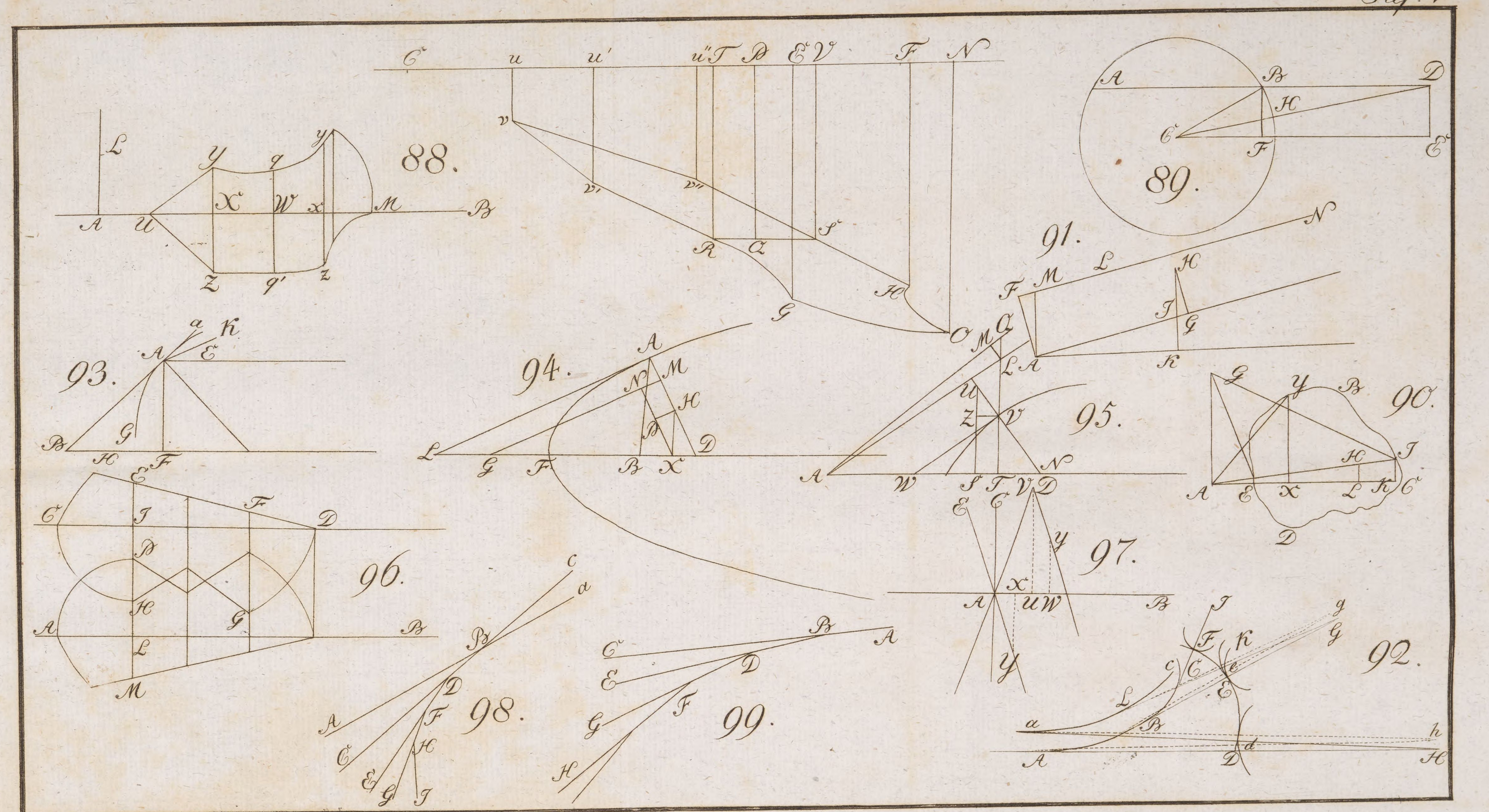

20.
21.
22.
23.
24
25.
26.
27.
33.
32.
28.
29.
30.
31.
34.
35.
36.
42.
37.
38.
39.
48.
49.
40.
41.
50.
51.
52.


44.
45.
47.
48.*
56.
46.
53.
55.
54.
43.
57.
67.
61.
62.
55.*
58.
59.
60.
64.
63.
65.

Taf. IV



Taf. V



BAYERISCHE
STAATS-
BIBLIOTHEK
MUENCHEN

Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Brandes, Heinrich Wilhelm,

Lehrbuch der höhern Geometrie in analytischer Darstellung

Bd.: 2 : mit 5 Kupfertafeln

Leipzig 1824

4 Math.p. 53 g-2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10053321-0